I. Catto

I. Gentil

ANALYSE RÉELLE, OPTIMISATION LIBRE ET SOUS CONTRAINTE : EXERCICES ET ANNALES

UE 13 et 15 du DUGEAD

A. Leduc et G. Pons ont largement contribué à l'élaboration de ce recueil d'exercices.

I. Catto
Université Paris-Dauphine.
Url : `http://www.ceremade.dauphine.fr/~catto`

I. Gentil
Université Paris-Dauphine.
Url : `http://www.ceremade.dauphine.fr/~gentil`

ANALYSE RÉELLE, OPTIMISATION LIBRE ET SOUS CONTRAINTE : EXERCICES ET ANNALES

I. Catto, I. Gentil

UE 13 et 15 du DUGEAD

A. Leduc et G. Pons ont largement contribué à l'élaboration de ce recueil d'exercices.

TABLE DES MATIÈRES

INSTRUCTIONS

Organisation de l'enseignement

1. 28 séances cours -TD (26 séances cours -TD, 2 contrôles écrits).
2. Cours de soutien en mathématiques pour aider tous ceux qui le désirent,

Programme

Le but de l'UE est d'optimiser une fonction de deux variables : optimisation libre ou alors optimisation sous contrainte.

Documents et bibliographie

En L1 de Sciences-Economiques toutes les universités traitent à peu près le même programme de mathématiques, mais la répartition sur les deux années, la présentation (plus ou moins théorique), les méthodes de résolution et les exigences sont variables.
Il n'y a donc pas d'ouvrage correspondant exactement au programme traité à Dauphine. Ce programme suppose un bon acquis des notions vues au lycée (le niveau terminale ES ou L est un peu insuffisant et demandera quelques remises à niveau).

– Le polycopié de cours est le seul document qui contienne tous les résultats exigibles et qui respecte la progression du cours tel qu'il est organisé à l'université Paris-Dauphine. Les définitions, formules et théorèmes, doivent être connus par ceur pour être utilisés dans les applications.
– Le polycopié d'exercices donne les énoncés des applications qui seront traitées en T.D. Ces exercices doivent être préparés : écouter le corrigé d'un exercice, sans avoir préalablement essayé de le résoudre, cela ne sert à rien. Vous n'en retirerez aucun profit, puisque vous n'en aurez pas saisi les éventuelles difficultés.
– Des sujets d'annales sont proposés dans le polycopié d'exercices. Vous pouvez aussi les retrouver, ainsi que quelques corrigés, sur la page web suivante
http ://www.ceremade.dauphine.fr/˜gentil/enseignement.html

Contrôle continu des connaissances (CC)

L'évaluation des étudiants se fera sur la base de 2 tests écrits de 1 h 30. La note finale de contrôle continu sera calculée sur la base de la moyenne arithmétique des deux notes obtenues en tenant compte de l'assiduité et de la participation de l'étudiant.

Note finale de l' UE = (Examen + CC)/2

Absences au contrôle continu

En application du texte sur le contrôle des connaissances du DUGEAD, **toute absence à un des tests écrits comptant pour la note de contrôle continu est sanctionnée par la note 0.**

Conseils pratiques à propos des copies des contrôles ou examen

PRÉSENTATION

Nous avons constaté ces dernières années une dégradation constante dans la présentation des copies. Les enseignants ne veulent plus corriger des copies illisibles ou ressemblant à de véritables torchons. Il nous semble donc indispensable de rappeler quelques principes élémentaires :

1. Écrire lisiblement à l'encre et laisser une marge.
2. Le numéro de chaque question traitée doit être mis en évidence dans la marge. Inutile de recopier l'énoncé de la question.
3. Tous les résultats doivent être encadrés ou soulignés d'une couleur différente de celle choisie pour l'écriture, le rouge étant exclu car réservé au correcteur.
4. Une copie doit être claire et ordonnée.

Le non-respect des consignes ci-dessus entraînera des pénalités (sous forme de points négatifs) aux contrôles et aux examens.

RÉDACTION

Une copie de mathématiques n'est pas une simple suite de calculs, mais un texte en français qui doit être compris par votre lecteur : elle doit donc être rédigée.

Les conseils suivants doivent vous aider à présenter vos raisonnements.

