Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1$^{\text{er}}$ **cycle**

Petit test - Chapitres 7 à 9

Exercice 1

Soit f la fonction définie pour tout x de $[-3\,;1]$ par $f(x) = x + \sqrt{1-x}$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère donné du plan.

1. Donner le développement limité de la fonction f en 0 à l'ordre 2.

2. Déduire de la question précédente une équation de la tangente à C_f au point $A(0\,;1)$ ainsi que la position relative de cette tangente par rapport à C_f au voisinage du point considéré.

Exercice 2

On considère la fonction f définie pour tout x de $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = (x+8)e^{-0{,}5x}$. Cette fonction modélise la fonction de demande d'un produit informatique : le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x centaines d'euros.

1. Calculer l'élasticité de f.

2. Déterminer le signe de $e_f(x)$ pour tout réel x positif ou nul ; interpréter le résultat obtenu.

3. Calculer le prix pour lequel l'élasticité vaut $-3{,}5$.

4. Donner le pourcentage d'évolution de la demande lorsque le prix passe de 800 € à 808 €, à l'aide d'un calcul approché.

5. Les résultats des questions **3.** et **4.** sont-ils cohérents ?

Exercice 3

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

1. Donner une approximation polynomiale de f, de degré 2, au voisinage de 0.

2. Utiliser la question précédente pour justifier l'égalité approchée : $f(0{,}2) \approx 1{,}18$.

3. On suppose que x varie de 0 à 0,2. Donner une variation relative approchée de $f(x)$, exprimée en pourcentage.

Exercice 4

En utilisant les développements limités en 0 à l'ordre 1 de deux fonctions bien choisies, montrer :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{1-e^x}\right) = -1.$$

Exercice 5

Soit D la fonction définie pour tout p de $]5\,;+\infty[$ par $D(p)=\dfrac{100}{p-5}$.

1. Préciser la fonction marginale de D ainsi que l'élasticité de D.

2. Démontrer que l'élasticité de D est une fonction croissante.

3. Donner une variation absolue approchée de $D(p)$ lorsque p passe de 10 à 10,5.

4. Pour un p fixé, la variation relative de $D(p)$ est de $40\,\%$ et la variation relative de p est de $-30\,\%$. Déterminer, à l'aide d'un calcul approché, la valeur de p.

Exercice 6

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{2e^x+1}{1+e^x}$.

1. Montrer que l'approximation affine de f en 0 est $\dfrac{3}{2}+\dfrac{x}{4}$.

2. En déduire une valeur décimale approchée de $f(0{,}1)$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Démontrer que, pour tout réel x voisin de 0, on a l'approximation : $f(x)\approx 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=(x-2)e^x+x+2$.

1. Donner le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

2. En déduire la limite, quand x tend vers 0, de la quantité $\dfrac{(x-2)e^x+x+2}{x^3}$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie pour tout réel x de $]-1\,;1[$ par $f(x)=\ln(1+x)$.

1. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.

2. En déduire la limite, quand x tend vers 0, de la quantité $\dfrac{f(x)-x}{xf(x)}$.

Exercice 10

Utiliser l'approximation affine en 1 de la fonction f définie pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^x$ pour donner une valeur décimale approchée de $(0{,}9)^{0{,}9}$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = -xe^{-x}$.

1. Calculer la dérivée de f.

2. Utiliser l'approximation affine de f en un point bien choisi pour donner une valeur approchée de $f(0{,}06)$.

3. Donner l'expression de l'élasticité e_f de la fonction f.

4. Quelle est la variation relative approximative de $f(x)$, exprimée en pourcentage, lorsque x augmente de $4\,\%$ à partir de 3 ?

Exercice 12

En utilisant l'approximation affine d'une fonction bien choisie, au voisinage d'un point bien choisi lui aussi, donner une valeur décimale approchée de $\sqrt{9{,}03}$.

Exercice 13

En utilisant l'approximation affine d'une fonction bien choisie, au voisinage d'un point bien choisi lui aussi, donner une valeur décimale approchée de $(3{,}05)^3$.

Exercice 14

La productivité d'une entreprise est modélisée par une fonction f qui, à toute quantité de travail x, exprimée en centaines d'unités et variant dans $]0\,;6]$, associe la production $f(x)$, exprimée en unités.

