Exercice 1

Déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles les vecteurs $(-1\,;2\,;3)$ et $(a\,;a+1\,;a-2)$ sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ d'équation $y = x$.

Exercice 3

Indiquer, **sans justification**, si les deux ensembles suivants sont OUI ou NON des ouverts, des fermés, des bornés, des compacts ou des convexes de $\mathbb{R}^2$. *Un dessin peut être très utile.*

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2 = 1\}$					
$\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$					

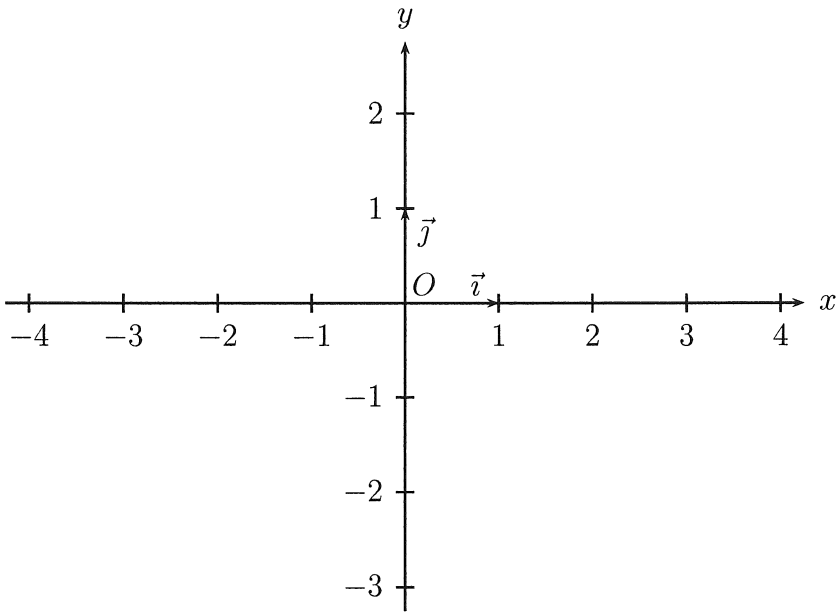
Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^2$, on note D la droite passant par le point $(2\,;-2)$ et de vecteur normal $(1\,;1)$.
De plus, on pose $E = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant 0\}$.

1. Donner une équation cartésienne de la droite D.

2. On note F l'ensemble E privé de D. Représenter graphiquement l'ensemble F ; indiquer, de manière claire, les bords du domaine qui appartiennent à F.

3. Démontrer rigoureusement que F n'est pas un convexe de $\mathbb{R}^2$.



Exercice 1

Soit a dans $\mathbb{R}$. Les vecteurs $(-1;2;3)$ et $(a;a+1;a-2)$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\langle(-1;2;3);(a;a+1;a-2)\rangle=0$, i.e. $-a+2(a+1)+3(a-2)=0$; ou encore, après calculs, $a=1$.

Les vecteurs en question sont donc orthogonaux si, et seulement si, $a=1$.

Exercice 2

Un vecteur normal à un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$, où a, b, c et d sont des réels tels que $(a;b;c)\neq(0;0;0)$, est $\vec{n}=(a;b;c)$.

P a ici une équation de la forme $x-y=0$ donc un vecteur normal à P est $(1;-1;0)$.

Exercice 3

On a le tableau suivant.

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2 = 1\}$	NON	OUI	OUI	OUI	NON
$\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$	NON	OUI	NON	NON	NON

