

POUR FAIRE LE POINT SUR LES CHAPITRES 11 À 13...

Prénom NOM : _____

Remarques du professeur correcteur

1
Éléments de correction

pour l'ensemble des sujets
du petit test n° 3

Exercice 1

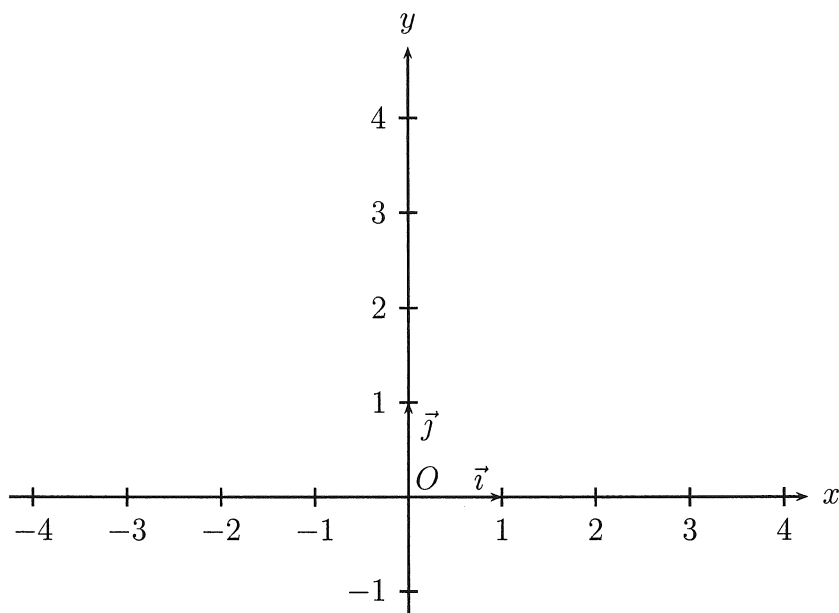
Soit A l'ensemble $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, |4 - 2x| \leq 2y\}$.

1. Représenter graphiquement l'ensemble A dans le repère ci-dessous en indiquant, de manière claire, si les bords du domaine appartiennent à A .

2. Démontrer que A est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

3. L'ensemble A est-il un borné de $\mathbb{R}^2$? Justifier soigneusement la réponse.

4. Montrer que la fonction f , qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $|x - 2|$, est convexe sur $\mathbb{R}$.



Exercice 2

Indiquer, **sans justification**, si les deux ensembles suivants sont OUI ou NON des ouverts, des fermés, des bornés, des compacts ou des convexes de $\mathbb{R}^2$. *Un dessin peut être très utile.*

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2 = 1\}$					
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x = 1 \text{ ou } x = 2\}$					

Exercice 3

Donner, dans $\mathbb{R}^2$, une équation du plan orthogonal au vecteur $(3; -2; 1)$ et passant par le point $(1; -1; -3)$.

Exercice 1

1. On a successivement

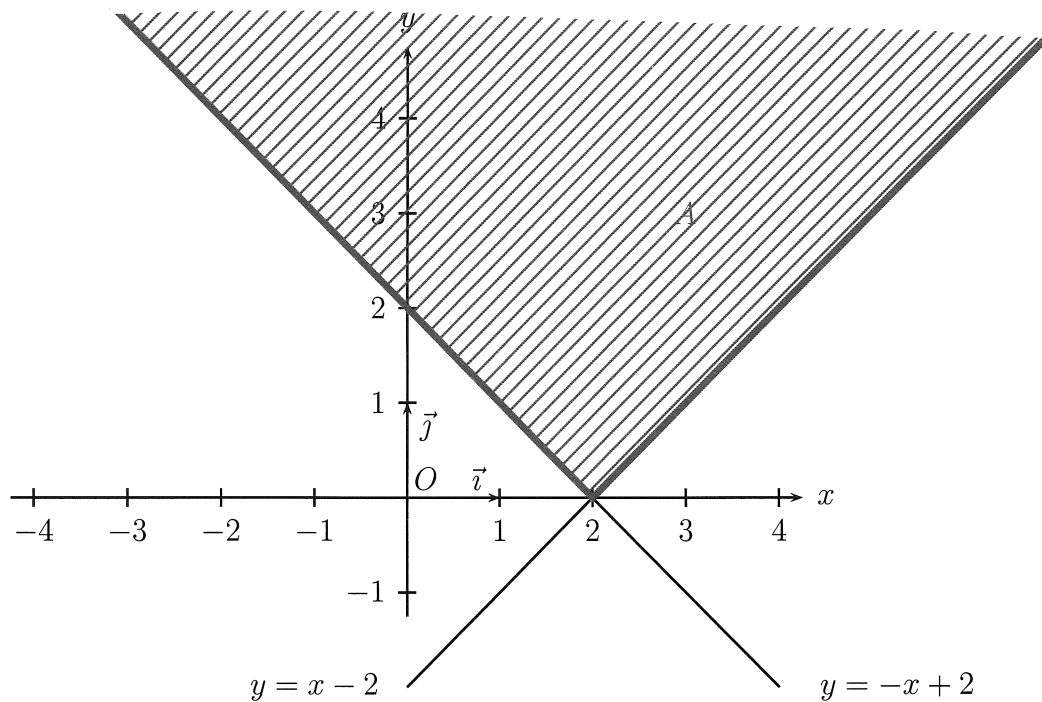
$$A = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad |4 - 2x| \leq 2y \}$$

$$A = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad -2y \leq 4 - 2x \leq 2y \}$$

$$A = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad -y \leq 2 - x \leq y \}$$

$$A = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad y \geq 2 - x \text{ et } y \geq x - 2 \}$$

Une représentation graphique de A est donnée ci-après.



