Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1^er **cycle**

Premier devoir de contrôle continu

Exercice 1 [4,5 points]

On note φ la fonction définie pour tout réel x par $\varphi(x) = x - \sqrt{8+x^2}$. On admet que φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que φ' ne s'annule pas. Que peut-on alors dire des extremums de φ ? Justifier.

2.a. Établir le développement limité de φ à l'ordre 1 en 1.
2.b. En déduire une valeur décimale approchée de $\varphi(1{,}09)$.
2.c. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de φ au point d'abscisse 1.

Exercice 2 [4,5 points]

Soit g la fonction définie par $g(x) = (1+x)e^{\frac{-1}{x}}$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

1. Sans calculer la dérivée de g, montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

2. Calculer l'expression $e_g(x)$ de l'élasticité de g, pour tout réel strictement positif x.

3. La variable x, initialement égale à 2, augmente de 12 %. À l'aide d'un calcul approché, déterminer la variation relative de $g(x)$ liée à cette augmentation.

4. On suppose que x passe de 4 à 3,2. De quel pourcentage approximatif varie alors $g(x)$?

5. Quelles sont les valeurs du réel x pour lesquelles $e_g(x)$ vaut 1 ?

Exercice 3 [6,5 points]

Soit f la fonction de deux variables réelles définie par $f(x\,;y) = \ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)$.

1.a. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté D. Tracer D sur l'ANNEXE.
1.b. L'ensemble D est-il une partie convexe de $\mathbb{R}^2$? Justifier.
1.c. *Sans justifier*, dire si D est ouvert, fermé, compact.

2.a. Expliquer pourquoi f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
2.b. Calculer les expressions des fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en les simplifiant au maximum.

3. Déterminer la courbe de niveau 0 de f.

Exercice 4 [4,5 points]

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $A = (5\,;3)$, $B = (-3\,;-1)$ et $C = (2\,;4)$.
Le but de l'exercice est de déterminer une équation du cercle passant par A, B et C.

1.a. Donner les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
1.b. Donner une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par I et perpendiculaire à (AB).

2. Expliquer pourquoi la droite $\mathscr{D}'$ perpendiculaire à (BC) et passant par le milieu de $[BC]$ a pour équation $x + y - 1 = 0$.

3. Montrer que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ se coupent en un point Ω dont les coordonnées sont $(2\,;-1)$.

4. Donner une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon ΩA.

5. Vérifier que les points A, B et C appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

6. Quel nom particulier donne-t-on au cercle passant par trois points non alignés de $\mathbb{R}^2$?

Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1^{er} **cycle**

CORRECTION

Exercice 1

1. La dérivée de φ vérifie $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{8+x^2}}$ pour tout réel x.

Si φ' s'annulait, il existerait donc un réel x vérifiant :

$$1 = \frac{x}{\sqrt{8+x^2}},$$

c'est-à-dire tel que :

$$\sqrt{8+x^2} = x.$$

En élevant au carré , nous obtiendrions :

$$8 + x^2 = x^2,$$

ce qui est manifestement impossible.

$$\boxed{\text{La dérivée de } \varphi \text{ ne s'annule donc jamais.}}$$

Si φ admettait un extremum en un réel a, alors a serait un point critique de φ, or nous venons de montrer que φ n'admet aucun point critique puisque φ' ne s'annule pas.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ n'admet donc aucun extremum sur } \mathbb{R}.}$$

2.a. Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il existe une fonction ε qui vérifie, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) + (x-1)\varepsilon(x-1), \text{ avec } \lim_{x\to 1} \varepsilon(x-1) = 0.$$

En remplaçant les valeurs $\varphi(1)$ et $\varphi'(1)$, nous obtenons :

$$\boxed{\varphi(x) = -2 + \frac{2}{3}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x-1), \text{ avec } \lim_{x\to 1} \varepsilon(x-1) = 0.}$$

2.b. Lorsque x est un réel proche de 1, il est possible de négliger le reste du développement limité précédent et d'écrire :

$$\varphi(x) \approx -2 + \frac{2}{3}(x-1).$$

En particulier, nous obtenons :

$$\varphi(1{,}09) \approx -2 + \frac{2}{3} \times 0{,}09.$$

Tous calculs effectués :

$$\boxed{\varphi(1{,}09) \approx -1{,}94.}$$

2.c. Une équation de la tangente demandée se lit dans le développement limité précédent, en conservant les termes d'ordre 0 et d'ordre 1. Nous obtenons :

$$y = -2 + \frac{2}{3}(x-1),$$

ce que l'on peut simplifier en :

$$\boxed{y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}.}$$

Exercice 2

1. La fonction inverse est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, nous pouvons donc affirmer que $x \mapsto e^{\frac{-1}{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