Exercice 4

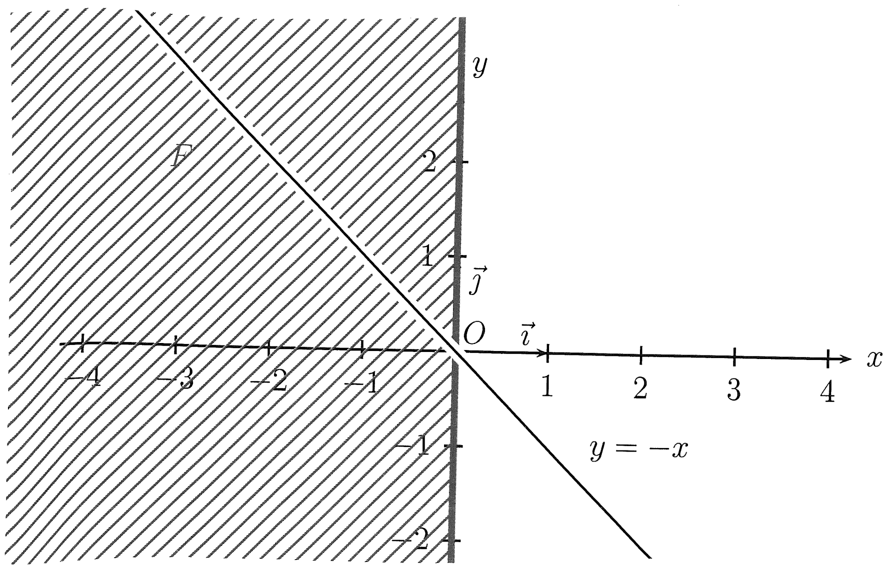
1. $D = \{ M \in \mathbb{R}^2, \ \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0 \}$

où $A = (2\,;-2)$ et $\vec{n} = (1\,;1)$

Donc $D = \{ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2, \ (x-2)\times 1 + (y+2)\times 1 = 0 \}$

$$\boxed{D = \{ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2, \ y = -x \}}$$

2. Une représentation de F est :



3. Les points $A = (-1;0)$ et $B = (-1;2)$ sont dans F car $-1 \leq 0$ et car $1 \neq 0$ et $1 \neq 2$.

Si F était convexe, alors le segment $[AB]$ serait inclus dans F, or ce n'est pas le cas car le milieu I de $[AB]$ n'appartient pas à F. En effet, on a

$$I = \frac{A+B}{2} = (-1;1)$$ or $1 = 1$ donc

I appartient à D et donc I n'est pas dans F.

Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 1

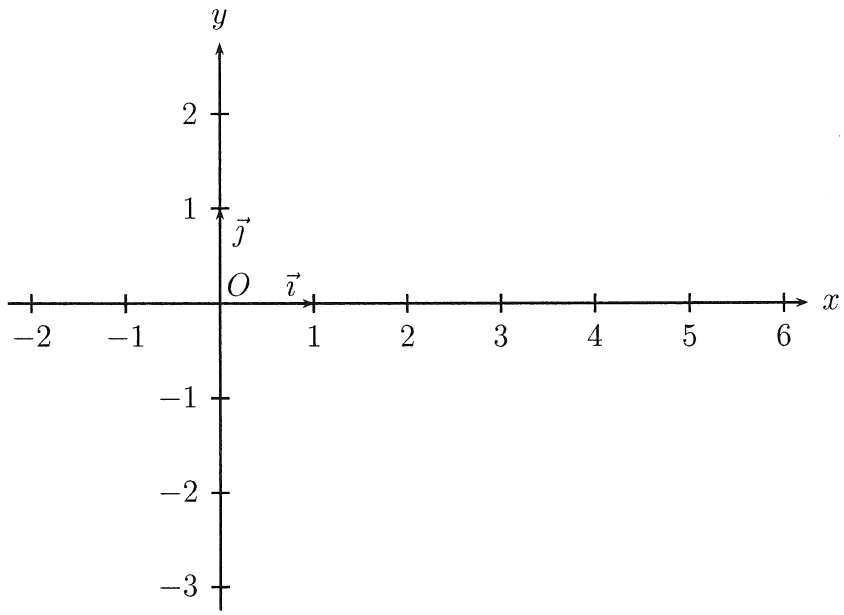
Dans tout l'exercice, on se place dans $\mathbb{R}^2$.
On note $E_1 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 4x\}$ et $E_2 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, (x-2)^2 + (y+1)^2 < 1\}$.

1. Quelle est la nature de l'ensemble E_1 ? Préciser ses éléments caractéristiques.

2. Représenter ci-dessous l'ensemble $E_1 \setminus E_2$ en indiquant, de manière claire, les bords du domaine qui appartiennent à l'ensemble.

