Examen du 2 février 2011, 9h–11h

Durée 2h. Les documents et calculatrices sont interdits.

La qualité de la rédaction et de la présentation entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 Soit la fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ définie par

$$f(x, y) = xy - yx^3 - y^2.$$

1. Calculer le gradient et la matrice hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Écrire le développement limité d'ordre 1 de f au point $(1, 1)$.
3. En déduire l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1, 1, -1)$.
4. Écrire le développement limité d'ordre 2 de f au point $(1, 1)$.
5. En déduire la position du graphe par rapport au plan tangent au voisinage du point $(1, 1, -1)$.
6. Montrer que f n'est ni majorée ni minorée sur $\mathbb{R}^2$.
7. Déterminer les cinq points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$ et leur nature.
8. f est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exercice 2 Soient les fonctions f et g définies par

$$f(x, y) = \ln(2 - x^2 - y^2) - y^2 + \ln x, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Partie 1 :

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{C}$ de f et montrer que c'est un sous-ensemble convexe et borné de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui est concave sur son domaine de définition.
3. Trouver les points critiques de f sur $\mathcal{C}$ et leur nature.

Partie 2 :

On cherche maintenant à optimiser f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

1. Tracer sur un même dessin le domaine de définition de f et l'ensemble défini par la contrainte $g(x, y) = 0$.
2. Montrer qu'il n'y a pas de point critique de seconde espèce sous la contrainte $g(x, y) = 0$.
3. Montrer qu'il y a un seul point critique de première espèce sous la contrainte $g(x, y) = 0$.
4. Montrer que le point critique sous la contrainte est un extremum local, dont on précisera la nature. Préciser la valeur de f en ce point. *Indication : au point critique, on doit trouver que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ vaut -7 .*
5. On définit la fonction ϕ sur l'intervalle $]0, 1]$, par

$$\phi(x) = \ln x + x^2 - 1.$$

Tracer le tableau de variations de ϕ . En déduire que l'extremum local est global, en justifiant votre réponse.