

SECOND DEVOIR DE CONTRÔLE CONTINU

Exercice 1 [4 points]

Pour x dans $]0; +\infty[$ et y dans $]0; +\infty[$, on pose :

$$h(x; y) = \frac{x^2 + y}{xy}.$$

1. Calculer les expressions des élasticités partielles de h , en les simplifiant au maximum.

2.a. Les variables x et y , initialement égales à 4, augmentent toutes les deux de 5 %. Quelle est alors la variation relative approximative de h ?

2.b. On fixe la valeur de x à 3 et la valeur de y à 1. On souhaite que h diminue de 8 % environ sans modifier la valeur de y . Quelle doit être la variation absolue de x ?

Exercice 2 [5 points]

Pour chaque question de l'ANNEXE, quatre réponses sont proposées. Une seule est correcte : la cocher. Une bonne réponse apporte un demi-point ; une réponse inexacte enlève un demi-point. L'absence de réponse n'ajoute ni n'enlève aucun point. Aucune justification n'est attendue.

Exercice 3 [6 points]

Considérons la fonction f de deux variables réelles vérifiant :

$$f(x; y) = \frac{4y}{1 + e^x}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f ; montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet ensemble.

2. Former le développement limité d'ordre 2 de f au point $(0; 4)$.

3. La calculatrice donne $f(0,2; 4,3) \approx 7,742$. Quel résultat obtient-on en utilisant l'approximation de f en $(0; 4)$ à l'ordre 1 ? à l'ordre 2 ? Commenter.

4. Démontrer que le hessien de f est strictement négatif pour tout $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$. Que peut-on en déduire sur la convexité de la fonction f ?

Exercice 4 [5,5 points]

Soit g la fonction vérifiant $g(x; y) = x^3 - 4xy + (2x + 2y)^2$ pour tout $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Donner les expressions du gradient et de la matrice hessienne de g .

2.a. Établir que g admet exactement deux points critiques, que l'on déterminera.

2.b. Montrer que g n'admet qu'un extremum et que celui-ci est un minimum.

2.c. Le minimum de g est-il global ? Justifier.

3. Sur $\mathbb{R}^2$, la fonction g est-elle concave ? convexe ? Justifier.

Prénom NOM : _____

ANNEXE (à rendre avec la copie)

1. On considère la fonction g définie par $g(x; y) = \sqrt{6x^2 + y^2 + 2}$ pour tout $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$. Quelle égalité est vraie ?

☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1; 1) = \frac{2}{\sqrt{9}}$ ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1; 1) = \frac{1}{3}$ ☐ $\frac{\partial g}{\partial y}(1; 1) = \frac{2}{\sqrt{9}}$ ☐ $\frac{\partial g}{\partial y}(1; 1) = \frac{1}{3}$

2. De combien augmente x^3y^2 lorsque x passe de 4 à 4,2 et y passe de 5 à 4,9 ?

☐ de 3 % environ ☐ de 7 % environ ☐ de 11 % environ ☐ de 19 % environ

3. Soit f la fonction définie pour tout réel x et pour tout réel y par $f(x; y) = 1 + 2x^2 + y^2$. Si $\mathcal{C}$ désigne la courbe de niveau de f passant par le point $(1; 2)$, quel point appartient à $\mathcal{C}$?

☐ $(-\sqrt{3}; 0)$ ☐ $(2; 1)$ ☐ $(1; \sqrt{6})$ ☐ $(0; -8)$

4. On note D l'ensemble de définition de la fonction $(x; y) \mapsto \ln(1 - x^2) + x\sqrt{3y}$. Que peut-on dire de D dans $\mathbb{R}^2$?

☐ D est ouvert ☐ D est convexe ☐ D est borné ☐ D est fermé

5. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = 2x^2 - y^2$. Le plan tangent à $\mathcal{S}$ au point $(1; 2; -2)$ est noté $\mathcal{P}$. Quelle est une équation de $\mathcal{P}$?

