Polycopié UE 15 : Outils Mathématiques

Denis Pasquignon
Université Paris-Dauphine

11 août 2014

Table des matières

Chapitre 1

Raisonnements

1.1 Les quantificateurs

1.1.1 Notations : Les ensembles classiques de nombres

Nous notons $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, comme par exemple 1 ou 23, on écrit $23 \in \mathbb{N}$. L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$, par exemple $-3 \in \mathbb{Z}$ mais aussi $4 \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $\mathbb{N}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$. Enfin, l'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$, il comprend tous les nombres comme π ou $45/789$. On note $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^-$) l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls (resp. négatifs ou nuls). On désigne par $\mathbb{R}^*$ l'ensemble de tous les nombres réels non nuls. Les intervalles sont un type d'ensemble très important en analyse :

Définition 1.1.1 *Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient tout nombre réel compris entre deux de ses éléments. Soit $a \leq b$, il existe 10 formes possibles pour un intervalle :*

1. $\emptyset$
2. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leq x \leq b\}$
3. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leq x < b\}$
4. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x \leq b\}$
5. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x < b\}$
6. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leq x\}$
7. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x\}$
8. $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leq b\}$
9. $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x < b\}$
10. $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Exemple 1.1.2

$$]-\infty, 3] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leq 3\}, \quad]2, 4] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 2 < x \leq 4\}$$

1.1.2 Définitions

Une proposition mathématique est un énoncé qui est soit vrai soit faux. Pour écrire une proposition mathématique, on utilise des quantificateurs. Par exemple pour tout réel x, on a

$x^2+x+1 \geq 0$. Dans les formules, "pour tout" se note "$\forall$", et "x est dans $\mathbb{R}$" se note "$x \in \mathbb{R}$". La proposition précédente s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2+x+1 \geq 0.$$

De même il existe au moins un réel x tel que $x^2+x+1 \geq 0$. Dans les formules, "il existe" se note "$\exists$". La proposition précédente s'écrit :

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2+x+1 \geq 0.$$

Plus généralement,

Définition 1.1.3 *Soit E un ensemble et $P(x)$ une proposition qui, pour toute valeur donnée à x dans E est soit vrai soit faux. On a*

- *La proposition : ≪ Pour tous les éléments x de E, la proposition $P(x)$ est vraie ≫ s'écrit en abrégé :*
$$\forall x \in E, \ P(x).$$
- *La proposition : ≪ il existe au moins un élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie ≫ s'écrit en abrégé :*
$$\exists x \in E, \ P(x).$$
- *La proposition : ≪ il existe un et un seul élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie ≫ s'écrit en abrégé :*
$$\exists! x \in E, \ P(x).$$

$\forall$ s'appelle le quantificateur universel et $\exists$ s'appelle le quantificateur existentiel.

Importance de l'ordre : dans un énoncé comprenant plusieurs quantificateurs, l'ordre dans lequel ils interviennent est important. Considérons les deux propositions suivantes :

P1 : "Pour tout réel x, il existe un entier naturel n tel que $x \leq n$".
P2 : "Il existe un entier naturel n tel que, pour tout réel x, $x \leq n$"

La première proposition est vraie : pour n'importe quel réel donné, on peut trouver un entier naturel qui est plus grand que ce réel. En revanche, la seconde proposition est fausse : il n'existe pas d'entier naturel qui soit plus grand que tous les réels (si je fixe un entier naturel n, il y aura toujours des réels x tels que $x > n$, par exemple $x = n+1$). Le problème vient du fait que dans la première proposition, n peut dépendre de x, alors que dans la deuxième proposition, le n ne dépend pas de x.

Exemple 1.1.4

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ x^2+1 > 0$ *est vraie et signifie*

quelque soit x réel, x^2+1 est strictement positif.

Exemple 1.1.5

$\exists x \in [2,4], \ \ x > 3$ *est vraie et signifie*

il existe x compris entre 2 et 4 tel que x soit strictement supérieur à 3.

Mais

$\forall x \in [2,4], \ \ x > 3$ *est faux.*

Exemple 1.1.6 Ordre des quantificateurs *:*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x = y^2 \text{ est vraie et signifie}$$

quelque soit x réel positif, il existe un réel y dont le carré vaut x.

(y est $\sqrt{x}$ ou $-\sqrt{x}$, le réel y dépend de x).
Par contre $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \ x = y^2$ est faux.

1.1.3 Implication et équivalence

Soit P et Q deux propositions mathématiques , la notation $P \Rightarrow Q$ se lit P implique Q et si $P \Rightarrow Q$ est vraie, cela signifie que si P est vrai, alors Q est vrai.

Si P implique Q, on dit qu'une condition **nécessaire** pour que P soit vrai est que Q soit vrai ou aussi une condition **suffisante** pour que Q soit vrai est que P soit vrai.

On dit que P et Q sont équivalentes si P implique Q et Q implique P. On appelle réciproque de $P \Rightarrow Q$ la proposition $Q \Rightarrow P$.

Exemple 1.1.7

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ (x + 4 \geq 8 \Rightarrow x > 0) \text{ est vraie et signifie}$$

quelque soit x réel, si $x + 4 \geq 8$ est vraie, alors x est strictement positif.

Exemple 1.1.8

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ (x > 0 \Rightarrow x^3 > 8) \text{ est fausse.}$$

En effet 1 est strictement positif et pourtant $1^3 = 1$ est inférieur à 8.

Exemple 1.1.9 *Soit*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ P(x) = ax^2 + bx + c,$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$. P est une fonction polynomiale.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ alors

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \neq 0 \text{ est vraie et signifie}$$

une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme P n'ait pas de racines est que le réel Δ soit strictement négatif.

ou encore

Pour que le polynôme P n'admette pas de racine, il faut et il suffit que le réel Δ soit strictement négatif.

On a aussi

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0 \text{ est vraie et signifie}$$

Pour que le polynôme P admette au moins une racine, il faut et il suffit que le réel Δ soit positif.

