Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1^{er} **cycle**

Premier devoir de contrôle continu

Exercice 1 [5 points]

Soit $E_1 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ -5 \leqslant x^2 - 6y + y^2 \leqslant 0\}$ et $E_2 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0 \text{ et } y - x < 0\}$. *Sans justifier*, dire si chacun de ces ensembles est ouvert, fermé, borné, convexe, compact.

Exercice 2 [6 points]

On note f la fonction définie pour tout x de $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x^2(1 + \ln x)$. La représentation graphique de f dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé est notée C_f.

1. Expliquer brièvement pourquoi f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $]0\,;+\infty[$.

2. Calculer les dérivées successives de f jusqu'à $f^{(4)}$. En déduire qu'il existe une fonction ε vérifiant, pour tout h de $]-1\,;+\infty[$:

$$f(1+h) = 2 + 6h + 5h^2 + \frac{2}{3}h^3 - \frac{1}{6}h^4 + h^4\varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.$$

3. Donner une équation de la tangente à C_f au point $(1\,;2)$. Préciser la position de cette tangente par rapport à C_f au voisinage de $(1\,;2)$.

4.a. Calculer l'élasticité de f en précisant l'ensemble sur lequel elle est définie.

4.b. Lorsque x passe de 1 à 1,02, de quel pourcentage approximatif varie $f(x)$?

4.c. Si x vaut initialement 1 et que l'on souhaite que $f(x)$ augmente de 12 %, quelle doit être approximativement la variation de x ? On donnera la variation absolue et la variation relative.

Exercice 3 [3,5 points]

Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. Effectuer une étude précise des extremums de g.

2. Déterminer l'approximation affine de g en 2, puis l'utiliser pour donner une valeur décimale approchée de $g(2{,}05)$.

Exercice 4 [3,5 points]

On note f la fonction définie pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ par $f(x\,;y) = 10 - x^2 - y^2 + 2x$. On admet que f est de classe $\mathcal{C}^1$. On pose également $A = (-2\,;1)$ et $B = (2\,;3)$.

1. Calculer le gradient de f en tout point $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$.

2. On note $\vec{a}$ le gradient de f en A et $\vec{b}$ le gradient de f en B.
Montrer que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux.

3.a. Déterminer la nature de la courbe de niveau 0 de f, notée $\mathscr{C}$.

3.b. Justifier précisément que $\mathscr{C}$ n'est pas convexe, puis que $\mathscr{C}$ est borné.

Exercice 5 [2 points]

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $R = (1\,;0\,;-1)$, $S = (5\,;2\,;1)$ et $T = (-3\,;-4\,;1)$.

1. Donner une équation du plan orthogonal à $\overrightarrow{RS}$ et passant par T.

2. Donner une équation de la sphère de centre R et de rayon ST.

Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1^{er} **cycle**

CORRECTION

Exercice 1

L'ensemble E_1 est à la fois $\boxed{\text{fermé, borné et compact.}}$ Il n'est $\boxed{\text{ni ouvert, ni convexe.}}$

L'ensemble E_2 n'est $\boxed{\text{ni ouvert, ni fermé.}}$ Il n'est $\boxed{\text{pas borné, pas compact,}}$ mais est $\boxed{\text{convexe.}}$

Exercice 2

1. La fonction $x \mapsto 1 + \ln x$ est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $]0\,;+\infty[$, étant donné que ln est une fonction usuelle. D'autre part, $x \mapsto 2x^2$ est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $]0\,;+\infty[$ comme fonction polynomiale.

Par produit, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^4 \text{ sur }]0\,;+\infty[.}$

2. Quel que soit le réel x strictement positif, nous avons, après calculs :

$$\boxed{\begin{gathered} f'(x) = 6x + 4x\ln x \qquad \text{et} \qquad f''(x) = 10 + 4\ln x, \\ f^{(3)}(x) = \frac{4}{x} \qquad \text{et} \qquad f^{(4)}(x) = \frac{-4}{x^2}. \end{gathered}}$$

En particulier, nous avons :

$$f(1) = 2,\ \ f'(1) = 6,\ \ f''(1) = 10,\ \ f^{(3)}(1) = 4 \ \text{ et } \ f^{(4)}(1) = -4.$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $]0\,;+\infty[$, elle admet un développement limité d'ordre 4 en 1. Il existe donc une fonction ε telle que, quel que soit le réel h de $]-1\,;+\infty[$:

$$f(1+h) = f(1) + f'(1)h + \frac{f''(1)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{24}h^4 + h^4\varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.$$

