

Test du 24 novembre 2006

Durée 1h30, les documents et calculatrices sont interdits.

La qualité de rédaction et de la présentation entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*N'oublier pas de marquer le numéro de votre groupe.
Les 3 exercices sont indépendants.*

Exercice 1.

- 1) Vérifier que la fonction ($x \mapsto \ln x$) est concave sur son ensemble de définition, et en déduire que

$$\forall x > 0, \quad \ln x \leq x - 1.$$

Dans toute la suite, on étudie la fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$.

- 2) Déterminer l'ensemble de définition de f .
3) Montrer que f est \mathcal{C}^2 sur son ensemble de définition, et calculer sa dérivée.
4) Ecrire la formule de Taylor-Young pour f à l'ordre 2 au point $x_0 = 1$. En déduire l'équation de la tangente en ce point et la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.
5) Quelle est l'approximation affine de f au voisinage de 1 ? En déduire une valeur approchée de $f(1,01)$.
6) Montrer que f peut se prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = -1$. On note encore f son prolongement.
7) Montrer que la fonction ainsi prolongée est dérivable à droite en 0. La dérivée est-elle continue à droite en 0 ?
8) Etudier les variations de f et tracer sommairement sa courbe représentative en indiquant les tangentes aux points $(0, f(0))$ et $(1, f(1))$.
9) En fonction des valeurs de y , discuter le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$.

Exercice 2. Déterminer toutes les fonctions $f :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$, de classe C^1 dont l'élasticité en x vaut x pour tout $x > 0$.

Exercice 3. On pose :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \quad \text{et} \quad y^2 - 2y \leq 3 - x^2\}$$

et

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 1| < 3 \quad \text{et} \quad |y| \geq 2\}.$$

- 1) Représenter graphiquement A et B .
2) Ces domaines sont-ils bornés ? Justifier.
3) Sont-ils ouverts ? fermés ? (*Dans cette question, et uniquement dans cette question, on demande de répondre sans donner de justification*).