☐ $z = -2 + 4x - 4y$ ☐ $z = 1 + 2x - 2y$ ☐ $z = 2 + 4x - 4y$ ☐ $z = -2 - 2x + 4y$

6. Lequel de ces couples est un point col de la fonction $(x; y) \mapsto x^4 - 4x^3 + 4x^2 + e^y - y$?

☐ $(-1; 0)$ ☐ $(0; 0)$ ☐ $(1; 0)$ ☐ $(2; 0)$

7. On considère une fonction f , définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$, dont le seul extremum est un maximum atteint en $A(1; 4)$. Quelle affirmation est nécessairement vraie ?

☐ A est un point critique de f ☐ f est concave ☐ le maximum est global ☐ f n'existe pas

8. Que peut-on dire de l'ensemble $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, 3x - y + 1 \leq 0\}$?

☐ il est ouvert ☐ il est compact ☐ il est convexe ☐ il est borné

9. À l'aide de l'approximation affine de la fonction $(x; y) \mapsto x^y$ en $(1; 3)$, quelle valeur trouve-t-on pour $(1,02)^{3,01}$?

☐ 1,03 ☐ 0,97 ☐ 1,06 ☐ 0,95

10. Lequel de ces couples est un point critique de la fonction $(x; y) \mapsto x^2 + y^2 - x^3 - 1$?

☐ $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ ☐ $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$ ☐ $\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ ☐ $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$

CORRECTION

Exercice 1

1. La fonction h est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0; +\infty[^2$; de plus, h elle-même ne s'annule pas sur $]0; +\infty[^2$. Il est donc possible de calculer les élasticités partielles de h , définies pour tout $(x; y)$ de $]0; +\infty[^2$ par :

$$e_{h/x}(x; y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x; y) \times \frac{x}{h(x; y)} \quad \text{et} \quad e_{h/y}(x; y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x; y) \times \frac{y}{h(x; y)}.$$

Les dérivées partielles de h se calculent comme des quotients; après simplification, nous avons, quels que soient les réels x et y de $]0; +\infty[$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x; y) = \frac{x^2 - y}{x^2 y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x; y) = \frac{-x}{y^2}.$$

Ainsi, après simplification, il vient, pour tout x de $]0; +\infty[$ et tout y de $]0; +\infty[$:

$$e_{h/x}(x; y) = \frac{x^2 - y}{x^2 + y} \quad \text{et} \quad e_{h/y}(x; y) = \frac{-x^2}{x^2 + y}.$$

2.a. En notant v la variation relative demandée, on sait qu'il est possible d'écrire :

$$v \approx e_{h/x}(4; 4) \times (+5 \%) + e_{h/y}(4; 4) \times (+5 \%).$$

De là :

$$v \approx \frac{12}{20} \times 5 \% - \frac{16}{20} \times 5 \%,$$

puis :

$$v \approx 3 \% - 4 \%.$$

La quantité $h(x; y)$ diminue d'environ 1 % si x et y augmentent de 5 % à partir de 4.

2.b. Notons w la variation relative de x liée aux variations données dans l'énoncé. Alors :

$$-8 \% \approx e_{h/x}(3; 1) \times w + e_{h/y}(3; 1) \times 0.$$

De là, nous pouvons affirmer :

$$-8 \% \approx \frac{8}{10} \times w,$$

et donc :

$$w \approx -10 \%.$$

Il est clair qu'une diminution de 10 % à partir de 3 correspond à une diminution de 0,3.

La quantité x doit donc diminuer de près de 0,3.

Exercice 2

Les réponses sont données sur l'annexe.

Exercice 3

1. La quantité $1 + e^x$ existe pour tout réel x et ne s'annule pas. Il est donc possible de définir $f(x; y)$ quel que soit le couple $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^2$.