Au sein de l'entreprise DEGEAD, la productivité est donnée par l'expression $f(x) = 3x^2 - \dfrac{x^3}{3}$.

1. Donner l'expression de la productivité moyenne de l'entreprise DEGEAD.

2. Démontrer que l'élasticité de la productivité est décroissante sur $]0\,;6]$.

3. Donner une approximation du pourcentage de variation de la production lorsque la quantité de travail augmente de $1\,\%$ à partir de 500 unités.

Exercice 15

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = 1 - e^{3x}$.

1. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

2. Déduire de la question précédente la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^{3x}}{2x^2}\right)$.

Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1$^{\text{er}}$ **cycle**

Petit test - Chapitres 7 à 9 (**correction**)

Exercice 1

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-3\,;1[$: le développement limité demandé est donc licite. De manière plus précise, pour tout x de $[-3\,;1[$, nous avons :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Le calcul des dérivées successives de f permet d'établir, pour tout x de $[-3\,;1[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \text{ et } f''(x) = \frac{-1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}.$$

Il vient ainsi, après remplacement :

$$\boxed{f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.}$$

2. Une équation de la tangente à C_f se lit en conservant la partie régulière du développement limité précédent à l'ordre 1. Ainsi, il est possible d'affirmer :

$$\boxed{\text{une équation de la tangente } T \text{ à } C_f \text{ au point de coordonnées } A(0\,;1) \text{ est } y = 1 + \frac{x}{2}.}$$

D'autre part, d'après la question précédente, nous avons, pour tout x de $[-3\,;1[$:

$$f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Ainsi, si x est suffisamment proche de 0, il est possible d'écrire :

$$f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \approx -\frac{x^2}{8}.$$

Le carré d'un réel étant positif, la quantité $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right)$ est négative pour x voisin de 0.
Ainsi, $\boxed{\text{au voisinage du point } A(0\,;1), \text{ la courbe de } f \text{ est en dessous de la tangente } T.}$

Exercice 2

1. La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et est à valeurs non nulles.
Il est donc possible de calculer son élasticité e_f, définie pour tout x de $\mathbb{R}_+$ par $e_f(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}x$.
Après calculs, nous obtenons :

$$\boxed{\forall x \in [0\,;+\infty[, e_f(x) = \frac{x(-0{,}5x-3)}{x+8}.}$$

2. Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, il est clair que $\dfrac{x}{x+8}$ est strictement positif et que $-0{,}5x-3$ est strictement négatif. Ainsi, $\boxed{\text{l'élasticité de } f \text{ est strictement négative sur } [0\,;+\infty[.}$

Cela signifie que $\boxed{\text{la demande varie en sens contraire du prix}}$: par exemple, plus le prix augmente, plus la demande diminue.

3. Il s'agit de déterminer les réels x de $[0\,;+\infty[$ vérifiant l'égalité $e_f(x) = -3{,}5$, or nous avons les équivalences successives suivantes, pour tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$e_f(x) = -3{,}5 \iff \frac{-0{,}5x^2-3x}{x+8} = -3{,}5.$$

$$e_f(x) = -3{,}5 \iff -0{,}5x^2-3x = -3{,}5x-28 \text{ puisque } 3{,}5\times 8 = 28.$$

Après calculs, il vient, pour tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$e_f(x) = -3{,}5 \iff -x^2+x+56 = 0.$$

Le discrimant du trinôme $-x^2+x+56$ est égal à 15^2 ; les racines réelles de ce trinôme sont donc 8 et -7. Étant donné que nous ne cherchons que les réels x *positifs* tels que $-x^2+x+56=0$, nous pouvons affirmer qu'il existe un unique élément x de $[0\,;+\infty[$ tel que $e_f(x) = -3{,}5$: c'est 8.

$$\boxed{\text{Le prix pour lequel l'élasticité vaut } -3{,}5 \text{ est donc } 800 \text{ €.}}$$

4. Comme 8,08 est assez proche de 8, l'approximation suivante est valable :

$$\frac{f(8{,}08)-f(8)}{f(8)} \approx e_f(8)\times\frac{8{,}08-8}{8}.$$

En notant p le pourcentage d'évolution cherché, il est donc possible d'affirmer :

$$p \approx \frac{8(-0{,}5\times 8-3)}{8+8}\times\frac{0{,}08}{8}.$$

Ainsi, après calculs et car $56\div 16 = 3{,}5$:

$$\boxed{p \approx -3{,}5\,\%.}$$

Ainsi, lorsque le prix passe de 800 € à 808 €, la demande diminue d'environ 3,5 %.