3. Démontrer, en le justifiant très précisément, que $E_1 \setminus E_2$ n'est pas un convexe de $\mathbb{R}^2$.

4. Démontrer, en le justifiant très précisément, que $E_1 \setminus E_2$ est un borné de $\mathbb{R}^2$.



Exercice 2

Indiquer, **sans justification**, si les deux ensembles suivants sont OUI ou NON des ouverts, des fermés, des bornés, des compacts ou des convexes de $\mathbb{R}^2$. *Un dessin peut être très utile.*

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leqslant x \leqslant 2\}$					
$\mathbb{R} \times [3\,;4[$					

Exercice 3

Calculer la norme du vecteur $\left(-1\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1

1. Pour tout $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$, on a :

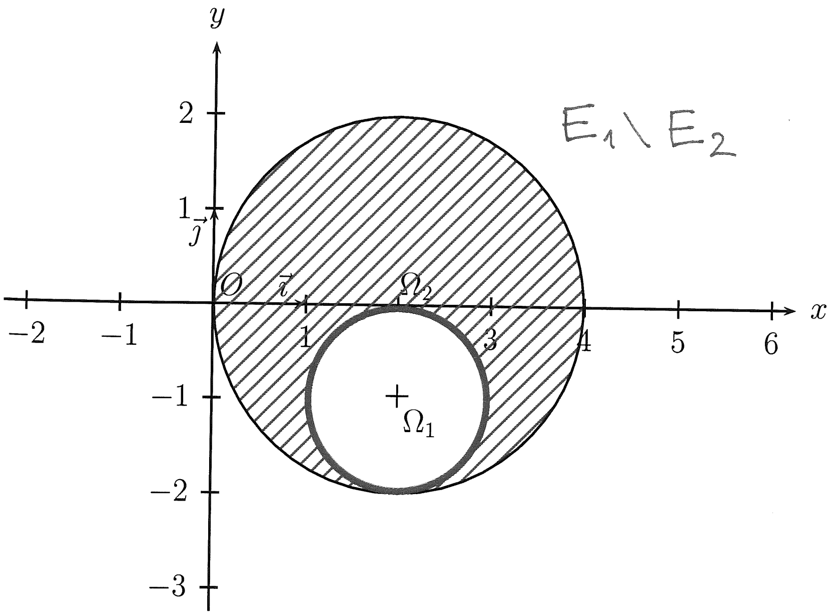
$$x^2+y^2 \leq 4x \iff x^2-4x+y^2 \leq 0$$

$$x^2+y^2 \leq 4x \iff (x-2)^2-4+y^2 \leq 0$$

$$x^2+y^2 \leq 4x \iff (x-2)^2+y^2 \leq 2^2$$

$$\boxed{E_1 \text{ est donc la boule fermée } \overline{B}((2;0),2).}$$

2. Une représentation de $E_1 \setminus E_2$ est :



3. Les points $(1;-1)$ et $(3;-1)$ sont dans $E_1 \setminus E_2$.

En effet :

$$\begin{cases} (1;-1) \in E_1 & \text{car} \quad 1^2+(-1)^2 = 2 \leq 4\times 1 \\ (1;-1) \notin E_2 & \text{car} \quad (1-2)^2+(-1+1)^2 = 1 \geq 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3;-1) \in E_1 & \text{car} \quad 3^2+(-1)^2 = 10 \leq 4\times 3 \\ (3;-1) \notin E_2 & \text{car} \quad (3-2)^2+(-1+1)^2 = 1 \geq 1. \end{cases}$$

Si $E_1 \setminus E_2$ était un convexe de $\mathbb{R}^2$, alors le segment reliant les points $(1;-1)$ et $(3;-1)$ serait inclus dans $E_1 \setminus E_2$. Cela est faux puisque le milieu $(2;-1)$ de ce segment n'est pas dans $E_1 \setminus E_2$: en effet, $(2-2)^2+(-1+1)^2<1$ donc $(2;1)$ est dans E_2.

$$\boxed{\text{Conclusion : } E_1 \setminus E_2 \text{ n'est pas convexe.}}$$

4. Soit $(x;y)$ dans $E_1 \setminus E_2$.

On a alors $(x;y)$ dans E_1.