La fonction $(x; y) \mapsto 1 + e^x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ grâce au lemme d'extension; de plus, elle ne s'annule pas. D'autre part, $(x; y) \mapsto 4y$ est une fonction polynomiale; elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Par quotient, on peut affirmer :

la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, elle admet un développement limité d'ordre 2 au point $(0; 4)$. En utilisant les notations de Monge, nous pouvons affirmer qu'il existe une fonction ε qui vérifie, pour tout couple de réels $(h; k)$:

$$f(h; 4 + k) = f(0; 4) + ph + qk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + (h^2 + k^2)\varepsilon(h; k)$$

$$\text{avec } \lim_{(h; k) \rightarrow (0; 0)} \varepsilon(h; k) = 0.$$

Quels que soient les réels x et y , nous avons :

$$p = \frac{-4ye^x}{(1 + e^x)^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{4}{1 + e^x},$$

ainsi que :

$$r = \frac{-4ye^x(1 + e^x)^2 + 4ye^x \times 2(1 + e^x)(e^x)}{(1 + e^x)^4}, \quad s = \frac{-4e^x}{(1 + e^x)^2} \quad \text{et} \quad t = 0.$$

En particulier, si x vaut 0 et si y vaut 3 :

$$f(0; 4) = 8, \quad p = -4, \quad q = 2, \quad r = 0, \quad s = -1 \quad \text{et} \quad t = 0.$$

Finalement, pour tout $(h; k)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$f(h; 4 + k) = 8 - 4h + 2k - hk + (h^2 + k^2)\varepsilon(h; k) \quad \text{avec } \lim_{(h; k) \rightarrow (0; 0)} \varepsilon(h; k) = 0.$$

3. D'après la question précédente, il est possible d'écrire, lorsque h et k sont proches de 0 :

$$\begin{aligned} f(h; 4 + k) &\approx 8 - 4h + 2k \text{ à l'ordre 1,} \\ f(h; 4 + k) &\approx 8 - 4h + 2k - hk \text{ à l'ordre 2.} \end{aligned}$$

Après quelques calculs, nous avons ainsi, en posant $h = 0,2$ et $k = 0,3$:

$$\begin{aligned} f(0,2; 4,3) &\approx 7,8 \text{ à l'ordre 1,} \\ f(0,2; 4,3) &\approx 7,74 \text{ à l'ordre 2.} \end{aligned}$$

L'approximation d'ordre 2 est plus précise que celle d'ordre 1. Les deux approximations sont toutefois assez proches de la valeur donnée par la calculatrice.

4. Les calculs de la question 2. permettent d'affirmer que, quels que soient les réels x et y :

$$rt - s^2 = \frac{-16e^{2x}}{(1 + e^x)^4}.$$

Comme la fonction exponentielle est strictement positive :

le hessien de f est strictement négatif sur $\mathbb{R}^2$.

Par suite :

sur $\mathbb{R}^2$, la fonction f n'est ni concave, ni convexe.

Exercice 4

1. Afin de simplifier les calculs, remarquons g est une fonction polynomiale vérifiant, pour tout $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$g(x; y) = x^3 + 4x^2 + 4y^2 + 4xy.$$

Clairement, le gradient de g vaut donc :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, (\nabla g)(x; y) = (3x^2 + 8x + 4y; 4x + 8y).$$

De même, après quelques calculs, la matrice hessienne de g est :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, (D^2g)(x; y) = \begin{pmatrix} 6x + 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

2.a. Les points critiques de g sont les couples de réels $(x; y)$ qui annulent le gradient de g , c'est-à-dire les couples $(x; y)$ vérifiant :

$$\begin{cases} 3x^2 + 8x + 4y = 0 \\ 4x + 8y = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 3x^2 + 8x + 4y = 0 \\ 4y = -2x. \end{cases}$$

En remplaçant $4y$ par $-2x$ dans la première équation, et en divisant les membres de la seconde équation par 2, nous obtenons :

$$\begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ 2y = -x, \end{cases}$$

et finalement :

$$\begin{cases} 3x(x + 2) = 0 \\ x = -2y. \end{cases}$$

La fonction g admet donc bien deux points critiques, qui sont $(0; 0)$ et $(-2; 1)$.

2.b. En $(0; 0)$, le hessien de g vaut 48 et les quantités r et t sont strictement positives. Ainsi, g admet un minimum local au point $(0; 0)$.

En revanche, en $(-2; 1)$, le hessien de g vaut -48 . Le point $(-2; 1)$ est donc un point col pour g .

