Université Paris-Dauphine
UFR DEGEAD 1$^{\text{er}}$ **cycle** **Année** 2012-2013

Premier devoir de contrôle continu

Exercice 1 [4 points]

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative est notée $\mathcal{C}_f$. On suppose que le développement limité de f en 5, à l'ordre 3, est :

$$f(x) = 1 - (x-5) + 2(x-5)^3 + (x-5)^3\varepsilon(x-5), \text{ avec } \lim_{x\to 5}\varepsilon(x-5) = 0.$$

1. Donner *sans justifier* la valeur de $f'(5)$, la valeur de $f''(5)$ et la valeur de $f^{(3)}(5)$.

2. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 5, puis préciser la position de cette tangente par rapport à $\mathcal{C}_f$ au voisinage du point $(5\,;1)$.

3. Utiliser l'approximation polynomiale d'ordre 3 de f en 5 pour donner une valeur décimale approchée de $f(4{,}9)$.

Exercice 2 [5 points]

On considère l'application f définie par $f(x\,;y) = 1 - e^x + e^{xy}$ pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Justifier brièvement que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que la courbe de niveau 1 de la fonction f est la réunion de deux droites que l'on précisera ; donner un vecteur directeur de chacune de ces droites.

3. Le point $(0\,;-3\,;1)$ appartient-il à la surface représentative de f ? Pourquoi ?

4.a. Calculer le gradient de f.

4.b. Déterminer les réels x et y pour lesquels le gradient de f en $(x\,;y)$ est le vecteur nul.

Exercice 3 [5 points]

On pose $E = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ y \leqslant 2 \text{ et } x^2 + y^2 - 8 < 2y\}$ et $F = \mathbb{R} \times [0\,;5[$. Indiquer VRAI ou FAUX pour chacune des affirmations suivantes. *Aucune justification n'est attendue.*

1. Tous les points du segment d'extrémités $(-1\,;2)$ et $(2\,;0)$ appartiennent à E.

2. L'ensemble F est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

3. Le cercle de centre $(0\,;0)$ et de rayon 1 est inclus dans E.

4. L'ensemble E est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.

5. La droite passant par le point $(1\,;2)$ et de vecteur normal $(-3\,;0)$ est incluse dans F.

Exercice 4 [6 points]

Soit g la fonction définie pour tout x de $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln x - 2x^2$.

1. Montrer que g admet un unique extremum et que celui-ci est global.

2. Démontrer que g est strictement négative sur $]0\,;+\infty[$.

3.a. Donner l'expression de l'élasticité de g sur $]0\,;+\infty[$. Lorsque x diminue de 4 % à partir de 1, de quel pourcentage approximatif diminue $g(x)$? Justifier.

3.b. On se place initialement à $x = 1$. Si l'on souhaite que $g(x)$ augmente de 9 %, à quelle nouvelle valeur doit-on fixer x ? *On demande un calcul approché.*

Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1^{er} **cycle**

Premier devoir de contrôle continu (**correction**)

Exercice 1

1. Les valeurs demandées se lisent dans le développement limité. Nous avons :

$$\boxed{f'(5) = -1 \quad \text{et} \quad f''(5) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(3)}(5) = 12.}$$

2. De même, une équation de la tangente demandée se lit en conservant la partie régulière du développement limité à l'ordre 1. Il vient alors :

$$\boxed{\text{la tangente a pour équation } y = -x + 6.}$$

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x) - (-x+6) = 2(x-5)^3 + (x-5)^3\varepsilon(x-5),$$

ou, de manière équivalente :

$$f(x) - (-x+6) = (x-5)^3(2 + \varepsilon(x-5)).$$

Ainsi, lorsque x est proche de 5, le signe de $f(x)-(-x+6)$ est identique au signe de $(x-5)^3$, c'est-à-dire au signe de $x-5$. On obtient la conclusion suivante.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Au voisinage de } (5\,;1),\ \mathcal{C}_f \text{ traverse sa tangente.}\\ \text{Pour } x < 5,\ \mathcal{C}_f \text{ est en dessous de sa tangente\,;}\\ \text{pour } x > 5,\ \mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de sa tangente.}\end{array}}$$

3. Si x est un réel assez proche de 5, il est possible d'écrire :

$$f(x) \approx 1 - (x-5) + 2(x-5)^3.$$

Ainsi, en prenant pour x la valeur 4,9 :

$$f(4{,}9) \approx 1 - (4{,}9-5) + 2(4{,}9-5)^3.$$

Après calculs :

$$\boxed{\text{une valeur approchée de } f(4{,}9) \text{ est } 1{,}098.}$$

Exercice 2

1. Les fonctions $(x\,;y) \mapsto x$ et $(x\,;y) \mapsto xy$ sont des fonctions polynomiales : elles sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Comme la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut conclure au caractère de classe $\mathcal{C}^1$ des fonctions $(x\,;y) \mapsto e^x$ et $(x\,;y) \mapsto e^{xy}$, par composition.