1. Annoncez ce que vous allez faire : montrons que la fonction f est continue .... , calculons la dérivée de f en utilisant la formule de dérivation d'un quotient ....,
2. Rappelez les hypothèses utiles : comme la fonction est continue ..., par hypothèse la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$...., sachant que x est un réel strictement positif...
3. Énoncez une formule ou un résultat connu que vous utiliserez ensuite : sachant que l'équation de la tangente à une courbe au point d'abscisse a s'écrit ...., en utilisant le théorème de Pythagore ...
4. Justifiez vos réponses en expliquant votre raisonnement, étape par étape. Chaque étape doit s'appuyer sur une formule, ou une définition, ou une propriété, ou un théorème ou un résultat obtenu à une question précédente. Citez les théorèmes utilisés (éventuellement par leur nom s'ils en ont un) avec toutes leurs hypothèses et vérifiez que ces hypothèses sont satisfaites avant de les appliquer. Dans l'enchaînement des démonstrations ou des calculs il est recommandé d'écrire des mots de liaison : mais, comme, or, on sait que, on en déduit donc, c'est-à-dire, en effet, car, parce que ....
5. Intercalez des commentaires entre des lignes de calcul sinon c'est un jeu de piste pour le correcteur !
6. Pour conclure, utilisez les expressions ou les mots suivants : alors, donc, on en déduit, nous avons montré que ... Énoncez le résultat final correspondant à la question posée, et mettez-le en évidence en l'encadrant ou en le soulignant.

Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits aux contrôles et à l'examen

CHAPITRE 1

EXERCICES

1.1. Fonctions d'une variable

Exercice 1. — On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x-3}{x}.$$

1. Déterminer les domaines de définition de f et g.
2. Déterminer les fonctions $f+g$, fg, f/g, $f \circ g$ et $g \circ f$, ainsi que leurs domaines de définition.

Exercice 2. — On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \sqrt{2-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{(x+1)(x-2)}.$$

1. Déterminer les domaines de définition $\mathcal{D}_f$ de f et $\mathcal{D}_g$ de g.
2. Déterminer le sous-ensemble $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Est-ce un intervalle ?
3. Sur quel intervalle peut-on définir $f+g$?

Exercice 3. — On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer que les fonctions f et g sont bornées sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer (sans dériver) que f est décroissante sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $]-\infty, 0]$.

Exercice 4. — On définit la fonction *partie entière*, notée $\mathbb{E}$, comme suit : pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(x)$ est le plus petit entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $n \leqslant x < n+1$. Par exemple, $\mathbb{E}(2.3) = 2$ et $\mathbb{E}(-2.7) = -3$.

1. Représenter graphiquement la fonction $\mathbb{E}$ dans un repère orthonormé pour $x \in [-5, 5]$.
2. Déterminer les ensembles images $\mathbb{E}(]-2, 3[)$, $\mathbb{E}([-2, 3])$ et $\mathbb{E}([2.5, 3.5])$.

Exercice 5. — Déterminer la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ |x-1| & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

1.2. Limites

Exercice 6. — Représenter graphiquement (sans en donner une définition précise) une fonction f définie sur

$$]-\infty,-2[\cup]-2,0[\cup]0,+3[\cup]+3,+\infty[$$

et vérifiant les propriétés suivantes :

$$\lim_{x\to+3} f(x)=2, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=1, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=0$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to -2^-} f(x)=-1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -2^+} f(x)=+1.$$

Exercice 7. — Pour chacune des dix fonctions définies ci-dessous, préciser le domaine de définition et étudier l'existence d'une limite en a, ou éventuellement l'existence d'une limite à droite ou à gauche de a.

1. Étude de la fonction $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$ en $a\in\{-1,1\}$.
2. Étude de la fonction $f(x)=\dfrac{x-|x|}{x}$ en $a=0$.
3. Étude de la fonction $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{2x^2+5x-7}$ en $a\in\{-\infty,1,+\infty\}$.
4. Étude de la fonction $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ en $a=1$.
5. Étude de la fonction $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ en $a\in\{-\infty,+\infty\}$.
6. Étude de la fonction $f(x)=4x^2+\ln x-e^{2x}$ en $a=+\infty$.
7. Étude de la fonction $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ en $a=0$.
8. Étude de la fonction $f(x)=\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$ en $a=+\infty$.
9. Étude de la fonction $f(x)=x^x=\exp\{x\ln x\}$ en $a\in\{0,+\infty\}$.
10. Étude de la fonction $f(x)=x^{1/x}=\exp\left\{\dfrac{\ln x}{x}\right\}$ en $a\in\{0,+\infty\}$.

Exercice 8. — On considère les fonctions f, g et h définies par

$$f(x)=\sqrt{4x^2+9}+x, \quad g(x)=\sqrt{4x^2+9}-3x \quad \text{et} \quad h(x)=\sqrt{4x^2+9}-2x.$$

Déterminer les limites de ces fonctions en $+\infty$ et comparer les résultats obtenus pour les deux formes indéterminées.