En remplaçant, il vient la conclusion indiquée dans l'énoncé :

$$\boxed{f(1+h) = 2 + 6h + 5h^2 + \frac{2}{3}h^3 - \frac{1}{6}h^4 + h^4\varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.}$$

3. Une équation de la tangente cherchée se lit dans le développement limité de f à l'ordre 1, en ne conservant que les termes d'ordre 0 et 1 ; elle vaut :

$$y = f(1) + f'(1)(x-1),$$

c'est-à-dire :

$$y = 2 + 6(x-1),$$

et enfin :

$$\boxed{y = 6x - 4.}$$

D'après la question **2.**, nous pouvons écrire, pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$$f(x) = 6x - 4 + 5(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1), \text{ avec } \lim_{x\to 1}\varepsilon(x-1) = 0,$$

et donc :

$$f(x) - (6x-4) = (x-1)^2(5+\varepsilon(x-1)), \text{ avec } \lim_{x\to 1}\varepsilon(x-1) = 0.$$

Lorsque x est un réel proche de 1, le réel $5+\varepsilon(x-1)$ est positif, de même que $(x-1)^2$. De là, nous pouvons affirmer que pour tout réel x au voisinage de 1 :

$$f(x) - (6x-4) \geqslant 0.$$

$\boxed{\text{La tangente à } C_f \text{ en } (1\,;2) \text{ est en dessous de } C_f \text{ au voisinage de } (1\,;2).}$

4.a. L'élasticité de f est définie sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R},\ x > 0 \text{ et } f(x) \neq 0\}$. Quel que soit le réel x de $]0\,;+\infty[$, nous avons les équivalences suivantes :

$$f(x) = 0 \iff 2x^2(1+\ln x) = 0.$$

Comme x est strictement positif, on a :

$$f(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0,$$

puis :

$$f(x) = 0 \iff \ln x = -1.$$

Finalement :

$$f(x) = 0 \iff x = e^{-1}.$$

$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } e_f \text{ est donc }]0\,;e^{-1}[\cup]e^{-1}\,;+\infty[.}$

Pour tout x de l'ensemble précédent, nous avons :

$$e_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}x,$$

et donc, après calculs non détaillés ici :

$$\boxed{e_f(x) = \frac{3+2\ln x}{1+\ln x}.}$$

4.b. En notant p la variation relative de $f(x)$ cherchée, nous savons que p vérifie :

$$p \approx e_f(1) \times \frac{1{,}02-1}{1},$$

et donc :

$$p \approx 3 \times 0{,}02.$$

$\boxed{\text{Si } x \text{ passe de 1 à 1,02, alors } f(x) \text{ augmente de 6 \% environ.}}$

4.c. Nous pouvons utiliser la même formule que dans la question précédente. En notant v la variation relative de x que nous cherchons à déterminer, nous avons :

$$12\,\% \approx e_f(1) \times v.$$

Après calculs, nous obtenons :

$$v \approx 4\,\%.$$

$$\boxed{\text{Pour que } f(x) \text{ augmente de } 12\,\%,\ x \text{ doit augmenter de } 4\,\% \text{ environ à partir de } 1.}$$

Il est possible de calculer « à la main » la variation absolue : une augmentation de $4\,\%$ à partir de 1 correspond à une augmentation de 0,04.

$$\boxed{\text{Pour que } f(x) \text{ augmente de } 12\,\%,\ x \text{ doit augmenter de } 0{,}04 \text{ environ à partir de } 1.}$$

Exercice 3

1. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, nous avons $g'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

Il apparaît alors clairement que le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $1-x^2$, quel que soit le réel x. Nous pouvons donc établir le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de g	0	$\searrow$	$\dfrac{-1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0

En effet, après calculs, nous avons $g(-1) = \dfrac{-1}{2}$ et $g(1) = \dfrac{1}{2}$.

