

Contrôle continu n° 1
21 novembre 2011

Durée : 1h30

Les documents et calculatrices sont interdits. La précision des raisonnements ainsi que la rigueur et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(1 - 3x) + e^{-x}$

1. Déterminer son ensemble de définition D_f et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D_f .
2. Ecrire le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0.
3. Soit T_0 la tangente à la courbe représentative de f , $\mathcal{C}_f$, au point $(0, f(0))$. Déterminer une équation de T_0 . Quelle est la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_0 au voisinage de $(0, f(0))$?

Exercice 2 Une entreprise produit un bien unique B . La quantité du bien B produite dépend uniquement du niveau de travail x de l'entreprise. On la note $Q(x)$, Q s'appelant la fonction de production. Dans la suite de l'exercice, on suppose que Q est donnée par la relation :

$$\forall x > 0, \quad Q(x) = (1 + x^2)^2$$

1. Montrer que Q strictement positive et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0 ; +\infty[$.
2. Déterminer les fonctions de production marginale Q_m et de production moyenne Q_M .
3. Déterminer une approximation de la variation absolue de la production lorsque le niveau de travail passe de $x = 2$ à $x = 2,01$.
4. Déterminer l'élasticité e_Q de la fonction de production.
5. On se place au niveau de travail $x = 3$. Quelle est la production associée ? On suppose que le travail augmente de 2%, déterminer une approximation de la variation relative de la production.
6. On se place toujours au niveau de travail $x = 3$. Quelle doit être l'augmentation relative de travail pour que la production augmente de 1,8% ? On demande un calcul approché.

Exercice 3

1. Représenter le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y + 1 \leq 0 \text{ ou } |x| < 1\}$$

Préciser *sans justification* si $\mathcal{E}$ est ouvert et s'il est fermé. Préciser *avec justification* s'il est borné et s'il est convexe.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ passant par le point $M = (1, 0, -2)$ et orthogonal au vecteur $w = (2, 1, 5)$.

Exercice 4 On considère la fonction de deux variables h définie par : $h(x, y) = \sqrt{x - x^2 - y^2}$.

1. Déterminer son ensemble de définition D_h . Est-il compact ? convexe ?
 2. Pour $k \in \mathbb{R}$, déterminer la courbe de niveau k de h , $\mathcal{C}_k$.
 3. Dans un repère orthonormé, représenter D_h et les courbes $\mathcal{C}_{1/2}$ et $\mathcal{C}_{\sqrt{3}/4}$.
-

Fin du sujet