2. A est l'intersection des deux demi-plans
d'équation respectives $y \geq 2-n$ et $y \geq n-2$.
Sachant qu' un demi-plan est un convexe
de $\mathbb{R}^2$ et que l'intersection de deux con-
vexes reste convexe, on peut conclure
que A est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

3. A n'est pas une partie bornée de $\mathbb{R}^2$
puisque la demi-droite d'équations
 $n=2$ et $y \geq 0$ est incluse dans A.
Plus précisément, A contient tous
les points de la forme $(2; n)$ où
 $n \in \mathbb{N}$. or il n'est pas possible de
trouver m_2 dans $\mathbb{R}$ tel que $|n| \leq m_2$
pour tout n de $\mathbb{N}$, car $\mathbb{N}$ n'est pas
majoré.

Conclusion: A n'est pas borné.

4. on remarque la chose suivante:

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |4 - 2x| \leq 2y \}$$

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |2 - x| \leq y \}$$

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad y \geq f(x) \}$$

A n'est donc rien d'autre que l'épigraphe de la fonction f . Comme A est un convexe de $\mathbb{R}^2$, on en déduit que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2 = 1\}$	NON	OUI	OUI	OUI	NON
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x = 1 \text{ ou } x = 2\}$	NON	OUI	NON	NON	NON

Exercice 3

on a, en notant P le plan en question,

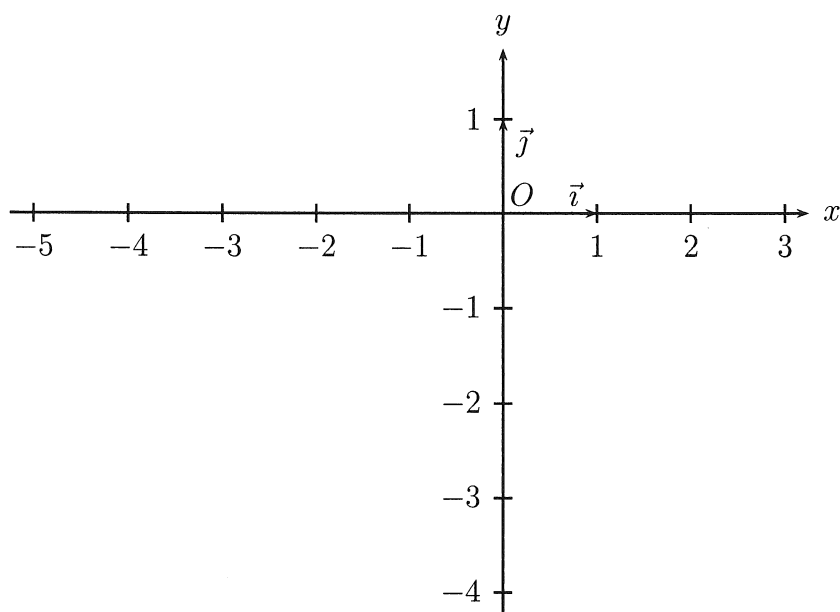
$$P = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z+3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

$$P = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, \quad 3(x-1) + (-2)(y+1) + 1(z+3) = 0 \right\}$$

$$P = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, \quad 3x - 2y + z - 2 = 0 \right\}.$$

Exercice 1

On note $A =]-\infty; 2] \times]-\infty; -1]$ et $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x \leq -y\}$. Représenter ci-dessous l'ensemble $A \cap B$ puis justifier avec soin pourquoi il s'agit d'une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.



Exercice 2

On admet que l'ensemble $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, 9x^2 + y^2 = 9\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Justifier, de manière précise, qu'il s'agit d'un compact de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