Exercice 9. — Déterminer

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

et en déduire

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1\right).$$

1.3. Fonctions continues

Exercice 10. — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ a - \dfrac{b}{x} & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 4 \\ 1 & \text{si} \quad x > 4. \end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$. Tracer le graphe de f.

Exercice 11. — Etudier la continuité de la fonction partie entière définie dans l'Exercice 4.

Exercice 12. — Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln|x+1| + xe^x}{x-1}$$

est continue sur son domaine de définition. On précisera les fonctions composantes.

Exercice 13. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Déterminer $f(\mathbb{R})$ et vérifier que $f(\mathbb{R})$ n'est pas un intervalle.

1.4. Fonctions dérivables

Exercice 14. — En utilisant la notion de dérivée, déterminer les limites suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\lim_{x\to1} \frac{x^n - 1}{x-1}, \quad \lim_{x\to1} \frac{x-1}{\ln x}, \quad \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x}$$

et

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x\to0} (1+x)^{1/x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Exercice 15. — Après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité de f, déterminer la fonction dérivée f' dans les cas suivants :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right), \quad f(x) = \exp\{-x^2/2\}, \quad f(x) = x\ln(x) - x, \quad f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

et

$$f(x) = \ln(xe^x + 1), \quad f(x) = \ln\frac{|x(2x-1)|}{|x+3|}, \quad f(x) = (x^{1/2} + x^{-1/2})(3x^{2/3} - 5x^{3/5})$$

et pour $n \in \{2, 3, \ldots\}$ la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = xx^{1/n}.$$

Exercice 16. — Si une fonction f est à valeurs dans $]0, +\infty[$ (on dit que f est strictement positive), on appelle dérivée logarithmique de f la dérivée de $\ln \circ f$.

1. Calculer la dérivée logarithmique de la fonction u définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = x^x$. En déduire la fonction u'.

2. On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x^{u(x)}$ et $g(x) = [u(x)]^x$. Comparer $f(3)$ et $g(3)$. Justifier que les fonctions f et g sont dérivables sur $]0,+\infty[$. Calculer les dérivées logarithmiques de f et g. En déduire les fonctions f' et g'.

Exercice 17. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. En utilisant le tableau de variation de f, montrer que pour tout élément $y \in]0,1[$, il existe deux réels x_1 et x_2 distincts, tels que $y = f(x_1)$ et $y = f(x_2)$. Exprimer les réels x_1 et x_2 en fonction de y. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 18. —

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Calculer les trois premières dérivées successives de f.
2. Mêmes questions pour la fonction $g : x \mapsto xe^{ax}$ où a est un réel.

1.5. Fonctions convexes et concaves

Exercice 19. —

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x\ln(x)$. Montrer que f est convexe sur son domaine de définition. En déduire que pour tout $x > 0$, on a $x\ln(x) \geqslant x - 1$.
2. Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$. Montrer que g est concave sur $]0,+\infty[$. En déduire que pour tout $x > 0$, on a $2\sqrt{x} \leqslant (x+1)$.
3. Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = -\ln(x)$. Montrer que h est convexe sur $]0,+\infty[$. Montrer que h^2 est convexe sur $]0,e[$ et concave sur $]e,+\infty[$. Vérifier que la fonction h^2 peut s'interpréter, soit comme la composée de deux fonctions convexes, soit comme le produit de deux fonctions convexes. Que peut-on conclure de cet exemple ?

1.6. Fonctions bijectives et réciproques

Exercice 20. — Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{x^2}$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha \in]0,+\infty[$. Par tâtonnements, encadrer α par deux entiers consécutifs.

Exercice 21. — Voir l'exercice 2 – Partie I de septembre 2003, sauf question 4.

Exercice 22. — On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(t) = t - \ln(t) - 1/t$.

1. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. Calculer $g(1)$.
2. Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
3. Etudier les limites de la fonction g en 0^+ et en $+\infty$.
4. Déterminer les intervalles sur lesquels g est convexe ou concave.

5. Montrer que l'équation $g(t) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$. Quelle est cette solution ?
6. Résoudre l'équation
$$\ln(u) - \ln[\ln(u)] - \frac{1}{\ln(u)} = 0, \quad u \in]1, +\infty[.$$

1.7. Différentielle et approximation affine

Exercice 23. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$ et soit a un réel quelconque.

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Définir les applications f' et df_a.
3. Pour $h \in \mathbb{R}$, déterminer $df_a(h)$ et $\Delta f_a(h)$. Préciser les cas $a = 1$ et $a = -1$.
4. Quelle est l'erreur absoule commise en remplaçant $\Delta f_a(h)$ par $df_a(h)$?