Exemple 1.1.10

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ (x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2) \text{ est vraie}$$

1.2 Quelques formes de raisonnement

1.2.1 Par contre-exemple

On utilise un contre-exemple pour infirmer une propriété présentée comme générale. Par exemple soit P la proposition

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+, \quad \sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Cette proposition est fausse puisque pour $x = 4$ et $y = 9$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ et $\sqrt{x+y} = \sqrt{13}$.

1.2.2 Par contraposée

Soient P et Q deux propositions. Pour montrer que la proposition "$P \Rightarrow Q$" est vraie, il est équivalent de montrer "$(Non\ Q) \Rightarrow (Non\ P)$". La proposition *non* P est la négation de P. Ainsi P est vraie si et seulement si *non* P est fausse.

Par exemple si P="le sol est sec" et Q="il n'a pas plu". Dire que "$P \Rightarrow Q$" soit "si le sol sec alors il n'a pas plu" peut se démontrer en disant que si $Non\ Q$ (c'est-à-dire, "s'il a plu"), alors $Non\ P$ (c'est-à-dire "le sol est mouillé").

Un autre exemple, soit x un réel fixé, on considère la proposition

$$\forall \epsilon > 0, \quad |x| < \epsilon \Rightarrow x = 0.$$

On note P la proposition $\forall \epsilon > 0, \quad |x| < \epsilon$ et Q la proposition $x = 0$. La négation de P est $\exists \epsilon > 0, \quad |x| > \epsilon$ et la négation de Q est $x \neq 0$. La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est

$$x \neq 0 \Rightarrow \exists \epsilon > 0, \quad |x| > \epsilon.$$

Or si x est non nul, $|x|$ est strictement positif. On pose $\epsilon = \frac{|x|}{2}$, ce réel ϵ est strictement positif et on a bien l'inégalité donc *non* Q est vraie. La contraposée est vraie donc $P \Rightarrow Q$ est vraie.

1.2.3 Par l'absurde

Pour montrer une proposition P, on suppose que P est fausse, et on cherche à aboutir à une contradiction.

Par exemple, on considère la proposition P

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x(x-1) + 9x - (x+5)(x+3) \neq 0.$$

La négation est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad x(x-1) + 9x - (x+5)(x+3) = 0.$$

Si la négation est vraie, il existe un réel x tel que $x(x-1) + 9x - (x+5)(x+3) = 0$. Or en développant cette expression, on obtient $-15 = 0$ ce qui est faux donc P est vraie.

1.2.4 Par récurrence

On se sert du raisonnement par récurrence pour montrer qu'une famille de propositions $P(n)$, indexée par des entiers naturels $n \in \mathbb{N}$, est vraie pour tout entier n. Le principe est de montrer

1. Initialisation : $P(0)$ est vraie,
2. Hérédité : Soit un entier $n \geq 0$, on suppose que si $P(n)$ est vraie (hypothèse de récurrence), alors $P(n+1)$ est vraie également.

Si on arrive à montrer que (1) et (2) sont vraies, alors la méthode de récurrence permet d'affirmer que $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.2.1 *on veut montrer que la somme S_n des n premiers entiers naturels est égale à $n(n+1)/2$. Appelons $P(n)$ cette proposition. Il est clair que P(1) est vraie, puisque $S_1 = 1 = 1(1+1)/2$. Supposons que P(n) soit vrai pour un certain n (hypothèse de récurrence), et montrons que P(n+1) l'est aussi. Comme $S_{n+1} = S_n + (n+1)$, on a, par hypothèse de récurrence,*

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Donc P(n+1) est vrai. Par récurrence on en déduit que P(n) est vrai pour tout n, c'est-à-dire que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 1.2.2 *Dans cet exemple, nous montrons que l'hérédité ne suffit pas c'est-à-dire on peut avoir $P(n)$ implique $P(n+1)$ vrai pour tout entier n et pourtant $P(n)$ est fausse. On considère la propriété*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) \ : \ 3 \textit{ divise } 4^n + 1.$$

Soit un entier n, on suppose que $P(n)$ est vrai. On a

$$4^{n+1} + 1 = 4 \times 4^n + 4 - 3 = 4(4^n + 1) + 3,$$

or par hypothèse de récurrence, 3 divise $4^n + 1$ donc $4(4^n + 1) + 3$ donc $P(n+1)$ est vraie. Par contre $P(0)$ est fausse car 3 ne divise pas 5. On ne peut donc pas conclure. On peut montrer que pour tout entier n, $P(n)$ est fausse.

1.3 Les ensembles

1.3.1 Union, Intersection, inclusion et produit cartésien

Un ensemble est une collection d'objets.

Le symbole $\emptyset$ désigne l'ensemble vide, qui n'a aucun élément. Un ensemble qui ne contient qu'un seul élément s'appelle un singleton.

Si A et B sont deux ensembles , la réunion de A et de B notée $A \cup B$ qui se lit A union B est l'ensemble formé par les éléments qui appartiennent à A ou à B.

$$\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$$

De même, l'intersection de deux ensembles A et B se note $A \cap B$ et se lit A inter B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B. Par exemple,

$$\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}, \quad]-\infty, 1] \cap]2, 4] = \emptyset, \quad \{1,4,6\} \cap \{1,4,5\} = \{1,4\}, \quad]-\infty, 1] \cap]2, 4] = \emptyset$$

On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tous les éléments de A sont inclus dans B. On note $A \subset B$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}.$$

Soit E un ensemble, et A une partie de E c'est-à-dire $A \subset E$, on appelle complémentaire de A dans E noté $\overline{A}$ l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. Par exemple le complémentaire de $\mathbb{R}^+$ est $\mathbb{R}^{-*}$.

Le produit cartésien de A et de B, qui se note $A \times B$ et se lit A croix B, est l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$. L'ordre est important : l'ensemble $A \times B$ n'est égal à $B \times A$ que si $A = B$. Dans ce cas on note $A^2 = A \times A$.