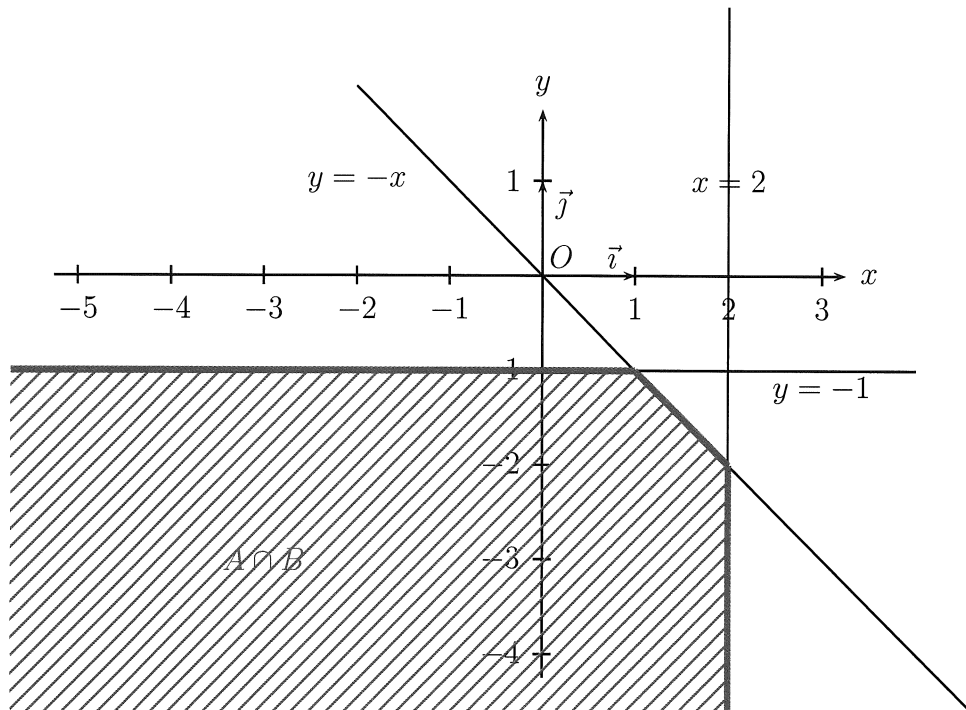
Indiquer, **sans justification**, si les deux ensembles suivants sont OUI ou NON des ouverts, des fermés, des bornés, des compacts ou des convexes de $\mathbb{R}^2$. *Un dessin peut être très utile.*

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq 1 \text{ ou } y^2 \leq 4\}$					
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2 = 1\}$					

Exercice 4

Donner, dans $\mathbb{R}^3$, une équation du plan orthogonal au vecteur $(3; -2; 1)$ et passant par le point $(0; -1; 1)$.

Exercice 1



A est le produit cartésien de deux intervalles de $\mathbb{R}$ donc A est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

D'autre part, B est un demi-plan donc B est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

L'intersection de deux convexes, également convexe, on a la conclusion.

Exercice 2

On note $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 9x^2 + y^2 = 9\}$.

Puisque l'on admet que E est une partie fermée dans $\mathbb{R}^2$, il suffit de montrer que E est un borné de $\mathbb{R}^2$.

On démontre cette dernière propriété en prouvant que E est inclus dans une boule fermée de centre $(0, 0)$.

Soit (x, y) dans E .

$$\text{On a alors } 9x^2 = 9 - y^2$$

$$\text{et donc } 9x^2 \leq 9 \text{ car } y^2 \geq 0$$

$$\text{Ainsi, il vient } \underline{x^2 \leq 1}.$$

$$\text{De même: } y^2 = 9 - 9x^2$$

$$\text{donc } \underline{y^2 \leq 9} \text{ car } 9x^2 \geq 0$$

$$\underline{\text{Conclusion:}} \quad x^2 + y^2 \leq 10$$

$$\text{Finalement: } \underline{E \subset \overline{B}((0, 0), \sqrt{10})}.$$

Exercice 3

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq 1 \text{ ou } y^2 \leq 4\}$	NON	OUI	NON	NON	NON
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2 = 1\}$	NON	OUI	OUI	OUI	NON

Exercice 4

Soit $\vec{n} = (3; -2; 1)$ et $A = (0; -1; 1)$.

on note P le plan passant par A et orthogonal au vecteur $\vec{n}$. On a :

$$P = \{ M \in \mathbb{R}^3, \quad \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0 \}$$

$$P = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, (x-0) \times 3 + (y+1) \times (-2) + (z+1) \times 1 = 0 \}$$

$$P = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, 3x - 2y + z - 1 = 0 \}$$

Exercice 1

Indiquer, **sans justification**, si les deux ensembles suivants sont OUI ou NON des ouverts, des fermés, des bornés, des compacts ou des convexes de $\mathbb{R}^2$. *Un dessin peut être très utile.*

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, 2x - 3y + 1 < 0\}$					
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2 = 1\}$					

Exercice 2

Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y - 4 = 0$.

Exercice 3

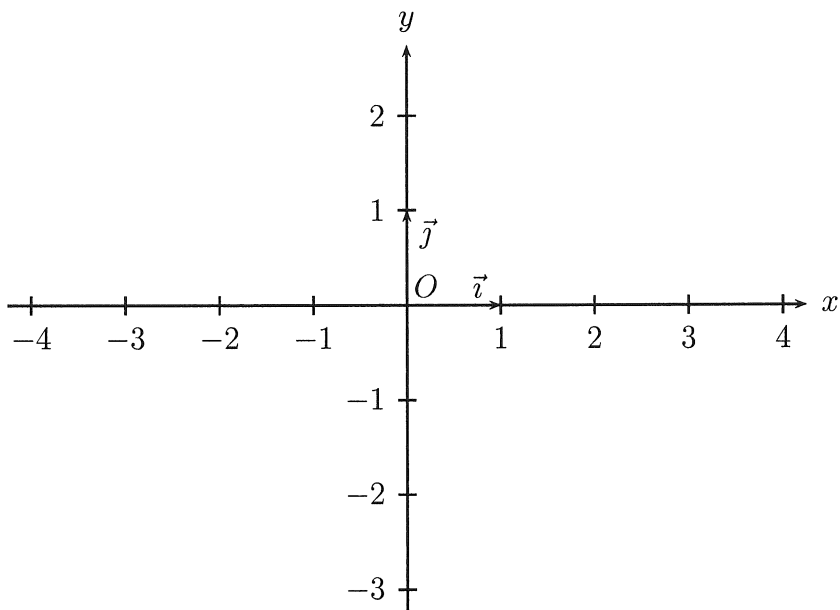
Calculer la norme du vecteur $\left(-1; 1; \frac{1}{2}\right)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