Exercice 24. — On considère les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^x$ et $g(x) = x - 1 + \ln(x)$.

1. Justifier que les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
2. Calculer les dérivées f' et g'.
3. Écrire les développement limités à l'ordre 1 pour les fonctions f et g au voisinage de 1.
4. On considère la fonction φ définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par
$$\varphi(x) = \frac{f(x) - 1}{g(x)} = \frac{x^x - 1}{x - 1 + \ln(x)}.$$
Montrer que $\varphi(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1.

Exercice 25. — Déterminer l'approximation affine des fonctions suivantes au voisinage des points indiqués :
$$f(x) = e^x + \ln(x) \text{ en } x = 1, \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ en } x = 0, \quad h(x) = x^\alpha \text{ en } x = 1,$$
et $k(x) = \exp\{x \ln(x)\}$ en $x = 1$. En déduire des valeurs approchées de $f(0.9)$, $g(0.2)$, $k(0.8)$ et $h(1.1)$ pour $\alpha = 1/2$.

Exercice 26. — Pour tout $x > 0$ on pose $y = \ln(x)$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$ on pose $x = e^y$. En utilisant la notation différentielle de la dérivée et en partant de la dérivée dy/dx, retrouver la valeur de dx/dy en fonction de y.

Exercice 27. — En utilisant l'invariance de la différentielle, calculer la dérivée de $g = f \circ u$ dans les cas suivants. Préciser le domaine de définition de g et vérifier que les fonctions u et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine de dérivation

1. pour $u(x) = xe^x + 1/x$ et $f(u) = \sqrt{u}$.
2. pour $u(x) = x^2 + x + 1$ et $f(u) = \ln(1 + u)$.
3. pour $u(x) = \ln(x)$ et $f(u) = \ln(u)$.

Exercice 28. — Soit f la fonction définie $]0,+\infty[$ par $f(u) = u^u$. On se donne une fonction $x : t \mapsto x(t)$ définie et dérivable sur un intervalle I et à valeurs strictement positives, *i.e.* pour tout $t \in I$, $x(t) > 0$.

1. On considère $F = f \circ x$, *i.e.* $F(t) = [x(t)]^{x(t)}$. En utilisant l'invariance de la différentielle, calculer $F'(t)$ en fonction de $F(t)$, $x(t)$ et $x'(t)$, pour chaque $t \in I$.
2. On suppose dans cette question que $I = \mathbb{R}$ et que $x = \exp$, en particulier $F(t) = [e^t]^{e^t}$. Déduire de la question précédente l'expression de $F'(t)$ en fonction de t et $F(t)$. Caluler $F'(0)$.
3. On suppose dans cette question que $I =]1,+\infty[$ et $x = \ln$, en particulier $F(t) = [\ln t]^{\ln t}$. Déduire de la question précédente l'expression de $F'(t)$ en fonction de t et $F(t)$.

1.8. Calculs approchés des variations – Applications économiques

Exercice 29. — Un entrepreneur, employant comme seul facteur de production le travail, a comme fonction de production $f(x) = 2x^{1/3}$ où x représente la quantité de travail ($x \geqslant 0$). On suppose qu'il dispose de 1000 heures de travail.

1. De combien augmentera sa production s'il dispose d'une heure supplémentaire de travail ? Faire un calcul exact (calculatrice) et un calcul approché (différentielle).
2. Même question pour 2 heures supplémentaires de travail.

Exercice 30. — Le coût total de production d'un bien A est donné en fonction de la quantité produite q :

$$\forall q > 0, \quad C(q) = q^3 - 5q^2 + 10q.$$

1. Montrer que C est croissante sur $]0,+\infty[$ et strictement positive.
2. Déterminer les fonctions de coût marginal C_m et de coût moyen C_M.
3. Quel est le coût de production de 10 unités de A ?
4. De combien varierait le coût si l'on produisait un dixième d'unité supplémentaire à partir de $q = 10$? Faire un calcul exact et un calcul approché en utilisant la fonction de coût marginal).
5. On se place toujours au niveau de production $q = 10$. Calculer une valeur exacte et une valeur approchée de la variation relative du coût lorsqu'on augmente la production de 2%.

Exercice 31. — Une entreprise produit un bien A et le coût moyen de fabrication de q unités de A est donné par la fonction C_M qui est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$. On notera $C(q)$ le coût total de fabrication de q unités de A et $C_m(q)$ le coût marginal.