D'autre part, comme la limite en $-\infty$ d'une fraction rationnelle est la limite en $-\infty$ du quotient des monômes de plus haut degré, nous avons :

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{x^2}\right), \quad \text{et donc} \quad \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}\right).$$

Finalement :

$$\lim_{-\infty} f = 0.$$

De même :

$$\lim_{+\infty} f = 0.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } g \text{ admet donc deux extremums exactement sur } \mathbb{R} : \\ \text{un minimum global, égal à } \dfrac{-1}{2}, \text{ atteint en } -1 \,;\text{ un maximum global, égal à } \dfrac{1}{2}, \text{ atteint en } 1.\end{array}}$$

2. La fonction g étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, elle admet une approximation affine en 2, notée $\hat{g}_2$ et définie pour tout réel x par :

$$\hat{g}_2(x) = g(2) + g'(2)(x-2),$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\hat{g}_2(x) = \frac{2}{5} - \frac{3}{25}(x-2).}$$

Comme 2,05 est assez proche de 2, on peut affirmer :

$$g(2{,}05) \approx \frac{2}{5} - \frac{3}{25}(2{,}05-2),$$

et donc :

$$g(2{,}05) \approx 0{,}4 - \frac{0{,}15}{25},$$

finalement :

$$g(2{,}05) \approx 0{,}4 - 0{,}006.$$

Conclusion :

$$\boxed{g(2{,}05) \approx 0{,}394.}$$

Exercice 4

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$; elle admet donc des dérivées partielles premières. Quels que soient les réels x et y, nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y) = -2x+2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y) = -2y.$$

Le gradient de f en tout point $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ est donc :

$$\boxed{(\nabla f)(x\,;y) = (-2x+2\,;-2y).}$$

2. En particulier, nous avons, après calculs :

$$\vec{a} = (6\,;-2) \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = (-2\,;-6).$$

Le produit scalaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est égal à $6\times(-2)+(-2)\times(-6)$. On remarque ainsi que le produit scalaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est nul.

$$\boxed{\text{Les vecteurs } \vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ sont donc orthogonaux.}}$$

3.a. La courbe de niveau 0 de f est :

$$\mathscr{C} = \left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ 10-x^2-y^2+2x=0\right\}.$$

$$\mathscr{C} = \left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2-2x+y^2=10\right\}.$$

$$\mathscr{C} = \left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ (x-1)^2+y^2=11\right\}.$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{C} \text{ est le cercle de centre } (1\,;0) \text{ et de rayon } \sqrt{11}.}$

3.b. Les points $(1\,;\sqrt{11})$ et $(1\,;-\sqrt{11})$ sont deux éléments de $\mathscr{C}$ puisque :

$$(1-1)^2+(\sqrt{11})^2=11 \text{ et } (1-1)^2+(-\sqrt{11})^2=11.$$

Le milieu du segment joignant les points précédents a pour coordonnées $(1\,;0)$, or ce milieu n'est pas un élément de $\mathscr{C}$ puisque $(1-1)^2+0^2\neq 11$. $\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{C} \text{ n'est donc pas convexe.}}$

$\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{C} \text{ est borné}}$ puisque $\mathscr{C}$ peut être inclus trivialement dans la boule fermée de centre $(1\,;0)$ et de rayon $\sqrt{11}$.

Exercice 5

1. Notons $\mathscr{P}$ le plan orthogonal à $\overrightarrow{RS}$ et passant par T. Nous avons alors :

$$\mathscr{P}=\left\{M\in\mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{TM}\cdot\overrightarrow{RS}=0\right\}.$$

Comme $\overrightarrow{RS}=(4\,;2\,;2)$, nous avons :

$$\mathscr{P}=\left\{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3,\ (x+3\,;y+4\,;z-1)\cdot(4\,;2\,;2)=0\right\}.$$

Il vient donc, après calculs et simplifications :

$$\boxed{\mathscr{P}=\{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3,\ 2x+y+z+9=0\}.}$$

2. Notons $\mathscr{S}$ la sphère de centre R et de rayon ST. Nous avons alors :

$$\mathscr{S}=\left\{M\in\mathbb{R}^3,\ MR^2=ST^2\right\}.$$

Il est possible de calculer ST^2 :

$$ST^2=(-3-5)^2+(-4-2)^2+(1-1)^2=100.$$

Nous avons donc :

$$\boxed{\mathscr{S}=\{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3,\ (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=100\}.}$$