Dans tout l'exercice, on se place dans $\mathbb{R}^2$.

Soit $E_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 + 2x - 2y \leq -1\}$ et $E_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$.

1. Représenter, dans le repère ci-dessous, les ensembles E_1 et E_2 .
2. Justifier soigneusement pourquoi $E_1 \cap E_2$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.



Exercice 1

le tableau est le suivant :

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, 2x - 3y + 1 < 0\}$	oui	non	non	non	oui
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2 = 1\}$	non	oui	oui	oui	non

Exercice 2

P a pour équation $ax + by + cz + d = 0$

avec $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$ et $d = -4$.

Dans ces conditions, un vecteur normal

$\vec{a}$ P est $(a; b; c)$, c'est $\vec{a} = (1; 2; 0)$.

Exercice 3

on pose $\vec{u} = (-1; 1; \frac{1}{2})$.

$$\text{Alors } \|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{9}{4}} \quad \text{après calcul}$$

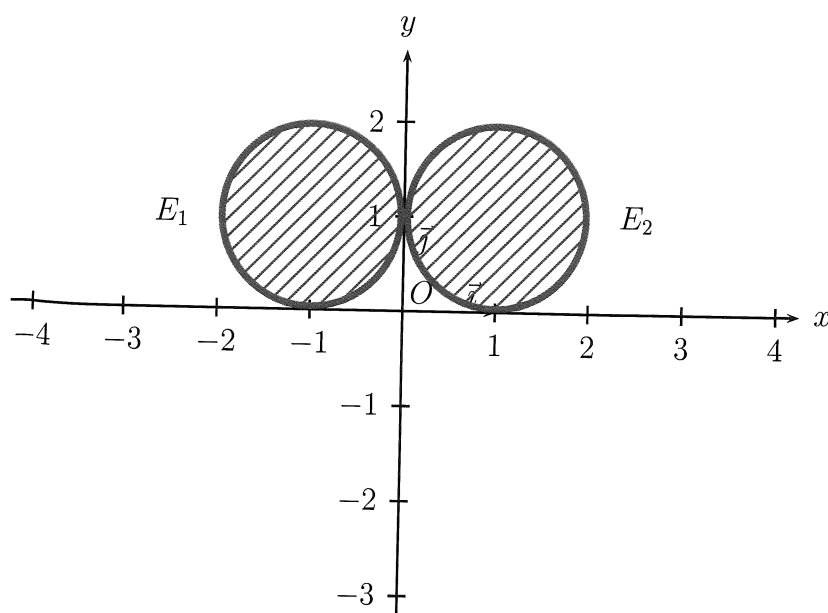
$$\boxed{\|\vec{u}\| = \frac{3}{2}}$$

Exercice 4

1. une représentation de E_1 et E_2 est donnée ci-dessous, en remarquant que :

$$E_1 = \overline{B}((-1;1), 1)$$

$$E_2 = \overline{B}((1;1), 1)$$



2. Montrer : $E_1 \cap E_2 = \{(0;1)\}$

Soit $(x; y)$ dans $E_1 \cap E_2$.

$$\text{On a alors } \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y \leq -1 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \leq 1 \end{cases}$$

De là, par somme : $2x^2 + 2y^2 - 4y + 2 \leq 0$

$$\text{Donc } x^2 + y^2 - 2y + 1 \leq 0.$$

Il vient donc : $x^2 + (y-1)^2 \leq 0$.

or, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on sait que
l'on a toujours $x^2 + (y-1)^2 \geq 0$.

$$\text{De là : } x^2 + (y-1)^2 = 0$$

$$\text{et donc } x^2 = 0 \text{ et } (y-1)^2 = 0$$

$$\text{Finalement } x = 0 \text{ et } y = 1$$

Réciproquement :

$$(0, 1) \in E_1 \text{ car } 0^2 + 1^2 + 2 \times 0 - 2 \times 1 = -1 \leq -1$$

$$(0, 1) \in E_2 \text{ car } (0-1)^2 + (1-1)^2 = 1 \leq 1.$$

$$\underline{\text{Conclusion : } E_1 \cap E_2 = \{(0, 1)\}.$$

$E_1 \cap E_2$ est donc un fermé de $\mathbb{R}^2$ puisque

c'est un singleton. De plus, $E_1 \cap E_2$ est

inclus trivialement dans $B((0, 1), 1)$,

ce qui implique que $E_1 \cap E_2$ est borné.

