Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1^er **cycle**

Second devoir de contrôle continu

Exercice 1 [5,5 points]

L'*indice de masse corporelle* d'une personne vaut MT^{-2}, où T est la taille de la personne, exprimée en mètres, et où M est la masse de la personne, exprimée en kilogrammes. On note I la fonction définie pour tout $(T\,;M)$ de $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$ par $I(T\,;M) = MT^{-2}$.

1. Donner l'indice de masse corporelle d'une personne de 180 cm et de 81 kg.

2. Donner une équation de la courbe de niveau 20 de la fonction I. Cette courbe de niveau est-elle une partie convexe de $\mathbb{R}^2$? *Justifier.*

3.a. Calculer les élasticités partielles de I en tout point de $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

3.b. Une personne ayant un indice de 30 parvient à diminuer sa masse de 5 % ; sa taille demeure constante. Donner une valeur approchée de son nouvel indice de masse corporelle.

Exercice 2 [8 points]

Soit α dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ est *homogène de degré* α si pour tout réel t de $]0\,;+\infty[$ et tout $(x\,;y)$ de D, on a $f(tx\,;ty) = t^\alpha f(x\,;y)$. De plus :
– si $\alpha < 1$, on dit que f est *à rendements d'échelle décroissants* ;
– si $\alpha = 1$, on dit que f est *à rendements d'échelle constants.*

1. Montrer que la fonction g définie pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\}$ par $g(x\,;y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ est homogène à rendements d'échelle décroissants.

Soit h la fonction définie par $h(x\,;y) = x\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$ pour tout $(x\,;y)$ de $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

2. Montrer que h est une fonction homogène à rendements d'échelle constants.

3. Justifier brièvement que h est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

4.a. Former le développement limité d'ordre 1 de h au point $(4\,;4)$.

4.b. En déduire une valeur décimale approchée de $h(3{,}92\,;4{,}1)$.

4.c. Donner une équation du plan tangent au graphe de h au point $(4\,;4\,;0)$. Peut-on déterminer la position relative de ce plan par rapport au graphe de h à l'aide du hessien ?

5.a. Montrer que h est concave sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

5.b. La fonction h admet-elle un maximum global sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$? Justifier.

Exercice 3 [6,5 points]

On note f la fonction des variables réelles x et y qui vérifie l'égalité $f(x\,;y) = x^2y+\ln(1+y^2)$. On désigne par D l'ensemble de définition de f et on admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

1. Expliciter D. Est-il ouvert ? convexe ? borné ? *Aucune justification n'est attendue.*

2. *Dans cette question, on utilise les notations de Monge.* Que valent p, q, r, s et t sur D ?

3. Démontrer que, si h et k sont deux réels assez proches de 0, il est possible d'écrire l'égalité approchée : $f(2+h\,;k) \approx 4k+4hk+k^2$.

4. Montrer que f admet un unique point critique sur D, que l'on déterminera.

Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1$^{\text{er}}$ **cycle**

Second devoir de contrôle continu (**correction**)

Exercice 1

1. Il suffit de calculer la valeur de $I(1{,}8\,;81)$:

$$I(1{,}8\,;81) = \frac{81}{(1{,}8)^2} = \frac{81}{3{,}24} = \frac{81 \times 100}{324}.$$

Comme $\dfrac{81}{324} = \dfrac{1}{4}$, il est possible de conclure : $I(1{,}8\,;81) = 25$.

Une personne mesurant 180 cm et pesant 81 kg
possède donc un indice de masse corporelle égal à 25.

2. En notant $\mathcal{C}_{20}$ la courbe de niveau 20 de I, nous avons :

$$\mathcal{C}_{20} = \{(T\,;M) \in \,]0\,;+\infty[^2,\ MT^{-2} = 20\}.$$

$$\boxed{\mathcal{C}_{20} = \{(T\,;M) \in \,]0\,;+\infty[^2,\ M = 20T^2\}.}$$

Démontrons que $\mathcal{C}_{20}$ n'est pas une partie convexe de $\mathbb{R}^2$. Les points $(1\,;20)$ et $(3\,;180)$ sont dans $\mathcal{C}_{20}$ puisque $20 = 20 \times 1^2$ et $180 = 20 \times 3^2$. Si $\mathcal{C}_{20}$ était une partie convexe de $\mathbb{R}^2$, le milieu du segment ayant pour extrémités les points précédents serait dans $\mathcal{C}_{20}$, ce qui est faux puisque ce milieu est égal à $(2\,;100)$ et que l'on a $100 \neq 20 \times 2^2$.

L'ensemble $\mathcal{C}_{20}$ n'est pas un convexe de $\mathbb{R}^2$.

