

TRAVAIL AUTONOME : EXERCICES SUR LE CHAPITRE 11

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $A = (-1; -2; 3)$, $B = (5; 0; -1)$ et $C = (4; 5; 7)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis celles du vecteur $2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BC}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 2

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

On note A et B les points de coordonnées respectives $(2; 3; 0)$ et $(-1; 3; 1)$.

On définit les vecteurs $\vec{u} = (-1; 0; -1)$ et $\vec{v} = (2; -1; 1)$.

1. Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$.
2. Donner une équation du plan $\mathcal{P}'$ passant par B et de vecteur normal $\vec{v}$.
3. Calculer la norme du vecteur $\vec{v}$.
4. Calculer la distance AB .

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $\vec{a} = (2; -2; 4)$, $\vec{b} = (-6; 0; 3)$ et $\vec{c} = (1; -7; 2)$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont orthogonaux à $\vec{b}$.
2. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{b} + \vec{c}$?

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (-1; 0; 2)$, $v = (4; 0; 1)$.

1. Calculer $\|u\|$ et $\|v\|$, ainsi que le produit scalaire de u par v .
2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est-elle vérifiée ?

Exercice 5

1. Déterminer les valeurs du réel λ pour lesquelles $u = (2; 1; 1 - \lambda)$ et $v = (1; -1; -\lambda + 1)$ sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

2. Même question pour les vecteurs $u = (0; 1; \lambda)$ et $v = (1; 0; 0)$.

3. Même question pour les vecteurs $u = (1; 2; \lambda)$ et $v = (0; -2; \lambda)$.

Exercice 6

Déterminer les valeurs du réel λ pour lesquelles $\vec{u} = (1; 2\lambda + 2)$ et $\vec{v} = (-4; -\lambda + 1)$ sont colinéaires dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$; on note $A = (1; 2)$, $B = (-1; 0)$ et $C = (1; -1)$.

1. Calculer $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC})$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont-ils colinéaires?
3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Exercice 8

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Tracer la droite d'équation $y = 2x + 1$.
2. Représenter les points $A = (1; 2)$ et $B = (5; 0)$ puis donner une équation de la droite passant par ces points.

Exercice 9

On note D l'ensemble $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x + 3y - 5 = 0\}$.

1. Montrer que D est une droite dont on donnera un point et un vecteur directeur.
2. Représenter graphiquement la droite D .

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^3$, on note A le point $(1; 0; -2)$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $z = 4$.

1. Donner une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre A et de rayon 2.
2. Le point I de coordonnées $(1; 0; 0)$ appartient-il à $\mathcal{S}$?
3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AI}$ est orthogonal à $\mathcal{P}$.

Exercice 11

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $(-2; -2)$ et dont un vecteur normal est $(-1; 1)$.
2. Donner une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
3. Montrer que l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est réduit à deux points dont on donnera les coordonnées.

Exercice 1

1. On a $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$$\vec{u} = B - A$$

$$\vec{u} = (5; 0; -1) - (-1; -2; 3)$$

De là : $\boxed{\vec{u} = (6; 2; -4)}$

On a successivement :

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BC}$$

$$\vec{v} = 2(6; 2; -4) - 2(5; 7; 4) + 3(-1; 5; 8)$$

car $\overrightarrow{AC} = C - A$ et $\overrightarrow{BC} = C - B$

$$\vec{v} = (12; 4; -8) - (10; 14; 8) + (-3; 15; 24)$$

Conclusion : $\boxed{\vec{v} = (-1; 5; 8)}$

2. On a $\overrightarrow{AC} = (5; 7; 4)$

et $\overrightarrow{CB} = (1; -5; -8)$

Ainsi : $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \rangle = 5 \times 1 + 7 \times (-5) + 4 \times (-8)$

$$\underline{\underline{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \rangle = -62}}$$

Le produit scalaire de $\overrightarrow{AC}$ par $\overrightarrow{CB}$ est
non nul : $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont pas orthogonaux.

Exercice 2

1. On a successivement :

$$\mathcal{P} = \{ M \in \mathbb{R}^3, \quad \langle \overrightarrow{AM}, \vec{u} \rangle = 0 \}$$

$$\mathcal{P} = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, (x-2) \times (-1) + (y-3) \times 0 + z \times (-1) = 0 \}$$

$$\text{car } \overrightarrow{AM} = (x-2; y-3; z)$$

De là

$$\boxed{\mathcal{P} = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, -x - z + 2 = 0 \}}$$

Autre méthode : si $\vec{n} = (a, b, c)$ est un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$, alors ce plan admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où seul le réel d reste à déterminer. Ainsi, on est assuré que $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $-x - z + d = 0$, car $\vec{u} = (-1; 0; -1)$ est normal à $\mathcal{P}$. De plus, $A \in \mathcal{P}$; donc $-2 - 0 + d = 0$, i.e. $d = +2$. Il en
la conclusion.