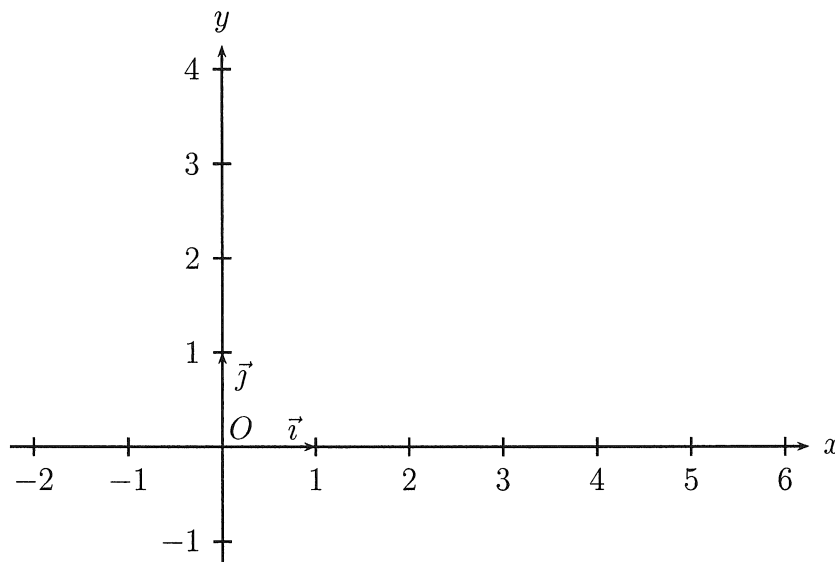
Conclusion : $E_1 \cap E_2$ est compact.

Exercice 1

On se place dans $\mathbb{R}^2$.

1. Dessiner l'ensemble $\mathcal{D}$, défini comme étant l'intérieur (bords compris) du triangle ABC avec les données $A = (1; 1)$, $B = (2; 4)$ et $C = (4; 2)$.

2. Définir l'ensemble $\mathcal{D}$ par des inéquations.



Exercice 2

Justifier soigneusement pourquoi $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, y^2 \leq -x^2\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Justifier soigneusement pourquoi $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, y^2 \leq x^2\}$ n'est pas un convexe de $\mathbb{R}^2$.

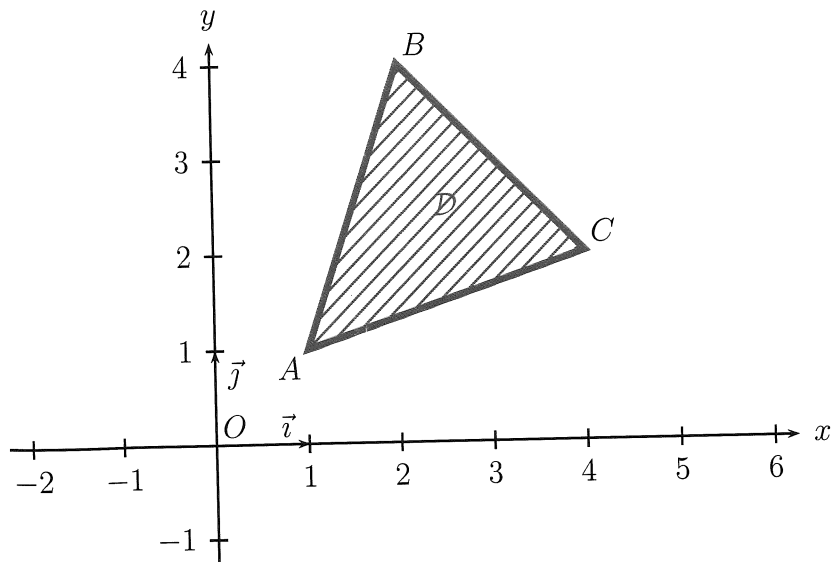
Exercice 4

Indiquer, **sans justification**, si les deux ensembles suivants sont OUI ou NON des ouverts, des fermés, des bornés, des compacts ou des convexes de $\mathbb{R}^2$. *Un dessin peut être très utile.*

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, 2x - 3y + 1 < 0\}$					
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2 = 1\}$					

Exercice 1

1. Une représentation du domaine D est effectuée ci-dessous.



2. On détermine une équation cartésienne pour chacune des droites (AB) , (BC) et (CA) .

on a :

$$(AB) = \{ M \in \mathbb{R}^2, \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \}$$

$$(AB) = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y-1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \}$$

$$(AB) = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, 3(x-1) - (y-1) \times 1 = 0 \}$$

$$\text{de là : } \boxed{(AB) = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, 3x - y - 2 = 0 \}}$$

de la même façon :

$$(B^c) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ y-4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \}$$

$$(B^c) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, -x - y + 6 = 0 \} \text{ après calculs}$$

Et enfin :

$$(C^A) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{vmatrix} x-4 & -3 \\ y-2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \}$$

$$(C^A) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, -x + 3y - 2 = 0 \}$$

le point $(3, 2)$ appartient au domaine $\mathcal{D}$

or on a $\bullet 3 \times 3 - 2 - 2 = 5 > 0$

$\bullet -3 - 2 + 6 = 1 > 0$

$\bullet -3 + 3 \times 2 - 2 = 1 > 0$

Ensemblement, il vient :