Ainsi : $(x;y) \in \overline{B}((2;0),2)$ d'après la question 1.

$$\boxed{\text{Conclusion : } E_1 \setminus E_2 \text{ est inclus dans une boule donc } E_1 \setminus E_2 \text{ est un borné de } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 2

On a le tableau suivant.

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leqslant x \leqslant 2\}$	NON	OUI	NON	NON	OUI
$\mathbb{R} \times [3\,;4[$	NON	NON	NON	NON	OUI

Exercice 3

Si $\vec{u} = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$,

alors la norme $\|\vec{u}\|$ de $\vec{u}$ est $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Conclusion :

$$\left\|\left(-1\,;1\,;\frac{1}{2}\right)\right\| = \sqrt{(-1)^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$\left\|\left(-1\,;1\,;\frac{1}{2}\right)\right\| = \frac{3}{2}$ après calculs.

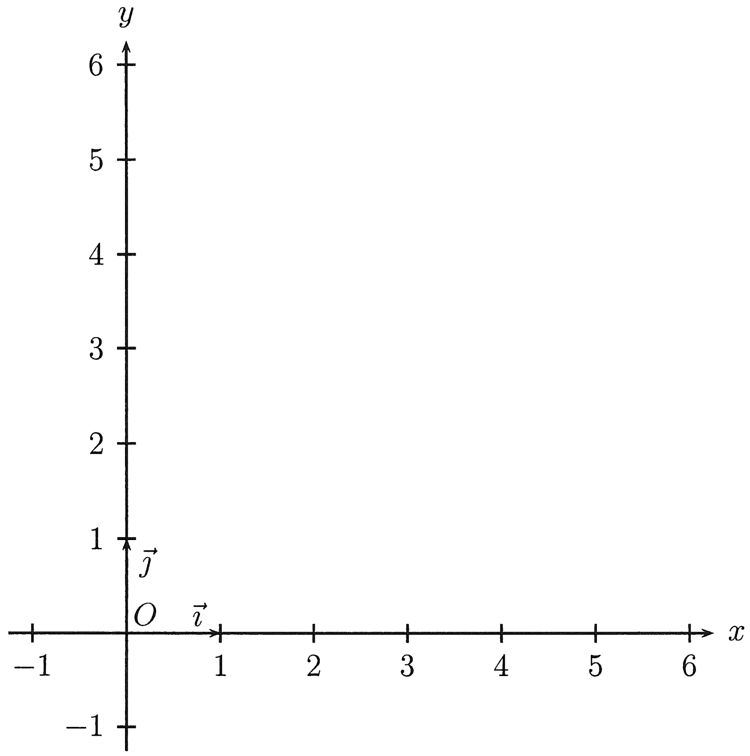
Exercice 1

On se place dans $\mathbb{R}^2$.

1. Dessiner l'ensemble $\mathcal{D}$, défini comme étant l'ensemble des points qui sont à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$ (bords non compris) et à l'extérieur de la boule fermée de centre Ω et de rayon 1. On prendra les données $A = (1\,;0)$, $B = (1\,;3)$, $C = (3\,;5)$, $D = (4\,;1)$ et $\Omega = (2\,;2)$.

2. Définir l'ensemble $\mathcal{D}$ par des inéquations.

3. Démontrer, de manière précise, que $\mathcal{D}$ n'est pas convexe.



Exercice 2

On admet que l'ensemble $\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Démontrer alors, de manière précise, qu'il s'agit d'un compact de $\mathbb{R}^2$.