1.4 Compléments sur les réels

Manipulation du signe Σ

La somme de n nombres réels $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ se note $\sum_{k=1}^{n} x_k$. Le résultat dépend de n, on le notera donc S_n, mais ne dépend pas de k. On dit que k est un indice muet. On peut donc écrire

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

En particulier, si tous les x_k sont égaux à un réel a : $\sum_{k=1}^{n} a = na$ et $\sum_{k=0}^{n} a = (n+1)a$.

D'autre part : $\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i) = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i$ où tous les nombres sont des réels.

Formule du binôme

Pour tout entier naturel n non nul, le nombre $n!$ qui se lit factorielle n représente le produit des n premiers entiers.
Par convention $0! = 1$.

Combinaison

Pour $0 \leq k \leq n$, le nombre $\binom{n}{k}$ se lit k parmi n et vaut $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Proposition 1.4.1 Formule du binôme de Newton

$$\forall n \in I\!N^*,\ \forall (a,b) \in I\!R^2,\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}.$$

Chapitre 2

Etude de fonctions

Ce paragraphe rappelle les fonctions dites usuelles : valeur absolue, fonctions polynômes, exponentielle, logarithme et fonctions puissance.

2.1 Généralités sur les fonctions

2.1.1 Ensemble de définition

Définition 2.1.1 *Une* application f *est la donnée d'un* ensemble de départ*, d'un* ensemble d'arrivée*, et d'une* règle de calcul *qui associe à tout élément x de l'ensemble de départ un unique élément de l'ensemble d'arrivée, noté $f(x)$ et appelé image de x par f. La règle de calcul est notée $x \mapsto f(x)$.*
Le domaine de définition d'une fonction est l'ensemble des réels x pour lesquels le calcul de $f(x)$ est possible.

2.1.2 Continuité, dérivablité

Définition 2.1.2 *Soit x_0 un réel et soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$ qui contient x_0. La fonction f est continue en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

La fonction f est continue sur $]a, b[$ si la fonction f est continue en tout point de $]a, b[$. De plus la fonction f est continue à droite en a si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

et la fonction f est continue à gauche en b si

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Nous rappelons la notion de taux d'accroissement et de dérivée en un point :

Définition 2.1.3 *Soit a un réel et soit f une fonction définie sur une partie D qui contient a. On appelle taux d'accroissement de f en a, noté $\theta_a(x)$, la fonction quotient définie par*

$$\forall x \in D \setminus \{a\}, \ \ \theta_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La fonction f est dérivable en a si la fonction θ_a a une limite lorsque x tend vers a. On note $f'(a)$ cette limite.
On dit que f est dérivable sur D si f est dérivable en tout point de D et on note f' la fonction dérivée de f.

On rappelle les règle de dérivabilté :

Proposition 2.1.4 *Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un domaine D inclus dans $\mathbb{R}$, on a*

1. *Pour tout réel a, $f + ag$ est dérivable sur D et $(f + ag)' = f' + ag'$.*
2. *Le produit fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$.*
3. *Si la fonction g ne s'annule pas sur D, f/g est dérivable et $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.*
4. *Si la composée $f \circ g$ est définie sur D alors $f \circ g$ est dérivable et $(f \circ g)' = (f' \circ g) \times g'$.*

2.1.3 Fonctions bijectives

Définition 2.1.5 bijection
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On dit que f est bijective de I sur $f(I)$ ou est une bijection de I sur $f(I)$ si pour chaque $y \in f(I)$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet une unique solution $x \in I$.
Si f est bijective de I sur $f(I)$, on peut définir la fonction réciproque de f notée f^{-1} définie sur $f(I)$ par : pour chaque $y \in f(I)$, $f^{-1}(y)$ est l'unique solution dans I de l'équation $y = f(x)$.

Proposition 2.1.6 *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.*

2.1.4 Concavité

Définition 2.1.7 concavité
Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ c'est-à-dire une fonction deux fois dérivable sur I et dont la dérivée seconde est continue sur I, On dit que f est convexe sur I si pour tout réel $x \in I$, $f''(x) \geq 0$. De même on dit que f est concave sur I si pour tout réel $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.

Proposition 2.1.8 *Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$, alors*

$$\forall a \in I,\ \forall x \in I,\quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Cette inégalité exprime que le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes lorsque f est convexe.
De même soit f une fonction concave sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$, alors

$$\forall a \in I,\ \forall x \in I,\quad f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a).$$

2.2 Les fonctions usuelles

2.2.1 Valeur absolue

Définition 2.2.1 *Pour tout réel x, on appelle valeurs absolue de x le réel positif noté $|x|$ tel que*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Remarque 2.2.2 *$|x|$ représente la distance de x à 0.*

Proposition 2.2.3

$$\forall x \in I\!R,\ \forall \alpha \in I\!R^+,\quad |x| \leq \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha \Longleftrightarrow x \in [-\alpha, \alpha]$$

$$|x| > \alpha \Longleftrightarrow (x > \alpha\ \ ou\ x < -\alpha)$$

Théorème 2.2.4 Propriétés fondamentales

- *(1)*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0 \ \text{ et } \ |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0;$$
- *(2)*
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ |xy| = |x|\,|y|$$
- *(3) inégalités triangulaires :*
$$||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$
- **Valeur absolue et racine**
  - *(4)*
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x| \ \ \text{et} \ \ |x|^2 = x^2$$
  - *(5)*
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+,\ x^2 = a \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$$
  - *(6)*
  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq y^2 \Longleftrightarrow |x| \leq |y|$$
  - *(7)*
  $$\text{si } ab \geq 0,\ \sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$$

Proposition 2.2.5 *La fonction valeur absolue est*

- *définie, continue sur* $\mathbb{R}$
- *dérivable sur* $\mathbb{R}^*$
- *paire :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \ |-x| = |x|$
-
$$\lim_{x \to +\infty} |x| = \lim_{x \to -\infty} |x| = +\infty$$

2.2.2 Fonctions polynômes

Définition 2.2.6 La fonction puissance *Pour tout entier non nul* $n \in \mathbb{N}^*$*, la fonction puissance* f_n *est définie par*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_n(x) = x^n.$$
Pour $n = 0$*,* f_0 *est la fonction constante égale à 1.*

Proposition 2.2.7 Dérivée *Pour tout entier n, la fonction puissance est dérivable et*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ (x^n)' = nx^{n-1}$$

Exemple 2.2.8 $(x^2) = 2x$ *et* $(x^3)' = 3x^2$

Définition 2.2.9 Polynômes et Fraction rationnelle *Pour tout entier $n \in I\!N$, la fonction P est un polynôme si l'on peut écrire*

$$\forall x \in I\!R, \ \ P(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$$

où $(a_0, \cdots, a_n) \in I\!R^{n+1}$. Si $a_n \neq 0$, on dit que le degré de P est n.
Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes.