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 3x - y + 2 \geq 0 \\ -x - y + 6 \geq 0 \\ -x + 3y - 2 \geq 0 \end{cases} \right\}$$

Exercice 2

on a successivement :

$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad y^2 \leq -x^2 \}$$

$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 0 \}$$

or on sait que pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on a $x^2 + y^2 \geq 0$. on peut donc écrire :

$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 = 0 \}$$

Finalement, comme la somme de deux nombres positifs ne peut être nulle que si ces deux nombres sont eux-mêmes nuls, il vient :

$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x=0 \text{ et } y=0 \}$$

d'où $\boxed{E = \{ (0, 0) \}}$

E est un singletton donc est un fermé.

E est contenu trivialement dans $B((0, 0), 1)$

donc E est un borné.

Conclusion : E est à la fois un borné de $\mathbb{R}^2$ et un fermé de $\mathbb{R}^2$: c'est donc un compact de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Soit $A = (1; 1)$ et $B = (-1; 1)$

On note $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, y^2 \leq x^2\}$.

A est dans E car $1^2 \leq 1^2$

B est dans E car $(-1)^2 \leq 1^2$

le point $\frac{A+B}{2}$, égal à $(0; 1)$, n'est pas dans E car $1^2 > 0$.

On a ainsi exhibé un point du segment $[AB]$ non dans E alors que A et B sont dans E . Dans ces conditions, E ne peut pas être un convexe.

Exercice 4

Le tableau complété est reproduit ci-dessous.

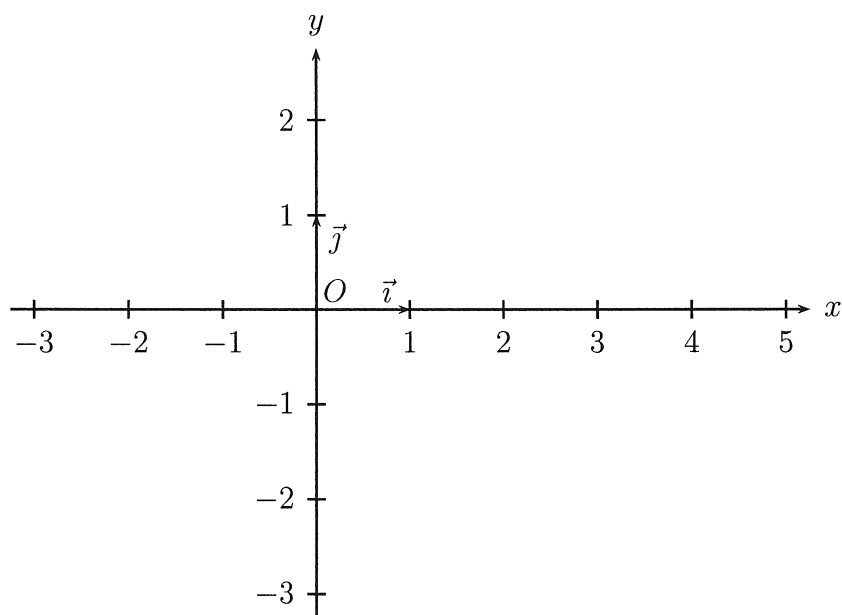
ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, 2x - 3y + 1 < 0\}$	OUI	NON	NON	NON	OUI
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2 = 1\}$	NON	OUI	OUI	OUI	NON

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on se place dans $\mathbb{R}^2$.

On note E l'ensemble $]1; 3] \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble $\left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - 4x + \frac{15}{4} < 0 \right\}$.

1. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$? Préciser ses éléments caractéristiques.
2. Expliquer brièvement pourquoi $\mathcal{C}$ est un borné de $\mathbb{R}^2$.
3. Représenter, ci-dessous, l'ensemble F défini par $F = E \setminus \mathcal{C}$; indiquer, de manière claire, les bords du domaine qui appartiennent à F .
4. Justifier soigneusement pourquoi F n'est pas un convexe de $\mathbb{R}^2$.



Exercice 2

Indiquer, **sans justification**, si les deux ensembles suivants sont OUI ou NON des ouverts, des fermés, des bornés, des compacts ou des convexes de $\mathbb{R}^2$. *Un dessin peut être très utile.*

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - 2x < 0\}$					
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \geq 0\}$					

Exercice 3

Calculer la norme du vecteur $\left(1; -1; -\frac{1}{2}\right)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1

1. On a $\mathcal{C} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - 4x + \frac{15}{4} < 0\}$

Donc $\mathcal{C} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, (x-2)^2 - 4 + y^2 + \frac{15}{4} < 0\}$