2. On a successivement :

$$\mathcal{P}' = \{ M \in \mathbb{R}^3, \quad \langle \overrightarrow{BM}, \vec{n} \rangle = 0 \}$$

$$\mathcal{P}' = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x+1) \times 2 + (y-3) \times (-1) + (z-1) \times 1 = 0 \}$$

$$\text{car } \overrightarrow{BM} = (x+1; y-3; z-1)$$

$$\boxed{\mathcal{P}' = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - y + z + 4 = 0 \}}$$

après calculs.

3. On a $\| \vec{n} \| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}$

$$\| \vec{n} \| = \sqrt{4 + 1 + 1}$$

$$\boxed{\| \vec{n} \| = \sqrt{6}}$$

4. La distance AB est

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 1^2}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{10}}$$

Exercice 3

1. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul, or on a

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2 \times (-6) + (-2) \times 0 + 4 \times 3$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -12 + 12$$

$$\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0}$$

De la même façon, il vient :

$$\langle \vec{c}, \vec{b} \rangle = 1 \times (-6) + (-7) \times 0 + 2 \times 3$$

$$\langle \vec{c}, \vec{b} \rangle = -6 + 6$$

$$\boxed{\langle \vec{c}, \vec{b} \rangle = 0}$$

Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont donc orthogonaux
au vecteur $\vec{b}$.

2. On a $\vec{b} + \vec{c} = (-6; 0; 3) + (1; -7; 2)$

$$\boxed{\vec{b} + \vec{c} = (-5; -7; 5)}$$

Exercice 4

1. On a, d'une part :

$$\bullet \|u\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2}$$

$$\boxed{\|u\| = \sqrt{5}}$$

$$\bullet \|v\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 1^2}$$

$$\boxed{\|v\| = \sqrt{17}}$$

D'autre part :

$$\langle u, v \rangle = (-1) \times 4 + 0 \times 0 + 2 \times 1$$

$$\boxed{\langle u, v \rangle = -2}$$

2. On remarque

$$2 \leq \sqrt{5} \times \sqrt{17}, \quad \text{car } 4 \leq 5 \times 17$$

d'où

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \times \|v\|$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est donc vérifiée.

Exercice 5

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a successivement, en notant $u \perp v$ pour « u et v sont orthogonaux » :

$$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

$$u \perp v \Leftrightarrow 2 \times 1 + 1 \times (-1) + (1 - \lambda) \times (-\lambda + 1) = 0$$

$$u \perp v \Leftrightarrow 2 - 1 + (-\lambda) + 1 + \lambda^2 - \lambda = 0$$

$$\underline{\underline{u \perp v \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0}}$$

Le trinôme $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ admet un discriminant Δ égal à $\Delta = 4 - 4 \times 2 < 0$, donc il est strictement positif pour tout réel λ .

Par suite : il n'existe aucun réel λ pour lequel u et v sont orthogonaux.

2. Pour tout réel λ , on a

$$\langle u, v \rangle = 0 \times 1 + 1 \times 0 + \lambda \times 0$$

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Conclusion : toute valeur de λ satisfait la propriété d'orthogonalité de u et v .

3. Soit λ dans $\mathbb{R}$.

Il vient successivement :

$$u \perp v \Leftrightarrow 1 \times 0 + 2 \times (-2) + \lambda^2 = 0$$

$$u \perp v \Leftrightarrow \lambda^2 = 4$$

$$u \perp v \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = -2$$

les vecteurs u et v sont donc orthogonaux si, et seulement si, λ est dans $\{-2; 2\}$.

Exercice 6

Soit λ dans $\mathbb{R}$.

$$\text{On a } \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2\lambda+2 & -\lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \times (-\lambda+1) - (2\lambda+2) \times (-4)$$

$$\underline{\underline{\det(\vec{u}, \vec{v}) = 7\lambda + 9}} \quad \text{après calculs}$$

on sait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

De là : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\boxed{\lambda = \frac{-9}{7}}$.

Exercice 7

1. On a $\vec{AB} = (-2; -2)$

et $\vec{BC} = (2; -1)$

Ainsi, $\det(\vec{AB}, \vec{BC}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$

$$\det(\vec{AB}, \vec{BC}) = (-2) \times (-1) - (-2) \times 2$$

$$\underline{\underline{\det(\vec{AB}, \vec{BC}) = 6}}$$

2. Le déterminant de $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ est non nul: les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ ne sont donc pas colinéaires.