5. $\boxed{\text{Les résultats des deux questions précédentes sont cohérents}}$. En effet, on sait que $e_f(x)$ est une bonne approximation de la variation relative de f lorsque la variable augmente de 1 % à partir de x. Ici, x augmente de 1 % puisqu'il passe de 8 à 8,08, or on a trouvé précédemment : $e_f(8) = -3{,}5$.

Exercice 3

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un développement limité de f en 0, d'ordre 2. Pour tout réel x, nous avons plus précisément :

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Le calcul des dérivées successives de f permet d'établir, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = (1-x^2)e^{-x} \text{ et } f''(x) = (x^2-2x-1)e^{-x}.$$

Il vient ainsi, après remplacement :

$$f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Une approximation polynomiale de f de degré 2 au voisinage de 0 est donc :

$$\boxed{f(x) \approx 1 + x - \frac{x^2}{2}.}$$

2. Comme 0,2 est assez proche de 0, on peut utiliser l'approximation précédente et écrire :

$$f(0{,}2) \approx 1 + 0{,}2 - \frac{0{,}2^2}{2} \text{ puis } f(0{,}2) \approx 1{,}2 - \frac{0{,}04}{2} \text{ et enfin } \boxed{f(0{,}2) \approx 1{,}18}.$$

3. On cherche à évaluer la quantité $\dfrac{f(0{,}2) - f(0)}{f(0)}$. Grâce à la question précédente, et comme $f(0) = 1$, nous pouvons écrire :

$$\frac{f(0{,}2) - f(0)}{f(0)} \approx \frac{1{,}18 - 1}{1} \text{ et donc } \frac{f(0{,}2) - f(0)}{f(0)} \approx 0{,}18.$$

$\boxed{\text{La variation } v \text{ cherchée est donc approximativement égale à } 18\,\%.}$

Note : dans cette question, il n'est pas possible d'utiliser directement la formule avec l'élasticité. On aurait en effet à diviser par 0, ce qui n'est pas permis.

Exercice 4

Définissons les fonctions f et g par $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = 1 - e^x$ pour tout x de $]-1\,;1[$. Ces deux fonctions sont dérivables sur leur domaine de définition ; elles admettent donc chacune un développement limité à l'ordre 1 en 0 qui s'écrit respectivement :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon_1(x) \text{ et } g(x) = g(0) + g'(0)x + x\varepsilon_2(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Pour tout x de $]-1\,;1[$, on obtient $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $g'(x) = -e^x$. Il vient donc :

$$f(x) = x + x\varepsilon_1(x) \text{ et } g(x) = -x + x\varepsilon_2(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Ainsi, pour tout réel x non nul de $]-1\,;1[$, nous avons :

$$\frac{\ln(1+x)}{1-e^x} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + x\varepsilon_1(x)}{-x + x\varepsilon_2(x)} = \frac{1 + \varepsilon_1(x)}{-1 + \varepsilon_2(x)}, \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

On peut donc affirmer :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{1-e^x}\right) = -1.}$$

Exercice 5

1. La fonction D est dérivable sur $]5\,;+\infty[$ et est à valeurs strictement positives. La fonction marginale de D est égale à la dérivée de D, définie pour p dans $]5\,;+\infty[$ par $\boxed{D'(p) = \dfrac{-100}{(p-5)^2}}$.

Pour tout p de $]5\,;+\infty[$, on sait que $e_D(p)$ vaut $\dfrac{D'(p)}{D(p)}p$. Nous avons donc, tous calculs effectués : $\boxed{e_D(p) = \dfrac{p}{5-p}}$ quel que soit p dans $]5\,;+\infty[$.

2. L'élasticité de D est une fonction dérivable sur $]5\,;+\infty[$ et l'expression de sa dérivée est $\dfrac{5}{(p-5)^2}$ pour tout réel p de $]5\,;+\infty[$. Ainsi, la dérivée de e_D est strictement positive sur $]5\,;+\infty[$. On en déduit que $\boxed{\text{l'élasticité de } D \text{ est une fonction croissante}}$.