Exemple 2.2.10

$$\forall x \in I\!R, \ \ P(x) = 4 + 3x + 8x^3, \ \ et \ P'(x) = 3 + 24x^2$$

Exemple 2.2.11

$$\forall x \in I\!R \setminus \{1\}, \ \ F(x) = \frac{2x+1}{x-1} \ \ et \ F'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

2.2.3 Le logarithme

Définition 2.2.12 *La fonction logarithme népérien notée* ln *est définie sur $I\!R^{+*}$ et*

$$\forall x > 0, \ \ \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

La fonction ln *est la primitive de $\frac{1}{t}$ qui s'annule en 1 donc* ln *est continue, dérivable sur $I\!R^{+*}$*

Proposition 2.2.13 *On a les propriétés suivantes :*

1. $$\forall x > 0, \ \ (\ln)'(x) = \frac{1}{x}, \ \ (\ln)''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

   donc ln *est concave sur $I\!R^{+*}$*

2. $$\ln(1) = 0 \ \ et \ \ \ln(e) = 1$$

3. $$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty, \quad et \ \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

4. $$\forall x > 0, \ \ \forall y > 0, \ \ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

   On en déduit pour tous réels x et y strictement positifs

   $$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x), \ \ \ln(\frac{y}{x}) = \ln(y) - \ln(x)$$

Proposition 2.2.14 ln **est une bijection de $I\!R^{+*}$ sur** $I\!R$, *on en déduit qu'il existe une application réciproque de* ln *qui est l'exponentielle*

$$\forall x > 0, \ \ \forall y \in I\!R, \ \ \ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y.$$

Définition 2.2.15 logarithme en base $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ *On définit le logarithme en base a noté* log_a *par*

$$\forall x > 0,\ \ log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

log_a *est une bijection de* $\mathbb{R}^{+*}$ *sur* $\mathbb{R}$

$$\forall x > 0,\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ \ log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y.$$

Exemple 2.2.16 *exemple logarithmes décimaux avec* $a = 10$

$$\forall x > 0,\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ \ log_{10}(x) = y \Leftrightarrow x = 10^y.$$

2.2.4 La fonction exponentielle

Définition 2.2.17 *La fonction exponentielle est la fonction réciproque du logarithme népérien*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \forall y > 0,\ \ y = exp(x) = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y).$$

Proposition 2.2.18 *On a les propriétés suivantes :*

1. $$\forall x \in \mathbb{R},\ \ (exp)'(x) = e^x,\ \ (exp)''(x) = e^x.$$
   L'exponentielle est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.
2. $$e^0 = 1,$$
3. $$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0,\ \ \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$
4. $$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ \ e^{x+y} = e^x e^y\ \ \ e^{-x} = \frac{1}{e^x},\ \ (e^x)^y = e^{xy}.$$

2.2.5 La fonction puissance

Définition 2.2.19 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*, la fonction puissance* α *est défiie sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *par*

$$\forall x > 0,\ \ x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

Proposition 2.2.20 *On a les propriétés suivantes*

1. *La fonction puissance est définie, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}^{+*}$

$$\forall x > 0, \ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \ (x^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

2.

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & si\ \alpha > 0 \\ 1 & si\ \alpha = 0 \\ 0 & si\ \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & si\ \alpha > 0 \\ 1 & si\ \alpha = 0 \\ +\infty & si\ \alpha < 0 \end{cases}$$

Proposition 2.2.21 Croissances comparées *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ *et* $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$, *on a*

1.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty,$$

2.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$$

On en déduit

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0, \ \lim_{x\to0^+} |\ln(x)|^\alpha x^\beta = 0$$

Exemple 2.2.22

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^{3/2}} = +\infty,$$

Chapitre 3

Intégrale sur un segment

3.1 Définition de l'intégrale d'une fonction continue

3.1.1 Tableau des primitives usuelles à connaître

Fonction	Intervalle	Primitive
$\alpha \in I\!R^*$, $e^{\alpha x}$	$I\!R$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + c$
$a \in I\!R^{+*} \setminus \{1\}$, $a^x = e^{xLn(a)}$	$I\!R$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x + c$
$\alpha \in I\!R, \alpha \neq -1$, x^α	dépend de α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$1/x$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\ln(\|x\|) + c$

3.1.2 Définition de l'intégrale sur un intervalle fermé borné

Soit f **une fonction continue sur un intervalle** I (non vide et non réduit à un point) **de** $I\!R$.

D'après le théorème de Darboux, f admet une infinité de primitives sur I qui diffèrent entre elles d'une constante.

Donc, si F et G sont deux primitives de f sur I, il existe un réel c tel que :

$$\forall x \in I,\ G(x) = F(x) + c.$$

Par suite, $\forall a \in I$, $\forall b \in I, G(a) = F(a) + c$ et $G(b) = F(b) + c$.

En soustrayant membre à membre les deux égalités précédentes on obtient :

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a).$$

Autrement dit, le nombre réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive choisie. Cette remarque permet de donner la définition suivante :

Définition 3.1.1 *Soit f une fonction* **continue** *sur un intervalle I (non vide et non réduit à un point) de $I\!R$ et F une primitive quelconque de f sur I.*
Alors, $\forall (a,b) \in I^2$, le nombre réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive F choisie et s'appelle **intégrale définie de f entre les bornes a et b.**
On le note : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ ce qui s'énonce somme de a à b de $f(x)dx$.