1. On suppose que $C_M(q) = q + 3 + 18/q$.
   (a) Déterminer les fonctions de coût total et de coût marginal. Représenter les trois fonctions C, C_M et C_m sur un même graphique.
   (b) Déterminer la valeur q telle que $C_M(q) = C_m(q)$. Même question pour $C_M(q) = 2C_m(q)$.
2. Dans cette question la fontion C est inconnue, mais on sait que $C_m(100) = 2C_M(100) = 25$.
   (a) Pour tout $q > 0$, exprimer $C(q)$ en fonction de q et de $C_M(q)$, et exprimer $C_m(q)$ en fonction de q, de $C_M(q)$ et de la dérivée $[C_M]'(q)$.

(b) A l'aide d'un calcul approché, déterminer pour quelles valeurs de q proches de 100, on aura $|C(q) - C(100)| \leqslant 50$.

(c) Montrer que l'élasticité de C par rapport à q s'exprime simplement en fonction du coût marginal $C_m(q)$ et du coût moyen $C_M(q)$.

(d) On fixe $q = 100$, déterminer une valeur approchée de la variation relative du coût total C si q diminue de 10%.

Exercice 32. — Soient f et g deux fonctions strictement positives, définies sur $]0, +\infty[$ telles que la composée $g \circ f$ est définie sur $]0, +\infty[$. Calculer en fonction des élasticités de f et g, les élasticités des fonctions : fg, f/g et $g \circ f$.

Exercice 33. — Soit q la quantité offerte d'un bien X. On note C le coût total, C_m le coût marginal et C_M le coût moyen qui sont des fonctions de $q > 0$. On suppose que C est dérivable sur $]0, +\infty[$.

1. Calculer la dérivée $[C_M]'(q)$ en fonction de q, $C_m(q)$ et $C_M(q)$.
2. Soit I un sous-intervalle de $]0, +\infty[$. Etudier le sens de variation de C_M sur I en fonction du signe de $C_m - C_M$ sur I.
3. Exprimer C en fonction de q et C_M.
4. Calculer l'élasticité du coût total $e_C(q)$ en fonction de l'élasticité du coût moyen $e_{C_M}(q)$.

Exercice 34. — Déterminer les fonctions définies sur $]0, +\infty[$, strictement positives, dérivables et ayant une élasticité constante.

Exercice 35. —

1. Déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, strictement positives et dérivables, ayant une dérivée logarithmique constante, c'est-à-dire un taux de croissance instantané constant. *Indication : on pourra noter $r = f'(x)/f(x)$ et on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de x, $f(0)$ et r.*
2. On considère une fonction vérifiant la propriété de la question 1. Montrer que le taux de variation pour une unité supplémentaire $[f(x+1) - f(x)]/f(x)$ est constant. On notera t ce taux de variation. Déterminer une relation entre r et t.

Exercice 36. — Dans une situation de monopole, le prix unitaire p d'un bien A est fixé par le monopoleur. La quantité x consommée dépend du prix p par la relation $x = F(p)$. La fonction F s'appelle la fonction de demande et F est définie, positive sur $]0, +\infty[$. On suppose que la fonction F est bijective de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

1. Quel prix devra pratiquer le monopoleur s'il désire vendre x unités du bien A ? Cette nouvelle fonction (p en fonction de x) s'appelle la demande inverse. Justifier qu'elle est égale à la recette moyenne du monopoleur.
2. Préciser le résulat de la question précédente pour $F : p \mapsto F(p) = kp^{-r}$ avec $k > 0$ et $r > 0$.

1.9. Formule de Taylor

Exercice 37. — On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$.
2. Écrire la formule de Taylor–Young à l'ordre 2 et 3 au voisinage de 1. Préciser les approximations affines, polynômiales d'ordre 2 et polynômiale d'ordre 3 de f au voisinage de 1.
3. Tracer sur la calculatrice les courbes représentatives du graphe de f et des deux approximations polynômiales (d'ordre 2 et 3) de f au voisinage de 1. Comparer.
4. Donner la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage du point du graphe d'abscisse 1. Faire une représentation graphique sommaire de la courbe représentative de f au voisinage de $(1, f(1))$.

Exercice 38. —

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. Écrire la formule de Taylor–Young à l'ordre 3 au voisinage de 0. Donner la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage du point du graphe d'abscisse 0. Faire une représentation graphique sommaire de la courbe représentative de g au voisinage de $(0, g(0))$.

2. Soit h la fonction de définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$h(x) = \ln^2(1+x).$$

Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]-1,+\infty[$. Ecrire la formule de Taylor–Young à l'ordre 3 en 0.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D} =]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{h(x) - x^2}{x - g(x)}.$$

Montrer que f admet une limite en 0.