La conclusion attendue est donc démontrée.

2.c. Il est intéressant de remarquer l'égalité suivante, valable pour tout réel x :

$$g(x; 0) = x^2(x + 4).$$

Ainsi, la fonction g prend des valeurs négatives ; par exemple : $g(-5; 0) < 0$.

Le minimum trouvé à la question précédente ne peut donc pas être global ; en effet, s'il était global, nous aurions en particulier :

$$g(-5; 0) \geq g(0; 0),$$

et donc

$$g(-5; 0) \geq 0,$$

ce qui est absurde.

Le minimum de g n'est donc que local, et non global.

3. Si la fonction g était convexe, elle n'admettrait aucun point col ; de même si g était concave. D'après la question précédente, le point $(0; 0)$ est un point col pour g . Conclusion :

la fonction n'est ni concave, ni convexe.

Prénom NOM : _____

ANNEXE (à rendre avec la copie)

1. On considère la fonction g définie par $g(x; y) = \sqrt{6x^2 + y^2 + 2}$ pour tout $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$. Quelle égalité est vraie ?

- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1; 1) = \frac{2}{\sqrt{9}}$ ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1; 1) = \frac{1}{3}$ ☐ $\frac{\partial g}{\partial y}(1; 1) = \frac{2}{\sqrt{9}}$ ☒ $\frac{\partial g}{\partial y}(1; 1) = \frac{1}{3}$

2. De combien augmente x^3y^2 lorsque x passe de 4 à 4,2 et y passe de 5 à 4,9 ?

- ☐ de 3 % environ ☐ de 7 % environ ☒ de 11 % environ ☐ de 19 % environ

3. Soit f la fonction définie pour tout réel x et pour tout réel y par $f(x; y) = 1 + 2x^2 + y^2$. Si $\mathcal{C}$ désigne la courbe de niveau de f passant par le point $(1; 2)$, quel point appartient à $\mathcal{C}$?

- ☒ $(-\sqrt{3}; 0)$ ☐ $(2; 1)$ ☐ $(1; \sqrt{6})$ ☐ $(0; -8)$

4. On note D l'ensemble de définition de la fonction $(x; y) \mapsto \ln(1 - x^2) + x\sqrt{3y}$. Que peut-on dire de D dans $\mathbb{R}^2$?

- ☐ D est ouvert ☒ D est convexe ☐ D est borné ☐ D est fermé

5. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = 2x^2 - y^2$. Le plan tangent à $\mathcal{S}$ au point $(1; 2; -2)$ est noté $\mathcal{P}$. Quelle est une équation de $\mathcal{P}$?

- ☐ $z = -2 + 4x - 4y$ ☐ $z = 1 + 2x - 2y$ ☒ $z = 2 + 4x - 4y$ ☐ $z = -2 - 2x + 4y$

6. Lequel de ces couples est un point col de la fonction $(x; y) \mapsto x^4 - 4x^3 + 4x^2 + e^y - y$?

- ☐ $(-1; 0)$ ☐ $(0; 0)$ ☒ $(1; 0)$ ☐ $(2; 0)$

7. On considère une fonction f , définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$, dont le seul extremum est un maximum atteint en $A(1; 4)$. Quelle affirmation est nécessairement vraie ?

- ☒ A est un point critique de f ☐ f est concave ☐ le maximum est global ☐ f n'existe pas

8. Que peut-on dire de l'ensemble $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, 3x - y + 1 \leq 0\}$?

- ☐ il est ouvert ☐ il est compact ☒ il est convexe ☐ il est borné

9. À l'aide de l'approximation affine de la fonction $(x; y) \mapsto x^y$ en $(1; 3)$, quelle valeur trouve-t-on pour $(1,02)^{3,01}$?

- ☐ 1,03 ☐ 0,97 ☒ 1,06 ☐ 0,95

10. Lequel de ces couples est un point critique de la fonction $(x; y) \mapsto x^2 + y^2 - x^3 - 1$?

- ☒ $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ ☐ $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$ ☐ $\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ ☐ $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$
-