3. Comme 10,5 est relativement proche de 10, nous pouvons utiliser l'approximation :

$$D(10{,}5) - D(10) \approx D'(10) \times 0{,}5.$$

Après calculs, nous obtenons :

$$\boxed{D(10{,}5) - D(10) \approx -2}.$$

4. L'élasticité est une bonne approximation du quotient de la variation relative de f par la variation relative de p. Il s'agit donc de déterminer les réels p strictement supérieurs à 5 vérifiant :

$$e_D(p) \approx \frac{40\,\%}{30\,\%}, \text{ ou encore : } \frac{p}{p-5} \approx \frac{4}{3}.$$

Tous calculs effectués, nous obtenons : $\boxed{p \approx 20}$.

Exercice 6

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Il est donc possible d'écrire l'approximation affine suivante, valable lorsque x est assez proche de 0 :

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x.$$

D'autre part, pour tout réel x, nous avons $f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$. L'approximation devient donc :

$$\boxed{f(x) \approx \frac{3}{2} + \frac{x}{4}} \text{ puisque } f(0) = \frac{3}{2} \text{ et } f'(0) = \frac{1}{4}.$$

2. Le réel 0,1 étant proche de 0, on peut utiliser l'approximation précédente et écrire ainsi :

$$f(0{,}1) \approx \frac{3}{2} + \frac{0{,}1}{4}.$$

Après calculs, nous obtenons : $\boxed{f(0{,}1) \approx 1{,}525}$.

Exercice 7

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbb{R}$, il existe une fonction ε vérifiant, pour tout réel x :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}}{4!}x^4 + x^4\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Les dérivées successives de f se calculent aisément. Pour tout réel x, il vient :

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ ainsi que } f''(x) = f(x),\ f^{(3)}(x) = f'(x) \text{ et } f^{(4)}(x) = f(x).$$

On peut donc écrire, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Lorsque x est suffisamment proche de 0, nous avons donc :

$$\boxed{f(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.}$$

Exercice 8

1. Par opérations usuelles sur des fonctions de référence, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. Il existe donc une fonction ε vérifiant, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

On calcule les dérivées successives de f. Pour tout réel x, il vient :

$$f'(x) = 1 + (x-1)e^x \text{ ainsi que } f''(x) = xe^x \text{ et } f^{(3)}(x) = (x+1)e^x.$$

On peut donc écrire, après remplacement :

$$\boxed{f(x) = \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.}$$

2. La limite à déterminer est $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x^3}\right)$ et la question précédente assure que, pour tout réel x non nul, on a l'égalité :

$$\frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{6} + \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(x-2)e^x + x + 2}{x^3}\right) = \dfrac{1}{6}.}$

Exercice 9

1. Par composition, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1\,;1[$. Il existe donc une fonction ε vérifiant, pour tout x de $]-1\,;1[$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

On calcule les dérivées successives de f. Pour tout réel x appartenant à $]-1\,;1[$, il vient :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ ainsi que } f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

On peut donc écrire, étant donné que $f'(0) = 1$ et $f''(0) = -1$:

$$\boxed{f(x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.}$$

2. D'après la question précédente, pour tout réel x de $]-1\,;1[$ différent de 0 :

$$\frac{f(x)-x}{xf(x)} = \frac{-\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}{x\left(x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)} = \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon(x)}{1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon(x)}, \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-x}{xf(x)}\right) = \frac{-1}{2}.}$

Exercice 10

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition. Il existe donc une approximation affine de f en 1, notée $\widehat{f_1}$, définie pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\widehat{f_1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1).$$

En écrivant $f(x)$ sous la forme $e^{x\ln x}$ pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, nous obtenons :

$$\forall x \in\,]0\,;+\infty[,\ f'(x) = (1+\ln x)x^x.$$

Nous avons donc, après calculs :

$$\forall x \in\,]0\,;+\infty[,\ \widehat{f_1}(x) = x.$$

Sachant que $f(x)$ vaut approximativement $\widehat{f_1}(x)$ lorsque x est au voisinage de 1, on peut en déduire $f(0{,}9) \approx 0{,}9$ et donc : $\boxed{(0{,}9)^{0{,}9} \approx 0{,}9.}$