1.10. Extrema des fonctions d'une variable

Exercice 39. — Calculer les extrema sur son domaine de la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2.$$

Exercice 40. — Calculer les extrema sur son domaine de la fonction g définie par

$$g(x) = e^x + x\big(\ln(x) - 1 - e\big).$$

1.11. Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

***Exercice 41* (Produit scalaire, distance et norme).** — On se place dans $\mathbb{R}^3$.

(i) On considère les vecteurs : $x = (3, 0, -4)$ et $y = (-6, 2, 3)$. Calculer le produit scalaire de x et y ainsi que les normes de x et de y. Vérifier que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est bien satisfaite.

(ii) On considère les points : $P = (1, 2, 3)$ et $Q = (7, 5, 1)$. Calculer la distance de P à Q.

***Exercice 42* (Preuves de l'inégalité de Cauchy-Schwarz en dimension 2 et de la proposition 11.3.6)**

(i) Démontrer les propriétés (i), (ii) et (iii) de la norme énoncées dans la proposition 11.3.6.

(ii) Soient deux vecteurs **fixés non nuls** $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$. Pour tout réel t, on pose :

$$F(t) = \|x + t\,y\|^2.$$

Exprimer $F(t)$ en fonction de t , de la norme de x, de la norme de y et du produit scalaire de x et y.

(iii) Vérifier que $F(t)$ est un trinôme en t. Quel est le signe de $F(t)$?

(iv) Calculer le discriminant de $F(t)$ et en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(v) Préciser dans quel cas cette inégalité devient une égalité.

(vi) Démontrer les propriétés (iv) et (v) de la norme énoncées dans la proposition 11.3.6.

***Exercice 43* (Équations de droites et de cercles dans $\mathbb{R}^2$).** — On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

(i) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par les points $A = (2, -3)$ et $B = (4, -5)$.

(ii) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par le point $C = (-1, 3)$ et orthogonale au vecteur $v = (-3, 2)$.

(iii) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_3$ passant par le point $D = (1, -3)$ et de vecteur directeur $w = (-2, -5)$.

(iv) Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $(-1, 2)$ et de rayon 5.

***Exercice 44* (Équations de droites et de cercles dans $\mathbb{R}^2$).** — On considère les équations suivantes. Reconnaître celles qui correspondent à des droites (préciser deux points, donner un vecteur directeur et un vecteur orthogonal) et à des cercles (préciser centre et rayon) :

$$y = \sqrt{x}, \qquad y = x^2 + 1, \qquad y^2 = 2x + y + 3, \qquad y = -2\,x + 5, \qquad x^2 - y^2 = 3$$

$$x + y - 1 = 0, \qquad x^2 + y^2 + x + y\ + 1 = 0, \qquad x^2 + y^2 + 4x - 6y\ + 4 = 0$$

***Exercice 45* (Équations de plans et de sphères dans $\mathbb{R}^3$).** — On se place dans l'espace de dimension 3 muni d'un repère orthonormé.

(i) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ passant par les points $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, -1, -1)$ et $C = (-1, 1, 0)$.

(ii) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ passant par le point $D(0, -1, 3)$ et orthogonal au vecteur $v(-1, 1, 2)$.

(iii) Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre $(-1, 2, 3)$ et de rayon 2.

1.12. Topologie dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 46. — Représenter géométriquement les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ et donner leur nature topologique (ouvert, fermé). *On demande juste une réponse intuitive sans justification.*

(i) $\mathcal{A} = \{(1,1), (-1,-1), (0,0)\}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est borné.

(ii) $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 4 \leqslant x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 \leqslant 25\}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est borné.

(iii) $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - 2x - 3 < 0 \;\text{ ou }\; x^2 + y^2 - 2y - 3 < 0\}$.

(iv) $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(v) $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leqslant x \leqslant 1,\; 0 < y < 2\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est borné.

1.13. Parties convexes de $\mathbb{R}^2$

Exercice 47. — Démontrer la propriété (viii) de la proposition 13.2.4 du chapitre 13 du polycopier de cours.

Exercice 48. — Montrer que l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy \geqslant 0\}$ n'est pas convexe.

Exercice 49. — Un consommateur dispose de 2 biens X et Y dont les prix unitaires sont p et q. Le revenu du consommateur est R. On suppose $p > 0$, $q > 0$, $R > 0$ et les quantités consommées $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.
Quel est l'ensemble des consommations possibles ?
Montrer que cet ensemble est convexe et borné.