Enfin, par somme avec la fonction constante égale à 1, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$

2. La courbe de niveau 1 de f, notée $\mathcal{C}_1$, est telle que :

$$\mathcal{C}_1 = \big\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 - e^x + e^{xy} = 1\big\}.$$

Nous avons successivement :

$$\mathcal{C}_1 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ e^x = e^{xy}\}.$$

$$\mathcal{C}_1 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x = xy\}.$$

$$\mathcal{C}_1 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x(1-y) = 0\}.$$

La courbe cherchée est la réunion des droites d'équations respectives $x = 0$ et $y = 1$.
Un vecteur directeur de la droite d'équation $x = 0$ est $(0\,;-2)$;
un vecteur directeur de la droite d'équation $y = 1$ est $(3\,;0)$.

3. La surface représentative de f est l'ensemble des $(x\,;y\,;z)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $z = f(x\,;y)$. Comme $f(0\,;-3) = 1$, il est certain que :

le point $(0\,;-3\,;1)$ appartient à la surface représentative de f.

4.a. Pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$, le gradient de f en $(x\,;y)$ est :

$$\boxed{(\nabla f)(x\,;y) = \left(-e^x + ye^{xy}\,;xe^{xy}\right).}$$

4.b. Soit $(x\,;y)$ dans $\mathbb{R}^2$. Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, le réel xe^{xy} est nul si, et seulement si, $x = 0$. Par suite, $-e^x + ye^{xy}$ vaut $-1 + y$ et donc :

le gradient de f en $(x\,;y)$ est le vecteur nul si, et seulement si, $(x\,;y) = (0\,;1)$.

Exercice 3

Les quatre premières affirmations sont VRAIES, la dernière affirmation est FAUSSE.

Exercice 4

1. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition. De plus, quel que soit le réel x strictement positif, nous avons :

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 4x \text{ et } g''(x) = \frac{-1}{x^2} - 4.$$

Il apparaît clairement que g'' est négative : la fonction g est donc concave sur $]0\,;+\infty[$.

D'autre part, nous avons les équivalences suivantes, pour x dans $]0\,;+\infty[$:

$$g'(x) = 0 \iff \frac{1}{x} = 4x \text{ donc } g'(x) = 0 \iff \frac{1}{4} = x^2.$$

Comme x est positif, on peut affirmer :

$$g'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

La fonction g admet donc un unique point critique.

Les deux conclusions partielles précédentes prouvent que g admet un unique maximum et que ce maximum est global.

2. D'après la question précédente, on peut affirmer :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ g(x) \leqslant g\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ g(x) \leqslant -\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Étant donné que $-\ln 2 - \dfrac{1}{2}$ est strictement négatif, nous pouvons affirmer :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ g(x) < 0.$$

3.a. Comme g ne s'annule pas, l'élasticité de g est définie sur $]0\,;+\infty[$. Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, nous avons, par définition :

$$e_g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}x.$$

Tous calculs effectués, nous avons :

$$\boxed{e_g(x) = \frac{1-4x^2}{\ln x - 2x^2}.}$$

L'élasticité est une bonne approximation du quotient de la variation relative de $g(x)$ par la variation relative de x. Le pourcentage p cherché vérifie donc :

$$e_g(1) \approx \frac{p}{-4\,\%},$$

ce qui donne :

$$\frac{-3}{-2} \approx \frac{p}{-4\,\%},$$

et finalement :

$$p \approx -6\,\%.$$

$$\boxed{\text{Si } x \text{ diminue de } 4\,\% \text{ à partir de 1, alors } g(x) \text{ diminue d'environ } 6\,\%.}$$

3.b. On utilise la même égalité approchée qu'à la question précédente. Notons p' le pourcentage de variation de x ; nous avons :

$$e_g(1) \approx \frac{9\,\%}{p'}.$$

Après calculs non détaillés, il vient :

$$p' \approx 6\,\%.$$

Une augmentation de 6 % par rapport à 1 correspond à une augmentation de 0,06.

$$\boxed{\text{Il faut donc fixer } x \text{ à la valeur 1,06.}}$$