

Contrôle continu numéro 2
5 janvier 2010

Durée : 1H30
Documents et calculatrices interdits
Les exercices sont indépendants
Les réponses doivent être justifiées

Exercice 1. Déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 1)$ et $C = (1, 1, -1)$.

Exercice 2. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{x^2}.$$

Exercice 3. Tracer la ligne de niveau 0 ainsi que la ligne de niveau -1 de la fonction

$$f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x| - |y|.$$

Exercice 4.

1. Montrer que la fonction $f: x \mapsto x \ln(x)$ est convexe sur son ensemble de définition.
2. Déterminer l'équation de la tangente en 1 à la courbe représentative de f .
3. En déduire que pour tout $x > 0$ on a

$$x - 1 \leq x \ln(x).$$

4. Montrer de manière similaire que $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

Exercice 5. Soit α un nombre réel. Étudier (en fonction du paramètre α) la convexité de la fonction

$$f_\alpha:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha.$$

Exercice 6. Soit f une fonction convexe et de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine. Montrer que si un point A est critique pour f alors f admet un minimum global en A .

Exercice 7. On considère la fonction

$$f: (x, y) \mapsto \frac{1}{x} + xy + \frac{1}{y}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition.
2. Déterminer ses points critiques et donner leur nature.
3. Quels sont les extrema globaux de f ?