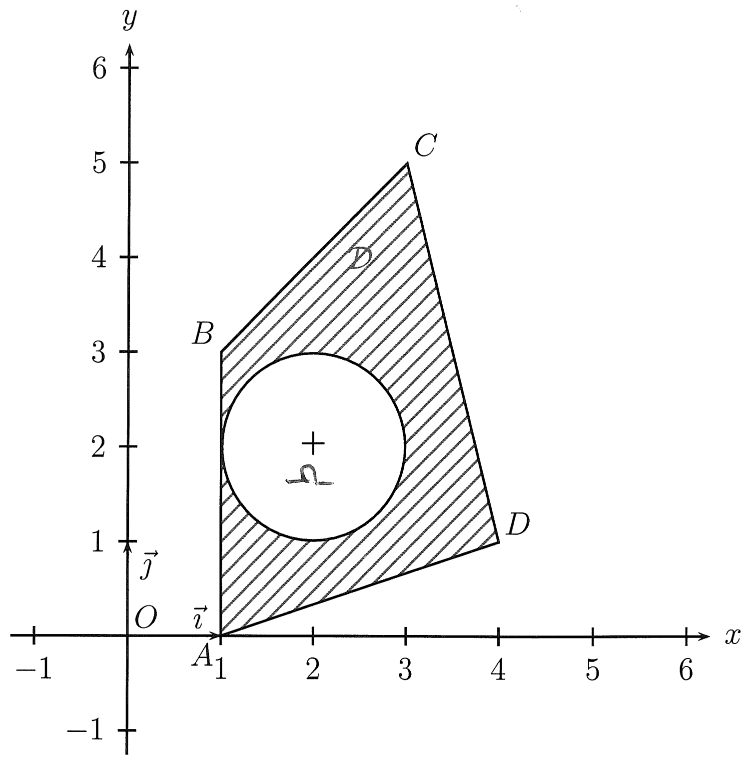
Exercice 3

Indiquer, **sans justification**, si les deux ensembles suivants sont OUI ou NON des ouverts, des fermés, des bornés, des compacts ou des convexes de $\mathbb{R}^2$. *Un dessin peut être très utile.*

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, 2x - 3y + 1 < 0\}$					
$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;1), (1\,;0)\}$					

Exercice 1

1. Une représentation de $\mathcal{D}$ est la suivante.



2. On détermine des équations pour les droites (AB), (BC), (CD) et (DA). On a :

$$(AB) = \{ M \in \mathbb{R}^2, \ \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \}$$

$$(AB) = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \ \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ y & 3 \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

$$(AB) = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \ 3(x-1) = 0 \}$$

$$\boxed{(AB) = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \ x = 1 \}.}$$

$(BC) = \{ M \in \mathbb{R}^2, \ \det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = 0 \}$

$(BC) = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \ \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y-3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \}$

$\boxed{(BC) = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \ x - y + 2 = 0 \}}$ après calculs

D'autre part :

$(CD) = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \ \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ y-5 & -4 \end{vmatrix} = 0 \}$

$\boxed{(CD) = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \ -4x - y + 17 = 0 \}}$ après calculs.

Enfin :

$(DA) = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \ \begin{vmatrix} x-4 & -3 \\ y-1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \}$

$\boxed{(DA) = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \ -x + 3y + 1 = 0 \}}$

La boule fermée de centre Ω et de rayon 1 a pour équation $\underline{(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1}$.

Le point $(3;3)$ appartient à $\mathcal{D}$ or

- $3 \geq 1$
- $3 - 3 + 2 = 2 \geq 0$

• $-4\times 3 - 3 + 17 = 2 > 0$

• $-3 + 3\times 3 + 1 = 4 > 0$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;,\; \begin{cases} x > 1 \\ x - y + 2 > 0 \\ -4x - y + 17 > 0 \\ -x + 3y + 1 > 0 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 > 1 \end{cases} \right\}}$$

3. Les points $A = (3;3)$ et $B = (3;1)$ appartiennent à $\mathcal{D}$ or le milieu I du segment $[AB]$ n'appartient pas à $\mathcal{D}$. En effet :

$A \in \mathcal{D}$

car • $3 > 1$

• $3 - 3 + 2 > 0$

• $-4\times 3 - 3 + 17 > 0$

• $-3 + 3\times 3 + 1 > 0$

• $(3-2)^2 + (3-2)^2 > 1$

$B \in \mathcal{D}$

car • $3 > 1$

• $3 - 1 + 2 > 0$

• $-4\times 3 - 1 + 17 > 0$

• $-3 + 3\times 1 + 1 > 0$

• $(3-2)^2 + (1-2)^2 > 1$

$I \notin \mathcal{D}$ car $I = (3;2)$

et $(3-2)^2 + (2-2)^2 \leq 1$.