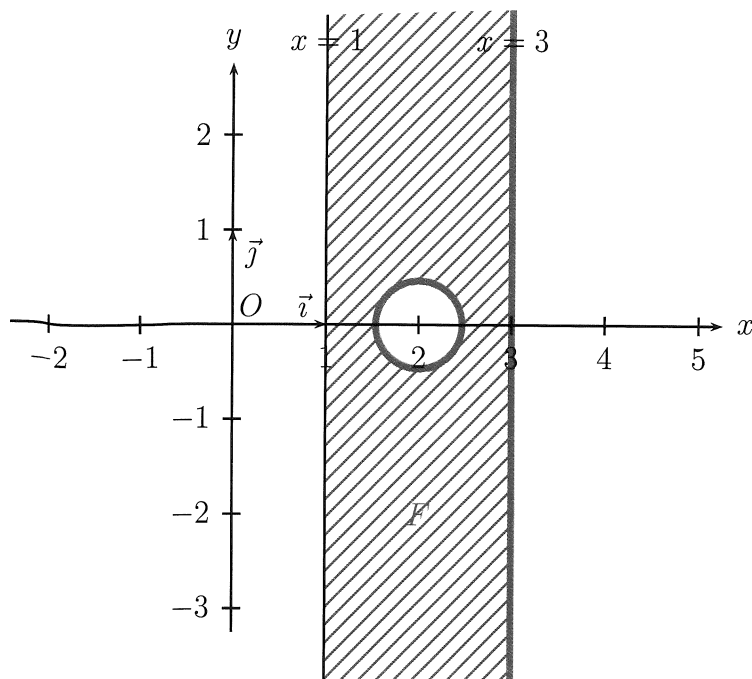
$$\mathcal{C} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, (x-2)^2 + y^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2\}$$

$\mathcal{C}$ est donc la boule ouverte de centre

$(2; 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$: $\mathcal{C} = \mathcal{B}((2; 0), \frac{1}{2})$.

2. $\mathcal{C}$ est une boule donc $\mathcal{C}$ peut trivialement être inclus dans une boule : $\mathcal{C}$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

3.



Représentation
graphique
de F

4. Soit $A = (2; 1)$ et $B = (2; -1)$.

• $A \in F$ car $A \in E$, puisque $1 < 2 \leq 3$ et $1 \in \mathbb{R}$

• $A \notin \mathcal{C}$, puisque

$$2^2 + 1^2 - 4 \times 2 + \frac{15}{4} = \frac{3}{4} \geq 0.$$

• $B \in F$ car $B \in E$, puisque $1 < 2 \leq 3$ et $-1 \in \mathbb{R}$

• $B \notin \mathcal{C}$, puisque

$$2^2 + (-1)^2 - 4 \times 2 + \frac{15}{4} = \frac{3}{4} \geq 0.$$

Ainsi, si F était un convexe, alors le milieu I de $[AB]$ serait un élément de F . Cela n'est pas le cas puisque

$$I = \frac{A+B}{2} = (2; 0) \text{ or } 2^2 + 0^2 - 4 \times 2 + \frac{15}{4} = -\frac{1}{4} < 0$$

Donc $I \in \mathcal{C}$, et donc $I \notin F$.

Conclusion :

F n'est pas un convexe de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

les réponses sont présentées dans le tableau.

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - 2x < 0\}$	OUI	NON	OUI	NON	OUI
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \geq 0\}$	OUI	OUI	NON	NON	OUI

Exercice 3

$$\text{soit } \vec{u} = \left(1; -1; -\frac{1}{2} \right).$$

on a

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \frac{3}{2}}$$

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\vec{u}$ le vecteur $(1; -1)$ et on pose $A = (0; 0)$ et $B = (0; 1)$.

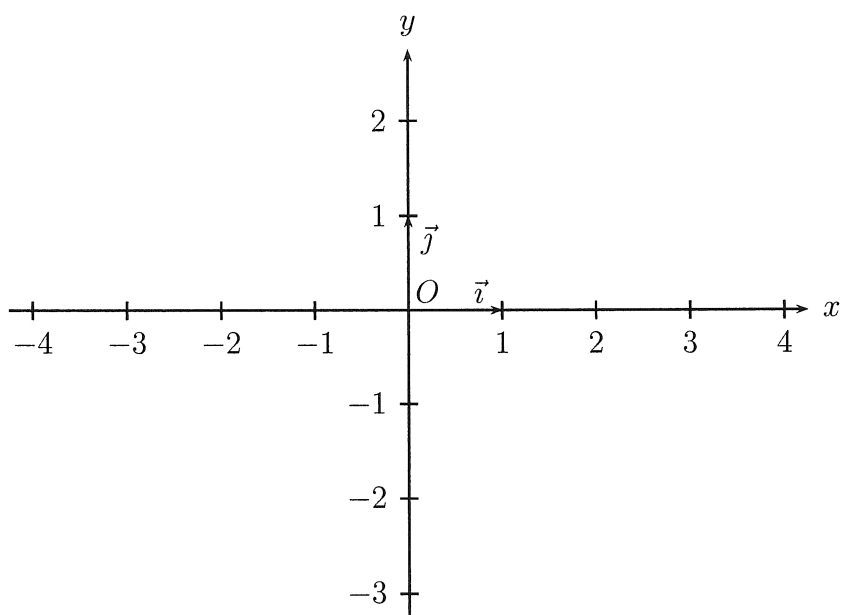
1. Donner une équation de la droite D_1 passant par A et dirigée par $\vec{u}$, ainsi qu'une équation de la droite D_2 passant par B et dirigée par $\vec{u}$.