Remarque 3.1.2 *Si $a < b$, on pourra raisonner sur $I = [a, b]$ et si $a > b$, $I = [b, a]$.*
Le nombre $\int_a^b f(x)dx$ est un réel qui dépend uniquement de la fonction f et des bornes a et b.
Dans cette écriture la variable x est muette : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$.

Remarque 3.1.3 *La définition donne : $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.*

3.1.3 Interpétation géométrique de la notion d'intégrale définie

On suppose le plan rapporté à un repère orthogonal (en général orthonormé). On choisit pour unité d'aire : l'aire du rectangle construit sur les vecteurs unités du repère et on construit la courbe représentative de f sur $[a, b]$. (on suppose ici $a < b$).

En particulier, si f **est une fonction constante sur** $[a, b]$ telle que : $\forall x \in [a, b],\ f(x) = c$ on a $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$. Ce résultat s'interprète comme l'aire d'un rectangle et nous admettrons que ce résultat se généralise comme suit :

Si f est une fonction **positive**, continue sur $[a, b]$ avec $a < b$, alors $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ du plan défini par $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$.

3.2 Propriétés de l'intégrale définie

3.2.1 Relation de Chasles

Théorème 3.2.1 Relation de Chasles. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors*

$$\forall (a, b, c) \in I^3, \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

L'ordre des réels a, b, c, est sans importance mais il ne faut pas sortir de l'intervalle I.

preuve Soient $(a, b, c) \in I^3$ et F une primitive de f sur I.

Par définition : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, $\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a)$ et $\int_c^b f(x)dx = F(b) - F(c)$. Le deuxième membre de la proposition s'écrit : $F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$ et vaut $F(b) - F(a)$ qui n'est autre que le premier membre.

Exemple 3.2.2 *Calculer $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{2} |x|\, dx$.*

3.2.2 Linéarité

Théorème 3.2.3 *Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I alors :*

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a, b) \in I^2,\ \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Cette propriété se généralise à toute combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions.

Exemple 3.2.4 *Calculer* $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{2x^5 - 3x^2 + \sqrt{x}}{x^{3/2}} dx.$

preuve Cette propriété découle de la linéarité de la dérivation.

Soient F et G des primitives de f et g sur I. Alors $\forall x \in I$,

$$(\alpha F + \beta G)'(x) = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

donc $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur I. En appliquant la définition de l'intégrale

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = (\alpha F + \beta G)(b) - (\alpha F + \beta G)(a) = \alpha[F(b) - F(a)] + \beta[G(b) - G(a)]$$

d'où la conclusion en réutilisant la définition de l'intégrale.

Remarque 3.2.5 *Ne pas confondre relation de Chasles et linéarité. Pour la relation de Chasles il y a une seule fonction et on " divise" l'intervalle d'intégration. Pour la linéarité il y a un seul intervalle et on " fractionne " la fonction.*

Remarque 3.2.6 Attention pour le produit

Si les deux fonctions f et g sont continues sur I, alors la fonction produit fg est continue sur I et on peut définir l'intégrale $\int_a^b f(x)g(x)dx$. Mais hélas, il n'y a pas de formule générale reliant l'intégrale $\int_a^b f(x)g(x)dx$ aux intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$. (On pourra dans certains cas utiliser une intégration par parties).

3.2.3 Croissance de l'intégrale

Dans chacune des propositions qui suivent, la relation d'ordre $a < b$ (c'est-à-dire les bornes sont dans le bon sens) influe sur le résultat. Ces propositions devront donc être utilisées avec une extrême prudence.

Théorème 3.2.7 *On a*
- *(1)* **Positivité** *Si f est continue et positive sur $[a, b]$, $a < b$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*
- *(2)* **Croissance** *f et g continues sur $[a, b]$ avec $a < b$ et $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.*

preuve
- Preuve de (1) La fonction f étant continue sur $[a, b]$, elle admet une primitive F sur $[a, b]$. Comme la dérivée f de F est positive sur $[a, b]$, on en déduit que F est croissante sur $[a, b]$. Par conséquent, si $a < b$ on a $F(a) \leq F(b)$, c'est-à-dire $F(b) - F(a) \geq 0$, d'où le résultat.
- Preuve de (2) En appliquant le résultat (1) à la fonction $(g - f)$ qui est positive sur $[a, b]$, on obtient le résultat (2) en utilisant la linéarité de l'intégrale.

Exemple 3.2.8 *Sans calculs, on peut dire que* $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{ln(x)}{x} dx \geq 0$ *car* $\forall x \in [1, 2]$, $\displaystyle\frac{ln(x)}{x} \geq 0$.

3.3 Calculs d'intégrales définies

3.3.1 Calcul "à vue" à l'aide du tableau des primitives usuelles

Pour calculer une intégrale donnée on peut commencer, si l'occasion se présente, par la couper en plusieurs intégrales en utilisant, selon la fonction à intégrer, soit la relation de Chasles, soit la linéarité.

Si la fonction dont on cherche à calculer l'intégrale est une fonction usuelle, pour laquelle on connaît une primitive, il suffit d'appliquer la définition.

3.3.2 Intégration par parties

Cette méthode part d'une idée toute simple, utiliser la dérivée d'un produit, et donne un résultat très puissant permettant de calculer de nombreuses intégrales.

Théorème 3.3.1 *Soient u et v* **deux fonctions de classe** C^1 *sur un intervalle I, alors :*

$$\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Ce théorème est intéressant lorsque l'intégrale du second membre est plus facile à calculer que l'intégrale du premier membre.

preuve La fonction uv est une primitive de $(uv)' = u'v + uv'$ sur I. Comme toutes les fonctions u, v, u', v' sont continues sur I, $(uv)'$ est continue sur I et on a :

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)]dx = [u(x)v(x)]_a^b$$

d'où le résultat, en séparant en deux l'intégrale du premier membre à l'aide de la linéarité.

Exemple 3.3.2 *Calculer* $I_4 = \int_0^1 xe^x dx$.