D'autre part, $x \mapsto 1+x$ est une fonction affine : elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$. Finalement, par produit :

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0\,;+\infty[.}$$

2. Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, nous avons, après quelques calculs non détaillés ici :

$$g'(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}.$$

Ainsi, l'élasticité de g est définie pour tout x de $]0\,;+\infty[$ par :

$$\boxed{e_g(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+x}.}$$

3. Nous savons qu'il est possible d'écrire, si h est un réel proche de 0 :

$$\frac{g(2+h)-g(2)}{g(2)} \approx e_g(2) \times \frac{2+h-2}{2}.$$

Avec les données de l'énoncé, nous avons donc :

$$\frac{g(2+12\,\% \times 2)-g(2)}{g(2)} \approx e_g(2) \times 12\,\%,$$

et donc :

$$\frac{g(2+12\,\% \times 2)-g(2)}{g(2)} \approx \frac{7}{6} \times 12\,\%,$$

pour finalement obtenir :

$$\frac{g(2+12\,\% \times 2)-g(2)}{g(2)} \approx 14\,\%.$$

$$\boxed{\text{Si } x \text{ augmente de } 12\,\% \text{ à partir de 2, alors } g(x) \text{ augmente de } 14\,\% \text{ environ.}}$$

4. De même qu'à la question précédente, nous avons :

$$\frac{g(3{,}2) - g(4)}{g(4)} \approx e_g(4) \times \frac{3{,}2 - 4}{4},$$

et donc :

$$\frac{g(3{,}2) - g(4)}{g(4)} \approx \frac{21}{20} \times (-20\,\%),$$

d'où finalement :

$$\frac{g(3{,}2) - g(4)}{g(4)} \approx -21\,\%.$$

$$\boxed{\text{Si } x \text{ passe de 4 à 3,2, alors } g(x) \text{ diminue de } 21\,\% \text{ environ.}}$$

5. D'après la question **2.**, si un réel x vérifie $e_g(x) = 1$, alors il vérifie :

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x.$$

En simplifiant, nous obtenons :

$$1 = 0.$$

$$\boxed{\text{Il n'existe donc aucun réel } x \text{ satisfaisant l'égalité } e_g(x) = 1.}$$

Exercice 3

1.a. À cause du logarithme népérien et du quotient, l'ensemble D est :

$$\boxed{D = \left\{ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0 \text{ et } 1 + \frac{y}{x} > 0 \right\},}$$

qu'il est intéressant de réécrire :

$$D = \left\{ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0 \text{ et } \frac{x+y}{x} > 0 \right\}.$$

Afin d'étudier le signe du quotient, on étudie le signe du dénominateur et du numérateur. De manière plus précise, si x et y sont deux réels tels que $x \neq 0$, nous avons :

$$\frac{x+y}{x} > 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} x + y > 0 \text{ et } x > 0 \\ \text{ou} \\ x + y < 0 \text{ et } x < 0. \end{array} \right.$$

Afin de représenter D, il suffit donc de tracer les droites d'équations respectives $y = -x$ et $x = 0$ et de se placer dans les demi-plans correspondant aux inéquations.

1.b. Supposons que D soit une partie convexe de $\mathbb{R}^2$. Nous avons :

$$1 \neq 0 \text{ et } 1 + \frac{0}{1} > 0 \text{ donc } (1\,;0) \text{ est dans } D,$$

$$-1 \neq 0 \text{ et } 1 + \frac{0}{-1} > 0 \text{ donc } (-1\,;0) \text{ est dans } D.$$

Comme D est supposé convexe, le segment joignant les deux points précédents doit être inclus dans D ; en particulier, le milieu $(0\,;0)$ de ce segment doit appartenir à D, or ce n'est pas le cas puisque nous n'avons pas $0 \neq 0$. $\boxed{\text{L'ensemble } D \text{ n'est pas convexe.}}$

1.c. $\boxed{\text{L'ensemble } D \text{ n'est ni fermé, ni compact. Il est ouvert.}}$