Exercice 50. — Représenter géométriquement les sous-ensembles suivants et montrer que ce sont des parties convexes de $\mathbb{R}^2$.

(i) $\mathcal{E}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > |2x+3|\}$

(ii) $\mathcal{E}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - x + y + \frac{1}{4} < 0\}$.

(iii) $\mathcal{E}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + y > 0, -1 < x < 1,\; -1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

(iv) $\mathcal{E}_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x + y + 1 > 0 \;\text{ et }\; x + 2y - 2 \leqslant 0\}$.

1.14. Fonctions de deux variables

Exercice 51. — Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes. Indiquer (sans justification) s'il est ouvert, fermé, borné.

$$(i)\quad f(x,y) = \frac{2\,x + 3\,y}{2\,x - y} \qquad\qquad (ii)\quad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\,x - y}}$$

$$(iii)\quad f(x,y) = \ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}\right) \qquad\qquad (iv)\quad f(x,y) = x^y = e^{y \ln x}$$

$$(v)\quad f(x,y) = \sqrt{(x-y)\,(x+y+1)} \qquad\qquad (vi)\quad f(x,y) = \ln\left(1 - x^2 - y^2\right)$$

$$(vii)\quad f(x,y) = \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 - y^2}}$$

Exercice 52. — Représenter, sur un même graphique, le domaine de définition de f et les courbes de niveau k demandées. Pour (i) et (ii) on supposera $x > 0$ et $y > 0$.

(i) $f(x,y) = x\,y$, k quelconque

(ii) $f(x,y) = \min(x,y)$, k quelconque

(iii) $f(x,y) = \dfrac{x^4 + y^4}{8 - x^2\,y^2}$, courbe de niveau pour $k = 2$.

(iv) $f(x,y) = \dfrac{x\,y - x + y}{x\,y}$, courbe de niveau 1 et courbe de niveau 2.

(v) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y}{x + y^2}$, courbe de niveau 0 et courbe de niveau -1.

Exercice 53. — Déterminer le graphe des fonctions suivantes :

(i) $f(x,y) = 2x + 3y$

(ii) $f(x,y) = \sqrt{11 - x^2 - y^2 + 2\,x + 4\,y}$

Exercice 54. — Une entreprise produit un seul bien Y à partir de 2 inputs X_1 et X_2. La technologie est représentée par une fonction de production

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}$$

où y est quantité du bien Y produite à partir des quantités x_1 et x_2 des inputs X_1 et X_2, et α, β deux réels positifs non nuls. On suppose $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$.

(i) Représenter graphiquement les courbes de niveau de la fonction f.

(ii) Déterminer les intersections du graphe de f avec les plans verticaux d'équations $x_1 = a$ ou $x_2 = b$. Discuter selon les valeurs de α et β.

1.15. Continuité

Exercice 55. — Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^3\,y^2 + 2\,x\,y + 4\,x & \qquad f_2(x,y) &= \ln\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) \\ g_1(x,y) &= \frac{\ln(x^2 + y^2) - x^3\,y^4}{e^{xy}\,(x+y)} & \qquad g_2(x,y) &= \ln(x)\,\sqrt{y - 1} \end{aligned}$$

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{si } (x,y) \in \overline{\mathcal{B}}(O,1) \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 1} & \text{si } (x,y) \notin \overline{\mathcal{B}}(O,1). \end{cases}$$

1.16. Dérivées partielles du premier ordre

Exercice 56. — On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} a)\ f(x,y) &= \frac{x - y}{x + y} & \qquad b)\ f(x,y) &= A\,x^{\alpha}\,y^{\beta} \quad (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \alpha > 0, \beta > 0) \\ c)\ f(x,y) &= \ln\left(\frac{x\,y}{x^2 + y^2}\right) & \qquad d)\ f(x,y) &= (y+2)^{x+1}. \end{aligned}$$

1. Déterminer les domaines de définition des fonctions ci-dessus. *On admet que ces ensembles sont des ouverts de* $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine de définition sans calculer les dérivées partielles. (Voir l'exemple 16.3.7 du Chapitre 16)
3. Calculer les dérivées partielles premières des fonctions définies ci-dessus.

Exercice 57. — On considère la fonction $f(x, y) = (x^2 + y^4)^{1/3}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, puis calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
3. **(Difficile)** La fonction f admet-elle des dérivées partielles d'ordre 1 en $(0, 0)$?

1.17. Différentielle

***Exercice 58* (Mise en œuvre des définitions).** — Soit $f(x, y) = e^{x/y}$.

(i) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f. *On admet que* $\mathcal{D}_f$ *est ouvert.* Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$.