3.a. La fonction I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[^2$ et ne s'annule pas sur $]0\,;+\infty[^2$. Quels que soient les réels strictement positifs T et M, nous avons :

$$e_{I/T}(T\,;M) = \frac{\partial I}{\partial T}(T\,;M) \times \frac{T}{I(T\,;M)} \qquad \text{et} \qquad e_{I/M}(T\,;M) = \frac{\partial I}{\partial M}(T\,;M) \times \frac{M}{I(T\,;M)}.$$

$$e_{I/T}(T\,;M) = -2MT^{-3} \times \frac{T}{MT^{-2}} \qquad \text{et} \qquad e_{I/M}(T\,;M) = T^{-2} \times \frac{M}{MT^{-2}}.$$

$$e_{I/T}(T\,;M) = -2 \qquad \text{et} \qquad e_{I/M}(T\,;M) = 1.$$

Finalement :

l'élasticité de I par rapport à T est constante et vaut -2 ;
l'élasticité de I par rapport à M est constante et vaut 1.

3.b. Si m et t sont deux réels assez proches de 0, on peut écrire :

$$\frac{I(T+t\,;M+m) - I(T\,;M)}{I(T\,;M)} \approx e_{I/T}(T\,;M) \times \frac{T+t-T}{T} + e_{I/M}(T\,;M) \times \frac{M+m-M}{M}.$$

On cherche $I(T+t\,;M+m)$. L'énoncé indique les données suivantes :

$$I(T\,;M)=30 \qquad \text{et} \qquad \frac{T+t-T}{T}=0\,\% \qquad \text{et} \qquad \frac{M+m-M}{M}=-5\,\%.$$

On a donc :

$$\frac{I(T+t\,;M+m)-30}{30}\approx -5\,\%.$$

Et ainsi :

$$I(T+t\,;M+m)\approx -1{,}5+30.$$

$$\boxed{\text{Le nouvel indice de masse corporelle de la personne est donc proche de 28,5.}}$$

Exercice 2

1. Soit t dans $]0\,;+\infty[$ et soit $(x\,;y)$ dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0\,;0)\}$. On a :

$$g(tx\,;ty)=\frac{txty}{t^2x^2+t^2y^2}=\frac{t^2xy}{t^2(x^2+y^2)}.$$

Ainsi :

$$\forall t\in\,]0\,;+\infty[,\ \forall(x\,;y)\in\mathcal{D}_g,\ g(tx\,;ty)=g(x\,;y).$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } g \text{ est donc homogène de degré 0 :}\\ \text{elle est donc homogène à rendements d'échelle décroissants.}\end{array}}$$

2. Soit t dans $]0\,;+\infty[$ et soit $(x\,;y)$ dans $]0\,;+\infty[^2$. On a :

$$h(tx\,;ty)=tx\ln\left(\frac{ty}{tx}\right)=tx\ln\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ainsi :

$$\forall t\in\,]0\,;+\infty[,\ \forall(x\,;y)\in\mathcal{D}_h,\ h(tx\,;ty)=t\times h(x\,;y).$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } h \text{ est donc homogène de degré 1 :}\\ \text{elle est donc homogène à rendements d'échelle constants.}\end{array}}$$

3. La fonction $(x\,;y)\mapsto \dfrac{y}{x}$ est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$; elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

De plus, $(x\,;y)\mapsto \dfrac{y}{x}$ est à valeurs strictement positives sur $]0\,;+\infty[^2$; comme la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$, on peut, par composition, affirmer que $(x\,;y)\mapsto \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

Par produit avec la fonction polynôme $(x\,;y)\mapsto x$, on a la conclusion attendue :

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0\,;+\infty[^2.}$$

4.a. Comme h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[^2$, on peut affirmer qu'elle admet un développement limité d'ordre 1 au point $(4\,;4)$. Il existe donc une fonction ε telle que, pour tout $(k\,;l)$ vérifiant $(4+k\,;4+l) \in\ ]0\,;+\infty[^2$:

$$h(4+k\,;4+l) = h(4\,;4) + \frac{\partial h}{\partial x}(4\,;4)k + \frac{\partial h}{\partial y}(4\,;4)l + \sqrt{k^2+l^2}\varepsilon(k\,;l) \text{ avec } \lim_{(k;l)\to(0;0)} \varepsilon(k\,;l) = 0.$$

Quels que soient les réels strcitement positifs x et y, on obtient, après calculs :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x\,;y) = \ln\left(\frac{y}{x}\right) - 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x\,;y) = \frac{x}{y}.$$

Il vient donc :

$$\boxed{h(4+k\,;4+l) = -k + l + \sqrt{k^2+l^2}\varepsilon(k\,;l) \text{ avec } \lim_{(k;l)\to(0;0)} \varepsilon(k\,;l) = 0.}$$