Exercice 11

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions usuelles qui le sont. Pour tout réel x, on a :

$$\boxed{f'(x) = (x-1)e^{-x}.}$$

2. Vu que 0,06 est relativement proche de 0, on peut utiliser l'approximation affine $\widehat{f_0}$ de f en 0, définie pour tout réel x par $\widehat{f_0}(x) = f(0) + f'(0)x$, c'est-à-dire $\widehat{f_0}(x) = -x$. On peut donc affirmer que $\boxed{f(0{,}06) \text{ est proche de } -0{,}06.}$

3. L'élasticité e_f de la fonction f est définie pour tout réel x non nul par :

$$e_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}x$$

Après calculs non détaillés ici, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, e_f(x) = 1 - x.}$$

4. En notant v la variation cherchée, on a l'approximation :

$$v \approx e_f(3) \times 4\,\%.$$

Étant donné que $e_f(3)$ vaut -2, on obtient : $\boxed{v \approx -8\,\%}$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition, et donc en particulier en 9. Il est donc possible d'écrire, dès que h est suffisamment proche de 0 :

$$f(9+h) \approx f(9) + f'(9)h.$$

Comme $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout réel x strictement positif, on obtient :

$$f(9+h) \approx 3 + \frac{h}{6}.$$

En particulier, si h vaut 0,03 :

$$f(9+0{,}03) \approx 3 + \frac{0{,}03}{6}.$$

Conclusion : $\boxed{\sqrt{9{,}03} \approx 3{,}005}$.

Exercice 13

Notons f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$; posons également $a = 3$ et $h = 0{,}05$. Comme f est dérivable en a et que h est suffisamment proche de 0, on peut écrire :

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h.$$

Comme $f'(x) = 3x^2$ pour tout réel x, on obtient :

$$(a+h)^3 \approx a^3 + 3a^2h.$$

Effectuons les applications numériques :

$$(3{,}05)^3 \approx 3^3 + 3 \times 3^2 \times 0{,}05.$$

Conclusion : $\boxed{(3{,}05)^3 \approx 28{,}35}$.

Exercice 14

1. La productivité moyenne f_M de l'entreprise est définie par $f_M(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ pour tout x de $]0\,;6]$. Nous avons donc :

$$\boxed{\forall x \in \,]0\,;6],\, f_M(x) = 3x - \frac{x^2}{3}.}$$

2. La fonction f est dérivable sur $]0\,;6]$ et pour tout x de cet ensemble, nous avons :

$$f'(x) = 6x - x^2.$$

L'élasticité e_f de la productivité est définie par $e_f(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}x$ pour tout réel x de $]0\,;6]$. Après calculs, nous obtenons :

$$\boxed{\forall x \in \,]0\,;6],\, e_f(x) = \frac{18-3x}{9-x}.}$$

Cette élasticité est dérivable sur $]0\,;6]$ et sa dérivée vérifie :

$$\forall x \in \,]0\,;6],\, {e_f}'(x) = \frac{-9}{(9-x)^2}.$$

Il est clair que ${e_f}'$ est strictement négative : $\boxed{e_f \text{ est donc strictement décroissante}}$.

3. En notant v la variation cherchée, on a l'approximation :

$$v \approx e_f(5) \times 1\,\%.$$

Étant donné que $e_f(5)$ vaut 0,75, on obtient : $\boxed{v \approx 0{,}75\,\%}$.

Exercice 15

1. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, il existe une fonction ε vérifiant, pour tout réel x :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

On calcule les dérivées successives de f. Pour tout réel x, il vient :

$$f'(x) = -3e^{3x} \text{ ainsi que } f''(x) = -9e^{3x}.$$

On peut donc écrire, étant donné que $f'(0) = -3$ et $f''(0) = -9$:

$$\boxed{f(x) = -3x - \frac{9}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.}$$

2. La limite à déterminer est $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{f(x)}{2x^2}\right)$ et la question précédente assure que, pour tout réel x non nul, on a l'égalité :

$$\frac{-3x - \frac{9}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)}{2x^2} = \frac{-3}{2x} - \frac{9}{4} + \frac{\varepsilon(x)}{2}, \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1-e^{3x}}{2x^2}\right) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1-e^{3x}}{2x^2}\right) = +\infty.}$