Second devoir de contrôle continu

Exercice 1 [6 points]

Soit g la fonction polynomiale vérifiant $g(x\,;y) = x^2y^2 + x^2 + 2x$ pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Donner les expressions du gradient et de la matrice hessienne de g.

2.a. Démontrer que g ne possède qu'un point critique, puis que g admet un minimum en ce point. Quelle est la valeur de ce minimum ?

2.b. En faisant apparaître la somme de deux carrés dans l'expression de g, démontrer que ce minimum est global.

3. Sur $\mathbb{R}^2$, la fonction g est-elle concave ? convexe ? Justifier.

Exercice 2 [9 points]

On désigne par f la fonction de deux variables réelles vérifiant $f(x\,;y) = 4y^2 - xy + 2\ln x$. La surface représentative de f dans l'espace usuel $\mathbb{R}^3$ est notée $(\mathcal{S}_f)$.

De plus, on appelle A le point $\left(1\,;\dfrac{1}{4}\,;0\right)$.

1.a. Quel est l'ensemble de définition de f ?

1.b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet ensemble.

1.c. L'ensemble de définition de f est-il convexe ? borné ? Justifier les réponses données.

2.a. Donner les expressions des dérivées partielles premières de f.

2.b. Démontrer que f n'admet qu'un point critique ; le déterminer.

3.a. Vérifier que A appartient à $(\mathcal{S}_f)$.

3.b. Établir que $7x + 4y - 4z - 8 = 0$ est une équation du plan tangent à $(\mathcal{S}_f)$ en A.

4.a. Donner les expressions des dérivées partielles secondes de f.

4.b. Que vaut l'expression du hessien de f pour tout $(x\,;y)$ de l'ensemble de définition ?

4.c. En déduire la nature du point critique de f, puis la position relative de $(\mathcal{S}_f)$ par rapport au plan tangent à $(\mathcal{S}_f)$ en A, au voisinage de A.

Exercice 3 [2,5 points]

Former le développement limité d'ordre 1 de la fonction $(x\,;y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ au point $(3\,;4)$. Donner une valeur décimale approchée de $\sqrt{3{,}04^2 + 3{,}92^2}$ en utilisant ce développement limité.

Exercice 4 [2,5 points]

Trois réels strictement positifs x, y et z sont tels que $z = 2xe^{x-y}$. *Sur l'*ANNEXE*, former* ***cinq*** *propositions exactes : relier un début de phrase de la colonne de gauche à une fin de phrase de la colonne de droite. Un bon regroupement apporte un demi-point ; un mauvais regroupement enlève un demi-point.* ***Aucune justification n'est attendue****. Certaines colonnes peuvent être utilisées plusieurs fois... ou ne pas servir du tout !*

Prénom NOM : ______________________________

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Si x et y diminuent de 2 % à partir de 1 ...	•	•	... alors z augmente de 2 % environ.
Si x passe de 2 à 2,02 et y reste constant ...	•	•	... alors z augmente de 3 % environ.
Si x augmente de 2 % à partir de 1 et si y augmente de 1 % à partir de 1 ...	•	•	... alors z diminue de 2 % environ.
Si $(x\,;y)$ passe de $(1\,;2)$ à $(1{,}01\,;2{,}02)$ ...	•	•	... alors z diminue de 4 % environ.
Si x augmente de 4 % à partir de 2 et si y augmente de 3 % à partir de 4 ...	•	•	... alors z ne varie pratiquement pas.

CORRECTION

Exercice 1

1. La fonction g étant polynomiale, elle est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Après quelques calculs, le gradient de g vaut :

$$\boxed{\forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ (\nabla g)(x\,;y)=(2xy^2+2x+2\,;2x^2y).}$$

De même, en calculant les dérivées partielles secondes de g, la matrice hessienne de g est :

$$\boxed{\forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ (D^2g)(x\,;y)=\begin{pmatrix}2+2y^2 & 4xy\\ 4xy & 2x^2\end{pmatrix}.}$$

2.a. Les points critiques de g sont les couples de réels $(x\,;y)$ qui annulent le gradient de g, c'est-à-dire les couples $(x\,;y)$ vérifiant :

$$\begin{cases}2x+2+2xy^2=0\\ 2x^2y=0.\end{cases}$$

Comme un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul, nous pouvons réécrire la seconde équation et obtenir :

$$\begin{cases}2x+2+2xy^2=0\\ x=0\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}2x+2+2xy^2=0\\ y=0.\end{cases}$$

Il vient donc :

$$\begin{cases}2=0\\ x=0\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}2x+2=0\\ y=0.\end{cases}$$

Comme le premier système n'admet aucune solution, nous pouvons conclure que g admet un unique point critique, qui est la solution du second système.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ n'admet qu'un point critique : } (-1\,;0).}$$

La matrice hessienne de g en $(-1\,;0)$ vérifie l'égalité :

$$\boxed{(D^2g)(-1\,;0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}.}$$

Ainsi, au point $(-1\,;0)$, on a $rt-s^2>0$, $r>0$ et $t>0$. On peut conclure :

$$\boxed{\text{en } (-1\,;0)\text{, la fonction } g \text{ admet un minimum local.}}$$

En calculant l'image de $(-1\,;0)$ par g, on peut affirmer :

$$\boxed{\text{le minimum de } g \text{ vaut } -1.}$$

2.b. En remarquant que x^2+2x est égal à $(x+1)^2-1$ pour tout réel x, nous pouvons transformer l'expression de g et écrire, pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$g(x\,;y)=(xy)^2+(x+1)^2-1.$$