On note $\mathcal{P}$ la partie du plan comprise strictement entre D_1 et D_2 .

2. Représenter l'ensemble $\mathcal{P}$ dans le repère donné ci-dessous.

3. $\mathcal{P}$ est-elle une partie bornée de $\mathbb{R}^2$? Justifier.

4. Démontrer, de manière précise, que $\mathcal{P}$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$.



Exercice 2

Indiquer, **sans justification**, si les deux ensembles suivants sont OUI ou NON des ouverts, des fermés, des bornés, des compacts ou des convexes de $\mathbb{R}^2$. *Un dessin peut être très utile.*

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, (x+1)^2 = 1 \text{ et } y = 0\}$					
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x = 1 \text{ ou } x = 2\}$					

Exercice 3

Calculer la norme du vecteur $\left(-1; 1; \frac{1}{2}\right)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1

1. La droite D_1 est l'ensemble

$$D_1 = \{ M \in \mathbb{R}^2, \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \}$$

$$D_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{vmatrix} = 0 \}$$

$$D_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, -x - y = 0 \}$$

Une équation de D_1 est donc $y = -x$.

• La droite D_2 est l'ensemble

$$D_2 = \{ M \in \mathbb{R}^2, \det(\overrightarrow{BM}, \vec{u}) = 0 \}$$

$$D_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{vmatrix} x & 1 \\ y-1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \}$$

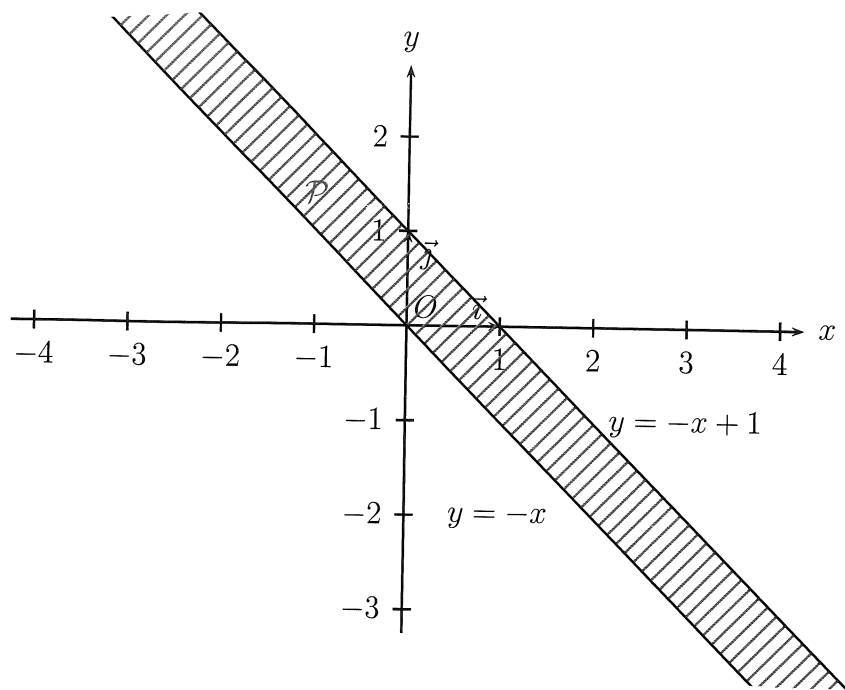
$$D_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, -x - y + 1 = 0 \}$$

$$D_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -x + 1 \}$$

Une équation de D_2 est donc $y = -x + 1$.

2. Une représentation de P est donnée ci-après.

3. Montrons que P n'est pas un borné de $\mathbb{R}^2$.



Si P était bornée, alors il existerait m_1 dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout (x, y) de P , on ait $|x| \leq m_1$. On remarque que la droite d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ est incluse dans P . Ainsi, P contient tous les points de la forme $(n, -n + \frac{1}{2})$ où n est un entier naturel. Si P était bornée, il existerait donc un réel m_1 tel que $n \leq m_1$ pour tout n de $\mathbb{N}$, ce qui est absurde. P n'est donc pas borné dans $\mathbb{R}^2$.

4. P est l'intersection des deux demi-plans
d'équations respectives $y > -x$ et $y < -x+1$.

On sait que tout demi-plan est convexe
 et que l'intersection de deux convexes
 est un convexe.

Conclusion: P est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

les réponses sont les suivantes.

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, (x+1)^2 = 1 \text{ et } y = 0\}$	NON	OUI	OUI	OUI	NON
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x = 1 \text{ ou } x = 2\}$	NON	OUI	NON	NON	NON

Exercice 3

$$\text{on a } \|(-1; 1; \frac{1}{2})\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (\frac{1}{2})^2}$$

$$\|(-1; 1; \frac{1}{2})\| = \sqrt{\frac{9}{4}} \text{ après calcul}$$

De là :

$$\boxed{\|(-1; 1; \frac{1}{2})\| = \frac{3}{2}}$$