On peut aussi utiliser une intégration par parties, dans le cas particulier où il n'y a qu'une seule fonction en posant $v'(x) = 1$.

Exemple 3.3.3 *Calculer* $I_5 = \int_2^3 ln(x)dx$.

Comment utiliser une intégration par parties ?

- Commencer par vérifier que les fonctions u et v choisies sont bien **de classe** C^1 **sur** $[a, b]$.
- Quelle fonction faut-il dériver ? Quelle fonction faut-il "primitiver" ?
  En principe on choisit pour v' une fonction pour laquelle on connaît une primitive. Lorsqu'une seule fonction est dans ce cas, le choix est simple, sinon il faut parfois essayer plusieurs possibilités. **L'objectif est toujours d'obtenir une nouvelle intégrale plus facile à calculer que l'intégrale initiale.** Plusieurs intégrations par parties successives sont parfois nécessaires pour arriver au résultat.

3.3.3 Changement de variable

Encore une idée toute simple : utiliser la dérivée d'une fonction composée.

Théorème 3.3.4 Changement de variable *Soient g une fonction de classe C^1 sur un intervalle I contenant a et b, et f une fonction continue sur un intervalle J tel que $g(I) \subset J$. Alors :*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Comme pour l'intégration par parties, l'intérêt de ce théorème est de transformer l'intégrale étudiée en une intégrale plus facile à calculer.

Ce théorème est très facile à appliquer, si l'on reconnaît dans la fonction à intégrer une fonction de la forme $f(g(x))g'(x)$. **Il reste à vérifier que g est de classe C^1.**

On pose alors $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ et on applique la proposition sans oublier de changer aussi les bornes. On se trouve dans cette situation, par exemple, si la fonction à intégrer s'écrit : $u'e^u$, $u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$, $\frac{u'}{u}$ et plus généralement $u'\phi(u)$ (avec ϕ continue).

preuve La fonction g est continue sur I donc l'image $g(I)$ est un intervalle .

- **Montrons que l'intégrale du second membre est bien définie**. D'après les hypothèses, la fonction f est continue sur J donc sur $g(I)$ et par suite l'intégrale qui figure au second membre est bien définie puisque $g(a)$ et $g(b)$ appartiennent à $g(I)$.
- **Montrons que l'intégrale du premier membre est bien définie**. La fonction $(f \circ g)$ est continue sur I comme composée de fonctions continues, et comme g est de classe C^1 sur I, il en résulte que la fonction produit $(f \circ g)g'$ est continue sur I, ce qui assure l'existence de l'intégrale du premier membre.
- **Calculons l'intégrale du deuxième membre**. Soit F une primitive de f sur J (F existe car f continue sur J), alors :
$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b)) - F(g(a)).$$
- **Calculons l'intégrale du premier membre**. Posons $h = F \circ g$, alors h est de classe C^1 sur I comme composée de fonctions de classe C^1 (F est C^1 sur J, donc sur $g(I) \subset J$, puisque sa dérivée f est continue sur J). On a donc : $\forall x \in [a,b]$, $h'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$ par suite :
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b h'(x)dx = h(b) - h(a) = F(g(b)) - F(g(a))$$
d'où l'égalité des deux intégrales.

Exemple 3.3.5 *Calculer* $I_6 = \int_0^1 x(1+x^2)^{-3}dx.$

Changement de variable affine

Un changement de variable est dit affine s'il est de la forme $g(x) = cx + d$ avec $c \neq 0$

Un tel changement de variable vérifie les hypothèses nécessaires pour appliquer le théorème. En effet g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$!

Exemple 3.3.6 *Calculer* $I_7 = \int_0^1 \ln(2x+3)dx.$

Théorème 3.3.7 Fonctions paires ou impaires.
Soient $a \in R^{+*}$ et f une fonction continue sur $[-a,a]$
- *Si f est paire, alors* $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$ *et donc* $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
- *Si f est impaire, alors* $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$ *et donc* $\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$

Une simple représentation graphique de f permet de bien visualiser ces résultats.

preuve Avec la relation de Chasles : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$.

Dans $\int_{-a}^{0} f(x)dx$, posons : $u = -x$ (changement affine), $du = -dx$ et on obtient : $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = \int_{0}^{a} f(-u)du = \int_{0}^{a} f(-x)dx$ car u est une variable muette.

D'où les résultats, suivant que $f(-x) = f(x)$ ou $f(-x) = -f(x)$.

3.4 Intégrale de fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$

3.4.1 Fonction continue par morceaux sur $[a, b]$

Définition 3.4.1 *On appelle* **partage ou subdivision** *d'un segment $I = [a, b]$, $a < b$, la donnée d'une famille finie de points de I :*

$$P = (c_0, c_1, \cdots, c_n) \text{ tels que : } c_0 = a, c_n = b \text{ et } c_0 < c_1 < \cdots < c_n.$$

f est une **fonction continue par morceaux sur** $[a, b]$*, s'il existe (au moins) un partage $P = (c_0, c_1, \cdots, c_n)$ de $[a, b]$ vérifiant les propriétés suivantes :*
- *(1) Pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$, f est continue sur l'intervalle ouvert $]c_i, c_{i+1}[$*
- *(2) Pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$, f admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite au point c_i.*
- *(3) f admet une limite finie à gauche en b et une limite finie à droite en a*

Remarque 3.4.2 *Si la fonction f est définie par morceaux, elle admet donc un nombre fini de points de discontinuité. Toute fonction admettant un nombre fini de points de discontinuité $(c_0, c_1, \cdots, c_n)$ vérifiant les points (2) et (3) est donc continue par morceaux.*

Tous les points de discontinuité doivent donc figurer dans le partage. C'est le partage minimal.

Mais on peut rajouter d'autres points. Si la fonction f est continue en c_i, la propriété (2) reste vérifiée (en plus les limites sont égales).

3.4.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$

Grâce à la relation de Chasles, nous allons pouvoir étendre la notion d'intégrale sur un segment à la classe des fonctions continues par morceaux.