Étant donné que le carré d'un réel est toujours positif ou nul, nous avons donc :

$$\forall (x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ g(x\,;y)\geqslant -1,$$

et donc finalement :

$$\forall (x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ g(x\,;y)\geqslant g(-1\,;0).$$

$$\boxed{\text{Le minimum de la fonction } g \text{ est donc global, par définition.}}$$

3. La hessienne de g en $(1\,;1)$ est :

$$\boxed{(D^2g)(1\,;1)=\begin{pmatrix}4&4\\4&2\end{pmatrix}.}$$

Ainsi, au point $(1\,;1)$, on a $rt-s^2<0$. Il existe donc un couple $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ en lequel le hessien de g est strictement négatif.

$$\boxed{\text{Sur } \mathbb{R}^2\text{, la fonction } g \text{ n'est donc ni convexe, ni concave.}}$$

Exercice 2

1.a. À cause du logarithme, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est définie que sur }]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}.}$

1.b. Comme la fonction $(x\,;y)\mapsto 4y^2-xy$ est polynomiale, il est clair que $(x\,;y)\mapsto 4y^2-xy$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}$.

D'autre part, la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$; grâce au lemme d'extension, il est donc possible d'affirmer que $(x\,;y)\mapsto \ln x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Par somme, la fonction est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}.}$$

1.c. Notons D l'ensemble $]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}$.

L'ensemble $\boxed{D \text{ est convexe}}$ comme produit cartésien de deux intervalles de $\mathbb{R}$.

En revanche, $\boxed{D \text{ n'est pas une partie bornée}}$ de $\mathbb{R}^2$ car la droite d'équation $x=1$ est incluse dans D, or une droite n'est pas bornée.

2.a. Quel que soit $(x\,;y)$ dans D, nous avons :

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,;y)=-y+\dfrac{2}{x}\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}(x\,;y)=8y-x.\end{cases}}$$

2.b. Les points critiques de f sont les éléments $(x\,;y)$ de D vérifiant :

$$\begin{cases} -y + \dfrac{2}{x} = 0 \\ \\ 8y - x = 0. \end{cases}$$

Le réel x étant non nul, le système précédent équivaut à :

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x = 8y, \end{cases}$$

et donc finalement :

$$\begin{cases} 8y^2 = 2 \\ x = 8y, \end{cases}$$

ou, plus simplement :

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{1}{4} \\ \\ x = 8y. \end{cases}$$

Attention : l'ensemble de définition de f impose à x d'être strictement positif.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'admet donc que } \left(4\,;\frac{1}{2}\right) \text{ comme point critique.}}$$

3.a. On remarque :

$$f\left(1\,;\frac{1}{4}\right) = 4 \times \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 2\ln 1.$$

Ainsi :

$$f\left(1\,;\frac{1}{4}\right) = 0.$$

$$\boxed{\text{Le point } A \text{ appartient donc à la surface représentative de } f.}$$

3.b. Une équation du plan demandée est :

$$z = f\left(1\,;\frac{1}{4}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(1\,;\frac{1}{4}\right) \times (x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(1\,;\frac{1}{4}\right) \times \left(y - \frac{1}{4}\right).$$

Après quelques calculs, elle s'écrit :

$$z = 0 + \frac{7}{4}(x-1) + y - \frac{1}{4},$$

et donc, en multipliant par 4 :

$$4z = 7(x-1) + 4y - 1.$$

De là :

$$\boxed{7x + 4y - 4z - 8 = 0 \text{ est bien une équation du plan tangent à } (\mathcal{S}_f) \text{ en } A.}$$

4.a. Quel que soit $(x\,;y)$ dans D, nous avons :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,;y) = \dfrac{-2}{x^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x\,;y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x\,;y) = -1 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,;y) = 8. \end{cases}}$$

4.b. La question précédente permet de calculer le hessien de f en tout $(x\,;y)$ de D :

$$\boxed{\text{le hessien cherché vaut } \frac{-16}{x^2} - 1.}$$

4.c. Comme le hessien est strictement négatif sur D :

$$\boxed{\text{le point critique de } f \text{ est un point col.}}$$

Pour la même raison :

$$\boxed{\text{tous les plans tangents à } (\mathcal{S}_f) \text{ traversent } (\mathcal{S}_f).}$$

Exercice 3

Comme la fonction $f : (x\,;y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[^2$, on peut affirmer qu'elle admet un développement limité d'ordre 1 au point $(3\,;4)$. Il existe une fonction ε telle que, pour tout $(h\,;k)$ vérifiant $(3+h\,;4+k) \in\,]0\,;+\infty[^2$:

$$f(3+h\,;4+k) = f(3\,;4) + \frac{\partial f}{\partial x}(3\,;4)h + \frac{\partial f}{\partial y}(3\,;4)k + \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h\,;k) \text{ avec } \lim_{(h;k)\to(0;0)} \varepsilon(h\,;k) = 0.$$

Or, quels que soient les réels strictement positifs x et y, nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Il vient donc :

$$\boxed{f(3+h\,;4+k) = 5 + \frac{3h}{5} + \frac{4k}{5} + \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h\,;k) \text{ avec } \lim_{(h;k)\to(0;0)} \varepsilon(h\,;k) = 0.}$$

Lorsque h et k sont proches de 0, il est donc possible d'écrire :

$$f(3+h\,;4+k) \approx 5 + \frac{3h}{5} + \frac{4k}{5}.$$

En particulier, lorsque h vaut 0,04 et lorsque k vaut $-0{,}08$:

$$f(3+0{,}04\,;4-0{,}08) \approx 5 + \frac{0{,}12}{5} + \frac{-0{,}32}{5}.$$

$$\boxed{\sqrt{3{,}04^2 + 3{,}92^2} \approx 4{,}96.}$$

Exercice 4

Les réponses sont données sur l'annexe.