3. On a $\vec{OB} = B = (-1; 0)$

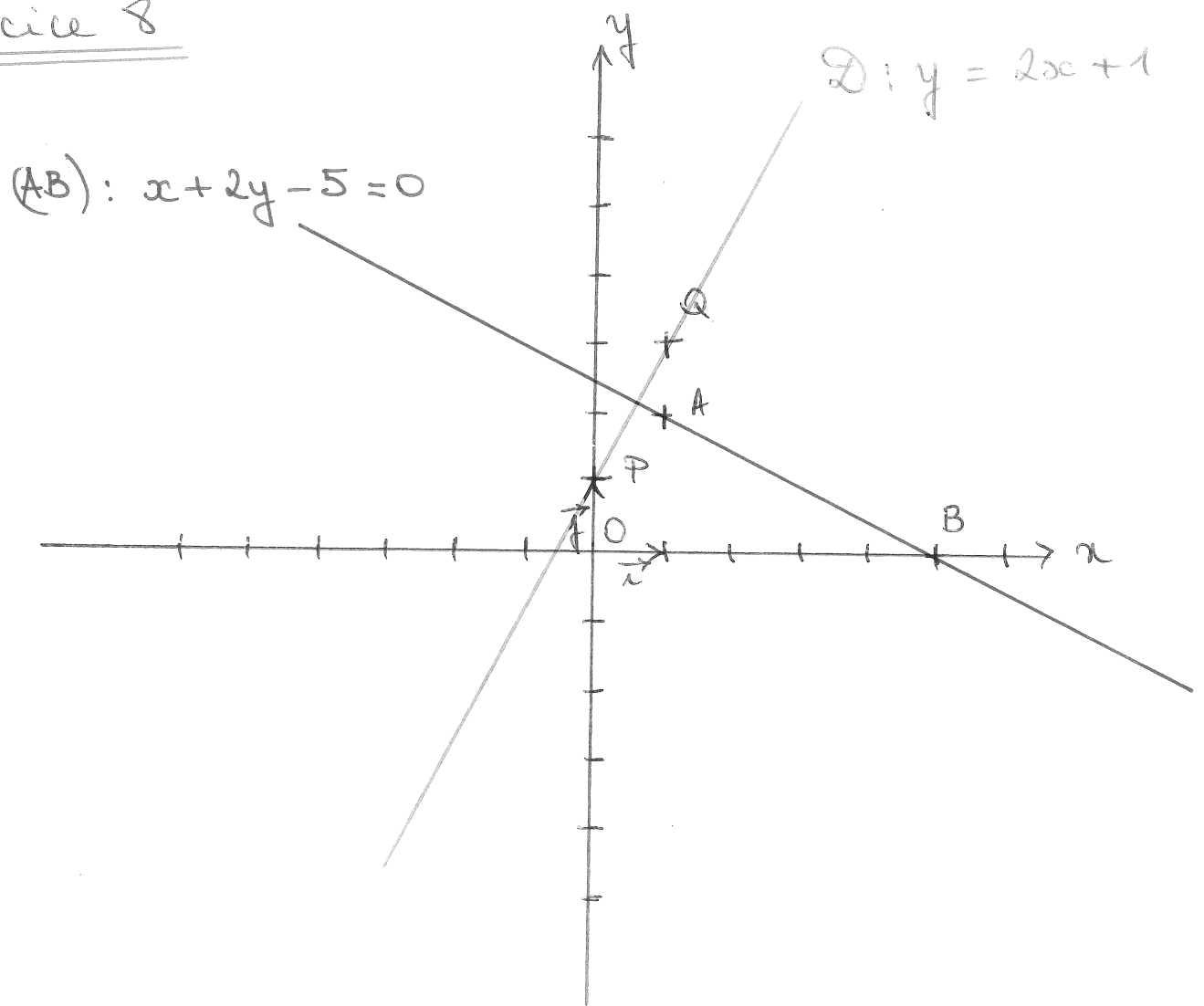
et $\vec{AC} = C - A = (0; -3)$

Ainsi: $\langle \vec{OB}, \vec{AC} \rangle = (-1) \times 0 + 0 \times (-3)$

$$\boxed{\langle \vec{OB}, \vec{AC} \rangle = 0}$$

les vecteurs $\vec{OB}$ et $\vec{AC}$ sont donc orthogonaux.

Exercice 8



1. La droite D d'équation $y = 2x + 1$ passe par les points $P = (0; 1)$ et $Q = (1; 3)$ car $1 = 2 \times 0 + 1$ et $3 = 2 \times 1 + 1$.