Définition 3.4.3 *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ relativement à un partage $P = (c_0, c_1, \cdots, c_n)$. Pour $0 \leq i \leq n-1$, on note f_i la restriction de f à l'intervalle $]c_i, c_{i+1}[$ et $\tilde{f}_i$ le prolongement de f_i par continuité sur $[c_i, c_{i+1}]$. On pose :*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} \tilde{f}_i(x)dx.$$

On admettra que cette définition est indépendante du partage choisi.

3.4.3 Propriétés de l'intégrale sur $[a, b]$ d'une fonction continue par morceaux

Théorème 3.4.4 – *(1) Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$ alors les fonctions $f + g, f - g, \lambda f$ (pour λ réel), fg et $|f|$ sont continues par morceaux sur [a, b].*
– *(2) Les propriétés : relation de Chasles, linéarité, positivité et croissance de l'intégrale (versions larges), restent valables pour les fonctions continues par morceaux.*

On admettra ce théorème.

On peut appliquer l'intégration par parties ou le changement de variable sur chaque sous-intervalle où f est continue.

Exemple 3.4.5 *Calculer $I_8 = \displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)dx$ où*

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x < 0 \\ 1 - x & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 & sinon \end{cases}$$

Tracer le graphe de la fonction f.

Chapitre 4

Intégrale sur un intervalle non borné

4.1 Introduction

On a défini, dans le chapitre 1, le nombre $\int_a^b f(x)dx$, dit intégrale définie de f entre les bornes a et b, pour toute fonction continue ou continue par morceaux sur $[a, b]$ $(a < b)$.

Nous allons étendre la définition de l'intégrale pour donner un sens à des intégrales de la forme

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx(\text{ problème en } +\infty),\ \int_{-\infty}^{b} f(x)dx(\text{ problème en } -\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx(\text{ problème en } +\infty \text{ et en } -\infty).$$

Il s'agit donc de définir l'intégrale d'une fonction continue ou continue par morceaux sur un intervalle fermé non borné $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$ ou sur $\mathbb{R}$ tout entier ($]-\infty, +\infty[$).

On parle alors indifféremment d'intégrale généralisée ou d'intégrale impropre par opposition aux intégrales définies étudiées dans le chapitre 1.

On dit qu'une fonction f est continue par morceaux sur un intervalle I non borné (c'est-à-dire de la forme $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$ ou $]-\infty, +\infty[$) si f est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.

En pratique, nous considérerons des fonctions continues ou ayant un nombre fini de points de discontinuité.

4.2 Définitions

4.2.1 Intégrales avec une seule borne infinie

Les définitions sont assez naturelles : à chaque intégrale posant problème en une borne, on associe une intégrale définie, que nous appellerons **intégrale partielle**, et on procède par passage à la limite.

Définition 4.2.1 *Soit $a \in I\!R$, la fonction f est continue ou continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. On pose pour tout $x \in [a, +\infty[$: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. On appelle F l'intégrale partielle. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ existe et est finie, on dit que l'intégrale généralisée converge et on note*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} F(x).$$

Sinon on dit que l'intégrale généralisée diverge.
De même si la fonction f est continue ou continue sur par morceaux sur $]-\infty, a]$. On pose pour tout $x \in]-\infty, a]$: $F(x) = \int_x^a f(t)dt$. On appelle F l'intégrale partielle. Si $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$ existe et est finie, on dit que l'intégrale généralisée converge et on note

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \lim_{x \to -\infty} F(x).$$

Sinon on dit que l'intégrale généralisée diverge.
Etudier la nature d'une intégrale généralisée *c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.*

Remarque 4.2.2 *Pour la définition, la fonction f est continue ou continue par morceaux sur tout segment $[a, t]$, pour $t \in [a, +\infty[$, ce qui assure que la fonction F est bien définie pour tout t de $[a, +\infty[$. Cette remarque se transpose pour la borne en $-\infty$.*

Exemple 4.2.3 *$I_1 = \int_1^{+\infty} \ln(x)dx$ (pb en $+\infty$) diverge.*
En effet : $F(t) = \int_1^t \ln(x)dx = [x\ln(x) - x]_1^t = t\ln(t) - t + 1$. Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = +\infty$ donc I_1 diverge.

Exemple 4.2.4 *$I_2 = \int_{-\infty}^0 e^x dx$ (pb en $-\infty$) converge.*
En effet, $F(t) = \int_t^0 e^x dx = [e^x]_t^0 = 1 - e^t$. Donc $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 1$ donc I_2 converge.

Exemple 4.2.5 *$\forall \lambda \in I\!R^*, \forall a \in I\!R$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \lambda \, dx$ est divergente (évident avec la définition).*

Exemple 4.2.6 *Pour tout réel a, les intégrales $\int_a^{+\infty} 0 \, dx$ et $\int_{-\infty}^a 0 \, dx$ convergent et ont pour valeur 0.*

4.2.2 Intégrales sur $I\!R$

Nous allons étudier des intégrales doublement généralisées (problèmes aux deux bornes).

Définition 4.2.7 *Soit f une fonction continue sur $]-\infty, +\infty[$.*
L'intégrale doublement généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **converge** *s'il existe un réel $c \in]-\infty, +\infty[$ tel que les deux intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ et $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ convergent et par définition :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

(égalité indépendante du point c).
On choisit en général $c = 0$.

Cette définition revient à dire que l'intégrale généralisée doit converger indépendamment pour chaque borne. **On admet que le résultat est indépendant du choix de** c.

Si l'une des deux intégrales généralisées diverge, l'intégrale doublement généralisée diverge aussi.

Exemple 4.2.8 *étudier la nature l'intégrale* $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$.