4.b. D'après la question précédente, lorsque k et l sont proches de 0, il est possible d'écrire :

$$h(4+k\,;4+l) \approx -k + l.$$

En particulier, lorsque k vaut $-0{,}08$ et lorsque l vaut $0{,}1$:

$$h(4-0{,}08\,;4+0{,}1) \approx 0{,}08 + 0{,}1.$$

$$\boxed{h(3{,}92\,;4{,}1) \approx 0{,}18.}$$

4.c. Une équation du plan tangent à la surface représentative de h au point $(4\,;4\,;0)$ est :

$$z = h(4\,;4) + \frac{\partial h}{\partial x}(4\,;4) \times (x-4) + \frac{\partial h}{\partial y}(4\,;4) \times (y-4).$$

Grâce aux calculs effectués précédemment, on obtient immédiatement :

$$z = 0 - (x-4) + (y-4).$$

Enfin :

$$\boxed{\text{une équation du plan demandé est } -x+y-z=0.}$$

Quels que soient les réels x et y de $]0\,;+\infty[$, nous avons, en utilisant les notations de Monge :

$$r = \frac{-1}{x} \qquad \text{et} \qquad s = \frac{1}{y} \qquad \text{et} \qquad t = \frac{-x}{y^2}.$$

Nous remarquons ainsi que le hessien $rt - s^2$ est égal à 0 pour tout $(x\,;y)$ de $]0\,;+\infty[^2$.

$$\boxed{\text{Il n'est donc pas possible de conclure sur la position du plan tangent à l'aide du hessien.}}$$

5.a. Les calculs effectués précédemment montrent aisément :

$$\forall (x\,;y) \in\ ]0\,;+\infty[^2, \begin{cases} rt - s^2 \geqslant 0 \\ r \leqslant 0 \\ t \leqslant 0. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est donc concave sur }]0\,;+\infty[^2.}$$

5.b. Bien que h soit concave sur son domaine de définition, h n'admet pas de maximum global. En effet, h n'admet pas de point critique : il est impossible que le quotient $\dfrac{x}{y}$ s'annule si x et y sont dans $]0\,;+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ n'admet donc aucun extremum sur }]0\,;+\infty[^2.}$$

Exercice 3

1. Pour tout y de $\mathbb{R}$, le réel $1+y^2$ est strictement positif : la quantité $\ln(1+y^2)$ est donc définie pour tout réel y.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'ensemble de définition de } f \text{ est donc } \mathbb{R}^2\,; \\ \text{cet ensemble est une partie ouverte et convexe dans } \mathbb{R}^2, \\ \text{mais ce n'est pas un borné de } \mathbb{R}^2.\end{array}}$$

2. Quels que soient les réels x et y, on a :

$$\boxed{p = 2xy \quad \text{et} \quad q = x^2 + \frac{2y}{1+y^2} \quad \text{et} \quad r = 2y \quad \text{et} \quad s = 2x \quad \text{et} \quad t = \frac{2-2y^2}{(1+y^2)^2}.}$$

3. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, elle admet un développement limité d'ordre 2 au point $(2\,;0)$. Il existe donc une fonction ε qui vérifie, pour tout couple de réels $(h\,;k)$:

$$f(2+h\,;k) = f(2\,;0) + ph + qk + \frac{1}{2}\left(rh^2 + 2shk + tk^2\right) + (h^2+k^2)\varepsilon(h\,;k)$$

$$\text{avec} \lim_{(h;k)\to(0;0)} \varepsilon(h\,;k) = 0.$$

Au point $(2\,;0)$, les égalités suivantes sont vraies :

$$f(2\,;0) = 0, \quad p = 0, \quad q = 4, \quad r = 0, \quad s = 4 \quad \text{et} \quad t = 2.$$

Ainsi, nous avons, pour tout $(h\,;k)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$f(2+h\,;k) = 4k + 4hk + k^2 + (h^2+k^2)\varepsilon(h\,;k) \quad \text{avec} \lim_{(h;k)\to(0;0)} \varepsilon(h\,;k) = 0.$$

Lorsque h et k sont proches de 0, il est donc possible d'écrire :

$$\boxed{f(2+h\,;k) \approx 4k + 4hk + k^2.}$$

4. Les points critiques de f sont les éléments $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $(\nabla f)(x\,;y) = (0\,;0)$, or :

$$(\nabla f)(x\,;y) = (0\,;0) \iff \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + \dfrac{2y}{1+y^2} = 0. \end{cases}$$

$$(\nabla f)(x\,;y) = (0\,;0) \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ x^2 + \dfrac{2y}{1+y^2} = 0. \end{cases}$$

$$(\nabla f)(x\,;y) = (0\,;0) \iff \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{2y}{1+y^2} = 0 \end{cases} \text{ou} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Il existe donc un unique point critique de } f \text{ : le point } (0\,;0).}$$