

Analyse réelle et Optimisation

*La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Tous les documents et calculatrices sont interdits.
Le barème est indicatif. Durée : 1H30*

Questions de cours (3 Points)

1. Donner la définition d'une fonction convexe et donner les deux caractérisations vues en cours sur leurs dérivées f' et f'' .
2. Énoncer la formule de Taylor d'une fonction f à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) en précisant les hypothèses utilisées.
3. Calculer l'élasticité de la fonction $f(x) = e^{-1/x}$.

Exercice 1 (4 Points)

On considère les espaces $A = \{\vec{u} \mid \|\vec{u}\| \in [-1; 1]\}$ et $B = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid e^{|\vec{v}|} < 1\}$.

1. Après avoir rappelé la définition de la norme d'un vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2)$, donner une autre écriture pour A.
2. En déduire de manière succincte la nature de l'ensemble A : ouvert ? fermé ? borné ? compact ? convexe ?
3. A quoi correspond la frontière de A ?
4. Expliciter B, et donner la représentation graphique de l'ensemble B dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 2 (5 Points)

Soit f la fonction de deux variables définie par : $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$.

On considère les ensembles de niveau de f par : $E_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = k, k \in \mathbb{R}^*\}$.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}$.
2. Que pouvez vous en déduire sur les espaces E_k ?
3. Déterminer $E_{\frac{1}{2}}$.
4. Tracer $E_{\frac{1}{2}}$, courbe de niveau $\frac{1}{2}$ de f .
5. En déduire de manière succincte la nature de l'ensemble $E_{\frac{1}{2}}$: ouvert ? fermé ? borné ? compact ? convexe ?
6. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \frac{x}{2})$ et en déduire que f n'est pas continue en $\{(0, 0)\}$.

Exercice 3 (8 Points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^x - 1}{e^x - e} = \frac{g(x)}{h(x)}$.

1. Donner D_f , domaine de définition de f , et dire s'il est convexe ou non.
2. La fonction f admet-elle un développement limité d'ordre 2 au point 1 ?
3. Les fonctions g et h admettent-elles un développement limité d'ordre 2 au point 1 ?
4. Calculer, s'ils existent, les $DL_2(1)$ des fonctions g et h .
5. En déduire $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
6. La fonction g est-elle convexe ? La fonction h est-elle convexe ?
7. Qu'en déduire sur la convexité de la fonction f ?