Ainsi, $\mathcal{D}$ n'est pas un convexe de $\mathbb{R}^2$: il existe un point du segment $[\bar{A}B]$ qui n'est pas dans $\mathcal{D}$.

Exercice 2

On note $E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2+(x+y)^2 = 1\}$

Pour que E soit un compact de $\mathbb{R}^2$, il suffit que E soit un borné de $\mathbb{R}^2$ puisque l'énoncé indique que E est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x;y)$ dans E.

On sait alors que $(x+y)^2 \geqslant 0$

car un carré est positif dans $\mathbb{R}$.

On a donc $x^2+y^2+(x+y)^2 \geqslant x^2+y^2$

De là $1 \geqslant x^2+y^2$

Donc $(x;y) \in \overline{B}((0;0), 1)$

On a montré : $E \subset \overline{B}((0;0), 1)$

Finalement : E est un borné de $\mathbb{R}^2$

et donc un compact de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Les résultats sont consignés ci-dessous.

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2, 2x-3y+1<0\}$	OUI	NON	NON	NON	OUI
$\mathbb{R}^2\setminus\{(0\,;1),(1\,;0)\}$	OUI	NON	NON	NON	NON

Exercice 1

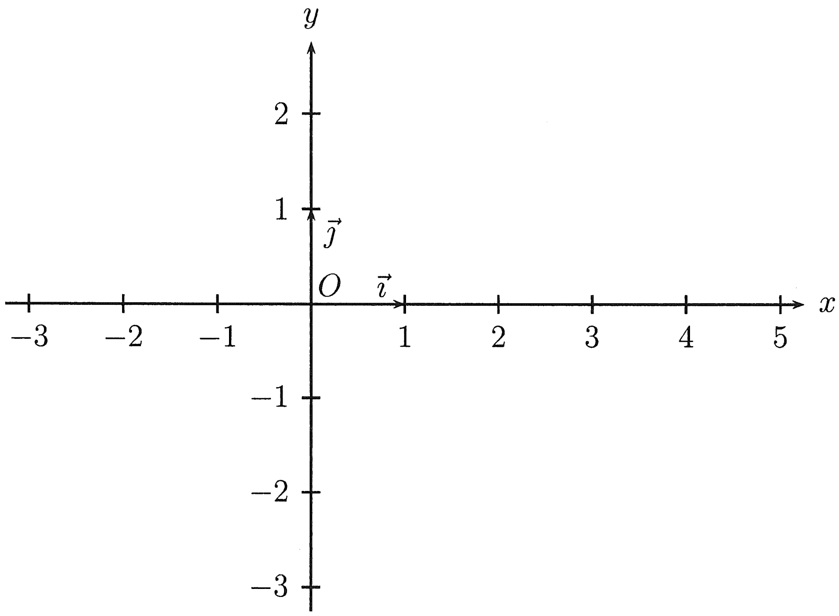
Dans $\mathbb{R}^2$, on note $A = (2\,;2)$ et $B = (2\,;-1)$. D'autre part, on pose $E = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0\}$.

1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).

On note F l'ensemble E privé de la droite (AB), et on admet que $\mathcal{F}r(F)$ est la réunion des droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

2. Représenter l'ensemble F dans le repère ci-dessous ; indiquer, de manière claire, les bords du domaine qui appartiennent à F.

3. Justifier, de façon précise, pourquoi F n'est ni un ouvert de $\mathbb{R}^2$, ni un fermé de $\mathbb{R}^2$.



Exercice 2

Indiquer, **sans justification**, si les deux ensembles suivants sont OUI ou NON des ouverts, des fermés, des bornés, des compacts ou des convexes de $\mathbb{R}^2$. *Un dessin peut être très utile.*

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x^2 < 1\}$					
$\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x < y \text{ et } x - y > 0\}$					

Exercice 3

Donner, dans $\mathbb{R}^3$, une équation du plan orthogonal au vecteur $(3\,;-2\,;1)$ et passant par le point $(1\,;-1\,;-3)$.

