Université Paris-Dauphine Année 2005-2006
UFR GEA 1er cycle

Contrôle continu n° 1 : 2 décembre 2005

Les documents et calculatrices sont interdits. La qualité de rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 Soient $b > a > 0$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ et convexe sur $[a, b]$.

1. Rappelez la définition de f est convexe sur $[a, b]$.
2. En déduire que

$$\forall (Q, Q_0) \in [a, b]^2, \qquad \frac{f(Q)}{Q} - \frac{f(Q_0)}{Q_0} \geqslant \left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right)\left(f'(Q_0) - \frac{f(Q_0)}{Q_0}\right). \tag{1}$$

3. Considérons un bien A dont le coût total de fabrication est lié à la quantité produite $Q \in [a, b]$ par la relation $C = f(Q)$.
   (a) Rappelez la définition du coût moyen et du coût marginal.
   (b) On suppose qu'il existe une quantité $Q^\star$ pour laquelle le coût moyen et le coût marginal s'égalisent. Déduire de (1) que le coût moyen atteint son minimum en $Q^\star$.

Exercice 2 Soit $f : x \mapsto xe^{x^2+1/x}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Calculer les limites aux bornes de l'intervalle.
3. Soit le polynôme $g(x) = x + 2x^3 - 1$. Montrer qu'il existe un unique réel a dans $\mathbb{R}^+$ tel que $g(a) = 0$. Vérifier que $a \in]0, 1[$.
4. En déduire le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$.
5. Donner le développement limité de f au point $x = 1$ à l'ordre 2.
6. En déduire la position de la tangente de f au voisinage du point $x = 1$.
7. Montrer que f est convexe sur $[1, +\infty[$.

Exercice 3 Représenter graphiquement les ensembles suivants. On précisera si ils sont bornés, convexes et compacts (on demande une démonstration).

1. $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 < 0 \text{ et } -2 < x + y \leqslant 2\}$
2. $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y + 1 < 0 \text{ ou } y \geqslant 0\}$
3. $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant |2x - 2| < 1\}$