2.a. La fonction $(x\,;y) \mapsto 1+\dfrac{y}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D comme fraction rationnelle ; de plus, si $(x\,;y)$ est dans D, alors $1+\dfrac{y}{x}$ est dans $]0\,;+\infty[$. D'autre part, la fonction logarithme népérien est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$. Par composition, nous pouvons affirmer :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } D.}$$

2.b. Pour tout $(x\,;y)$ de D, nous avons, après calculs et simplification :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y) = \frac{-y}{x(x+y)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y) = \frac{1}{x+y}.}$$

3. Par définition, la courbe de niveau 0 de f est l'ensemble noté $\mathcal{C}_0$ et défini par :

$$\mathcal{C}_0 = \{(x\,;y) \in D,\ f(x\,;y) = 0\}\,.$$

Il est possible de réécrire cet ensemble des façons suivantes :

$$\mathcal{C}_0 = \left\{(x\,;y) \in D,\ \ln\left(1+\frac{y}{x}\right) = 0\right\} \quad \text{puis} \quad \mathcal{C}_0 = \left\{(x\,;y) \in D,\ 1+\frac{y}{x} = 1\right\},$$

$$\text{puis } \mathcal{C}_0 = \left\{(x\,;y) \in D,\ \frac{y}{x} = 0\right\} \quad \text{et enfin} \quad \mathcal{C}_0 = \{(x\,;y) \in D,\ y = 0\}\,.$$

$$\boxed{\text{La courbe de niveau 0 de } f \text{ est la droite d'équation } y = 0 \text{ privée du point } (0\,;0).}$$

Exercice 4

1.a. Comme I est le milieu de $[AB]$, nous pouvons écrire $I = \dfrac{A+B}{2}$. De là :

$$I = \left(\frac{5-3}{2}\,;\frac{3-1}{2}\right).$$

$$\boxed{\text{Le point } I \text{ a pour coordonnées } (1\,;1).}$$

1.b. La droite $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. En notant $M = (x\,;y)$, on a :

$$\overrightarrow{IM} = (x-1\,;y-1) \text{ et } \overrightarrow{AB} = (-8\,;-4).$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\mathscr{D} = \left\{M \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0\right\}.$$

$$\mathscr{D} = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ -8(x-1)-4(y-1) = 0\right\}.$$

Après calculs et simplification :

$$\boxed{\mathscr{D} = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ -2x-y+3 = 0\}\,.}$$

2. Comme $\mathscr{D}'$ est perpendiculaire à (BC), le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}'$, or nous avons $\overrightarrow{BC} = (5\,;5)$. Une équation de la droite $\mathscr{D}'$ est donc de la forme :

$$5x + 5y + c = 0,$$

où c est un réel que l'on détermine en invoquant que le milieu de $[BC]$ appartient à $\mathscr{D}'$. Le milieu de $[BC]$ étant égal à $\left(\frac{-1}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$, nous avons :

$$5 \times \frac{-1}{2} + 5 \times \frac{3}{2} + c = 0,$$

c'est-à-dire :

$$c = -5.$$

En simplifiant par 5, nous obtenons :

$$\boxed{\text{une équation de } \mathscr{D}' \text{ est } x + y - 1 = 0.}$$

3. Un point $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ appartient à la fois à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} -2x - y + 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0, \end{cases}$$

donc si, et seulement si :

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ x - 2x + 3 - 1 = 0. \end{cases}$$

Après calculs :

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 2. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ce qu'il fallait démontrer.}}$$

4. Le rayon du cercle $\mathscr{C}$ est égal à la distance ΩA, qui vaut :

$$\Omega A = \sqrt{(5-2)^2 + (3-(-1))^2}.$$

Le rayon R de $\mathscr{C}$ vérifie donc :

$$R = 5.$$

$$\boxed{\text{Une équation de } \mathscr{C} \text{ est donc } (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5^2.}$$

5. Il suffit de montrer que les coordonnées respectives des points A, B et C vérifient l'équation de $\mathscr{C}$. Nous avons :

$$\begin{cases} (5-2)^2 + (3+1)^2 = 25 \\ (-3-2)^2 + (-1+1)^2 = 25 \\ (2-2)^2 + (4+1)^2 = 25. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le cercle passant par } A,\ B \text{ et } C \text{ est donc bien le cercle } \mathscr{C}\ .}$$

6. Nous savons depuis le collège (*sic !*) que le cercle passant par trois points non alignés du plan est $\boxed{\text{le cercle circonscrit au triangle formé par ces points.}}$