Exemple 4.2.9

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ -1 \leq x \leq 1 \\ 1/x^2 & sinon \end{cases}$$

Etudier la nature l'intégrale $I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.
Ici, f *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$ *avec deux points de discontinuité* $x = 1$ *et* $x = -1$. *On utilise un partage avec les points de discontinuité. On étudie la nature des intégrales généralisées* $\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx$, $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$. *L'intégrale* $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ *n'est pas généralisée.*

4.2.3 Convergence absolue

Enfin, une dernière définition utile pour le cours de probabilités :

Définition 4.2.10 *Soient* a *et* b *deux réels. Les intégrales* $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *et* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *sont dites absolument convergentes si les intégrales* $\int_{-\infty}^{b} |f(x)|\, dx$, $\int_{a}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ *et* $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ *sont convergentes.*

Théorème 4.2.11 *Tout intégrale généralisée absolument convergente est convergente. (la réciproque est fausse)*

4.2.4 Extension

La définition avec les intégrales partielles permet d'écrire :

$$\int_{+\infty}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{+\infty} f(x)dx,\ \int_{0}^{-\infty} f(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} f(x)dx,\ \int_{+\infty}^{-\infty} f(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

4.3 Calcul pratique des intégrales généralisées

4.3.1 Utilisation d'une primitive

Si l'on connait une primitive de f, on peut passer par l'intégrale partielle et en cas de convergence trouver la valeur de l'intégrale généralisée par passage à la limite. C'est ainsi que nous avons traité tous les exemples qui précèdent.

4.3.2 Intégration par parties

Pour calculer des intégrales généralisées, on peut utiliser l'intégration par parties.

La seule méthode simple et efficace est de faire cette intégration par parties sur des intégrales partielles qui sont des intégrales définies sur un segment. Ensuite, regrouper éventuellement des termes et passer à la limite.

4.3.3 Changement de variable

Théorème 4.3.1 *Soient $a \in I\!R \cup \{-\infty\}$, $b \in I\!R \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$, (l'une au moins des deux bornes est infinie), f une fonction continue sur $]a, b[$, et g une* **fonction strictement croissante de classe** C^1 *de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$. Alors les intégrales $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx$ et $\int_a^b f(u)du$ sont de même nature. Si l'une converge, l'autre converge aussi et elles sont égales.*
Même énoncé si g est une **fonction strictement décroissante** *de $]\alpha, \beta[$ sur $]b, a[$.*

En particulier un changement affine est toujours valable. On admet ce théorème.

Remarque 4.3.2 *Ce théorème s'applique en cas de problème aux deux bornes ou en une seule.*

Remarque 4.3.3 *Ce résultat signifie que l'on peut appliquer* **directement** *un changement de variable sur une intégrale généralisée, même sans avoir au préalable étudié la convergence. Cependant,* **on ne peut pas écrire que les deux intégrales sont égales** *avant d'avoir justifié la convergence de l'une des deux.*

Remarque 4.3.4 *La différence avec le changement de variable dans les intégrales définies est qu'ici* **la fonction g doit être strictement monotone**.

4.4 Propriétés des intégrales convergentes

Pour simplifier, les propositions suivantes ne seront énoncés que pour des intégrales du type $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ mais sont aussi valables pour les types $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Nous ne détaillerons pas les démonstrations qui sont très simples : on applique les propriétés de l'intégrale sur un segment aux intégrales partielles, et comme les intégrales rencontrées sont supposées convergentes, on conclut par passage à limite.

4.4.1 Relation de Chasles

Théorème 4.4.1 *Soient a un réel, f une fonction continue ou continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.*
Alors, $\forall c \in [a, +\infty[$, si l'intégrale du deuxième membre converge, celle du premier converge aussi et on a :

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

4.4.2 Linéarité

Théorème 4.4.2 *Soient a, λ, μ trois réels, f et g deux fonctions continues ou continues par morceaux sur $[a, +\infty[$.*

1. *les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} \lambda f(x)dx$ sont de même nature. En cas de convergence*
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$
2. *Si les deux intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sont convergentes, alors $\int_a^{+\infty} \lambda f(x) + \mu g(x)dx$ est convergente et l'on a :*
$$\int_a^{+\infty} \lambda f(x) + \mu g(x)dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)dx + \mu \int_a^{+\infty} \mu g(x)dx.$$

Remarque 4.4.3 *On ne peut pas écrire l'égalité de (2) ci-dessus avant d'avoir prouvé la convergence des intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$.*

En effet, $\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x})dx$ est une intégrale convergente, (appliquer la définition) mais les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1}dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ sont divergentes. L'égalité n'aurait aucun sens.

4.4.3 Positivité

Théorème 4.4.4 *Soient a un réel et f une fonction continue ou continue par morceaux positive sur $[a, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 0$.*

4.4.4 Croissance

Théorème 4.4.5 *Soient a un réel, f et g deux fonctions continues ou continues par morceaux sur $[a, +\infty[$. telles que : $\forall x \in [a, +\infty[,\ f(x) \leq g(x)$.*
Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ convergent alors on a l'inégalité :
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

4.4.5 Fonctions paires ou impaires

Théorème 4.4.6 Fonctions paires ou impaires
Soit f une fonction continue, paire ou impaire sur $I\!R$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. Alors les intégrales $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ convergent. De plus :
- *Si f est paire, alors $\int_{-\infty}^0 f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)dx$.*
- *Si f est impaire, alors $\int_{-\infty}^0 f(x)dx = -\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$.*

preuve Considérons $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ et effectuons le changement de variable $u = g(x) = -x$ (changement affine donc valable). On a, $du = -dx$ et on obtient l'intégrale : $\int_{+\infty}^{0} f(-u)(-du)$ qui s'écrit aussi $\int_{0}^{+\infty} f(-u)du$ ou encore $\int_{0}^{+\infty} f(-x)dx$ car u est une variable muette. Cette dernière intégrale s'écrit $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ si f est paire et $-\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ si f est impaire. Donc l'intégrale $\int_{+\infty}^{0} f(-u)(-du)$ obtenue par changement de variable converge. Par suite, l'intégrale de départ $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ converge et aussi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. La valeur de cette dernière intégrale découle de ce qui précède.

4.5 Intégrales utiles en probabilités

Théorème 4.5.1 *L'intégrale* $G_1 = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx$ *est absolument convergente et*

$$G_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que les intégrales suivantes sont absolument convergentes et

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = 0 \ \text{et} \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx = 1.$$

Ce théorème est admis.