2. La droite (AB) est l'ensemble

$$(AB) = \{ M \in \mathbb{R}^2, \det(\vec{AM}, \vec{AB}) = 0 \}$$

$$(AB) = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, \begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ y-2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

puisque $\overrightarrow{AM} = M - A = (x-1; y-2)$

et $\overrightarrow{AB} = B - A = (4; -2)$

De là, après calculs:

$$(AB) = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, -2x - 4y + 10 = 0 \}$$

$$(AB) = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, x + 2y - 5 = 0 \}$$

Exercice 9

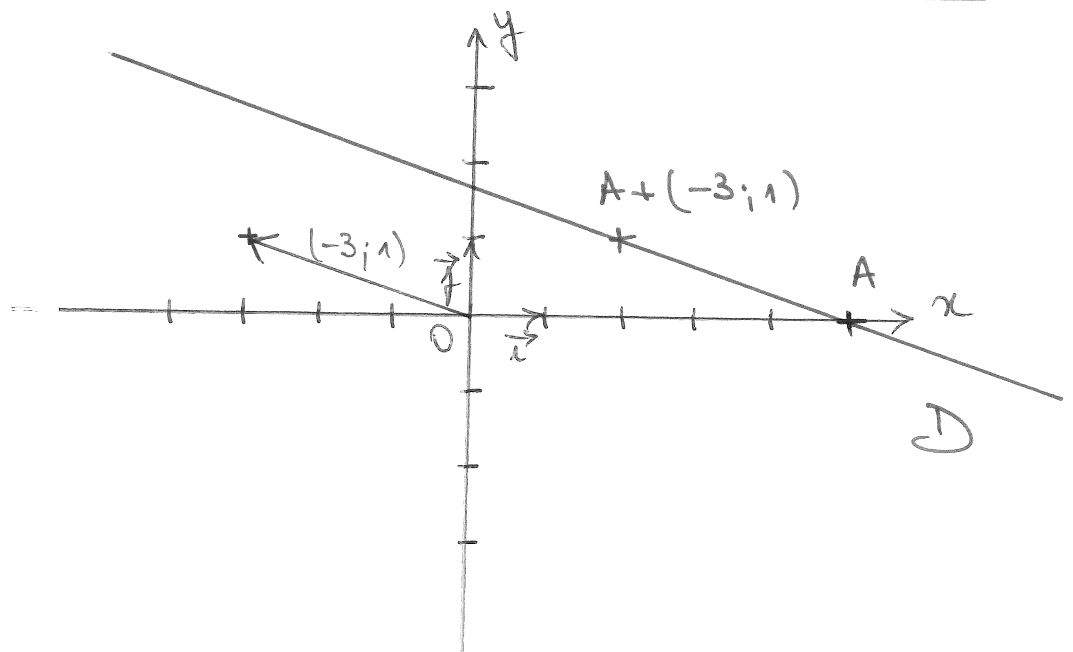
Soit $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x + 3y - 5 = 0\}$

1. On sait que l'ensemble des points $(x; y)$ du plan vérifiant $ax + by + c = 0$, où a, b et c sont des réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$, est une droite de vecteur directeur $(-b; a)$.

Ainsi, D est une droite de vecteur directeur $(-3; 1)$.

De plus, on a $5 + 3 \times 0 - 5 = 0$ donc le point $A = (5; 0)$ est un point de D .

2.



Exercice 10

1. On a successivement :

$$\mathcal{S} = \{ M \in \mathbb{R}^3, \quad AM = 2 \}$$

$$\mathcal{S} = \{ M \in \mathbb{R}^3, \quad AM^2 = 4 \}$$

$$\mathcal{S} = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4 \}$$

$$\text{car } AM^2 = (x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-(-2))^2$$

2. Le point I est dans $\mathcal{S}$ puisque

$$(1-1)^2 + 0^2 + (0+2)^2 = \underline{\underline{4}}.$$

3. On a : $\overrightarrow{AI} = I - A$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{AI} = (0; 0; 2)}}$$

De plus, un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\underline{\underline{\vec{n} = (0; 0; 1)}}$. Comme $\overrightarrow{AI}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{AI}$ est bien orthogonal au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 11

1. On a, successivement :

$$\mathcal{D} = \{ M \in \mathbb{R}^2, \quad \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n} \rangle = 0 \}$$

$$\text{ou } \underline{A = (-2; -2)} \text{ et } \underline{\overrightarrow{n} = (-1; 1)}$$

$$\mathcal{D} = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x+2) \times (-1) + (y+2) \times 1 = 0 \}$$

$$\mathcal{D} = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad -x + y = 0 \}$$

$$\boxed{\mathcal{D} = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = x \}}$$

2. De même, on a :

$$\mathcal{C} = \{ M \in \mathbb{R}^2, \quad OM = \sqrt{2} \}$$

$$\boxed{\mathcal{C} = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 = 2 \}}$$

$$\text{car } OM = \|M\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3. soit $(x; y)$ dans $\mathbb{R}^2$. On a :

$$(x; y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$(x; y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 = 2 \end{cases}$$

$$(x, y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

$$(x, y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \Leftrightarrow (x, y) \in \{(1, 1), (-1, -1)\}$$

De lá

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{(1, 1), (-1, -1)\}$$