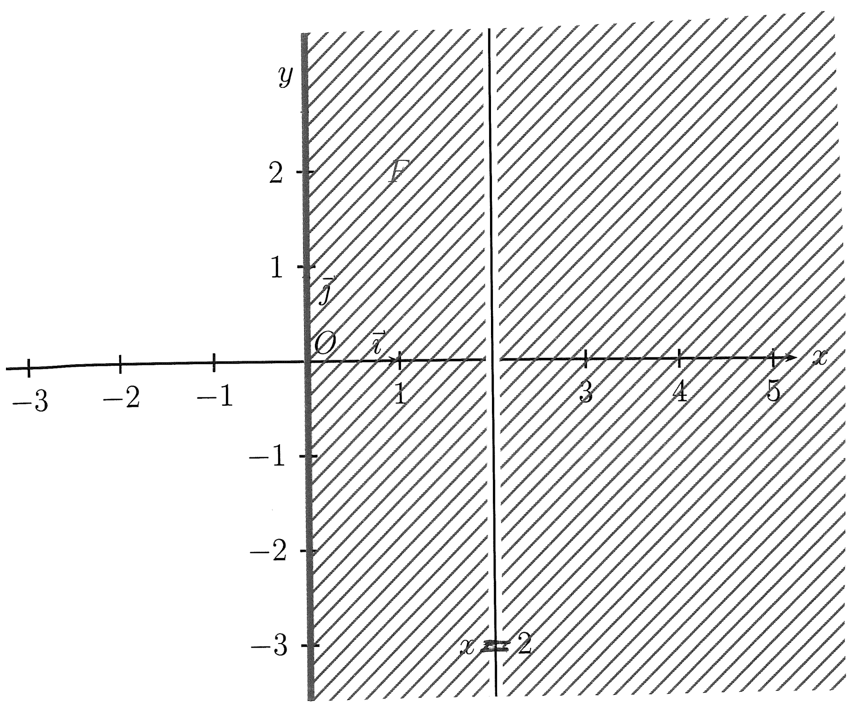
Exercice 1

1. Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}$, or on a $\overrightarrow{AB} = B - A = (0 ; -3)$. La droite (AB) a donc pour équation cartésienne

$-3x + 0y + c = 0$, où c reste à déterminer. Comme A est dans (AB), il vient $-3 \times 2 + c = 0$, d'où $c = 6$.

Une équation de (AB) est donc $-3x + 6 = 0$, c'est-à-dire $x = 2$.

2. Une représentation de F est :



3. On a $\mathrm{Fr}(F) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2,\ x=0 \text{ ou } x=2\}$.

Le point $(0;0)$ est donc dans $\mathrm{Fr}(F)$ mais il appartient aussi à F car $0 \geqslant 0$ et $0 \neq 2$.

Ainsi, F contient un point de sa frontière donc F ne peut pas être un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Le point $(2;0)$ est dans $\mathrm{Fr}(F)$ mais il n'appartient pas à F car $(2;0)$ appartient à (AB), puisque $2=2$.

Ainsi, il existe un point de $\mathrm{Fr}(F)$ qui n'est pas dans F. F ne peut donc pas contenir tous les points de sa frontière donc F n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

On a le tableau suivant.

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x^2 < 1\}$	OUI	NON	NON	NON	OUI
$\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x < y \text{ et } x - y > 0\}$	OUI	OUI	OUI	OUI	NON

Exercice 3

On note P le plan de $\mathbb{R}^3$ dont un vecteur orthogonal est $\vec{u} = (3\,; -2\,; 1)$ et passant par $A = (1\,; -1\,; -3)$. On a alors

$$P = \{ M \in \mathbb{R}^3, \quad \langle \overrightarrow{AM}, \vec{u} \rangle = 0 \}$$

$$P = \{ (x\,; y\,; z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x-1) \times 3 + (y+1) \times (-2) + (z+3) \times 1 = 0 \}$$

$$\boxed{P = \{ (x\,; y\,; z) \in \mathbb{R}^3, \quad 3x - 2y + z - 2 = 0 \}}$$