(ii) Calculer les dérivées partielles premières de f.

(iii) Soient $M_0 = (0, 1)$ et $M_1 = (1, 2)$. Déterminer les gradients $\nabla f(M_0)$ et $\nabla f(M_1)$. Préciser les expressions de $\Delta f_{M_0}(h, k)$, $\Delta f_{M_1}(h, k)$, $df_{M_0}(h, k)$ et $df_{M_1}(h, k)$.

(iv) Comparer les valeurs exactes et les valeurs approchées calculées à l'aide de la différentielle de $f(0.1, 0.8)$ et $f(0.9, 2.1)$.

(v) Écrire le DL à l'ordre 1 de f au voisinage des points $M_0 = (0, 1)$ et $M_1 = (1, 2)$.

(vi) Déterminer les approximations affines de f au voisinage des points $M_0 = (0, 1)$ et $M_1 = (1, 2)$.

(vii) Déterminer l'équation du plan tangent à la surface représentative de f aux points $\big(0, 1, f(0, 1)\big)$ et $\big(1, 2, f(1, 2)\big)$.

(viii) Écrire la différentielle totale de f.

Exercice 59. — En utilisant l'approximation par la différentielle, calculer des valeurs approchées des expressions suivantes. Comparer à la valeur

$$(1.02)^{3.01} \qquad \sqrt{5,7 \times 6,2} \qquad \ln(1,02 \times 0,9).$$

Exercice 60. — Déterminer l' approximation affine des fonctions suivantes aux points indiqués :

(i) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{1 + x + y}$ au voisinage de $(1, 0)$ et $(0, 0)$.

(ii) $g(x, y) = x \exp(x^2 - y^2)$ au voisinage de $(1, 1)$.

1.18. Applications économiques

Exercice 61. — Soit $\mathcal{D} = \{(p,q) \in \mathbb{R}^2 \,:\, p > 0,\ q > 0\}$. *On admet que $\mathcal{D}$ est ouvert.* Soient x et y les quantités demandées de deux biens X et Y en fonction de leurs prix unitaires p et q. On suppose que :

$$x = f(p,q) = \frac{1000}{p^2\, q} \quad \text{et} \quad y = g(p,q) = \frac{1000}{p\, q^2}.$$

Les fonctions f et g définies sur $\mathcal{D}$ sont appelées "fonctions de demande".

(i) Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

(ii) Calculer les demandes marginales partielles.

Pour toutes les questions qui suivent on fera des calculs approchés.

(iii) On suppose q fixé. Quelle variation relative doit-on attribuer à p pour que la demande en bien X augmente de 5% ? Quelle sera alors la variation relative correspondante de la demande en bien Y ?

(iv) On suppose que p augmente de 5% et que q diminue de 3%. Quelles sont les variations relatives correspondantes des demandes en bien X et Y ?

(v) On observe une augmentation de la demande en bien X de 2%, la demande en bien Y restant constante. Quelles variations relatives des prix ont provoqué ce changement ?

(vi) Exprimer, en fonction de p et q, la dépense d'un consommateur qui consomme les quantités x et y des biens X et Y.

On suppose que le prix p baisse de 0,3 à partir de 2. Quelle doit-être la variation de q à partir de 1 pour que la dépense reste constante ?

1.19. Dérivées partielles du deuxième ordre

Exercice 62. — On définit les fonctions :

$$\begin{array}{lll} a)\ f(x,y) = y\ln(x) & \qquad & b)\ f(x,y) = x^y = e^{y\, ln(x)} \\[1em] c)\ f(x,y) = x^\alpha\, y^\beta & & d)\ f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x\,y} \end{array}$$

avec α, β réel et $x > 0$, $y > 0$ dans l'exemple c).

(i) Déterminer les domaines de définition des fonctions ci-dessus

On admet que ces ensembles sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Justifier que ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur leur domaine de définition (sans calculer les dérivées partielles), puis calculer leurs dérivées partielles secondes.

1.20. Développement limité d'ordre 2

Exercice 63. — Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes. *On admet que ces ensembles sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.*

Justifier que ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur leur domaine de définition.

Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage du point $M_0 = (x_0, y_0)$ indiqué.

En déduire l'équation du plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ représentative de f au point $\big(x_0, y_0, f(M_0)\big)$.

a) $f(x,y) = x^2\,y + 3\,x\,y + y^4$ en $M_0 = (1,2)$.
b) $f(x,y) = \ln(1+2x+3y)$ en $M_0 = (0,0)$.
c) $f(x,y) = x^2\,e^y - y\,e^x$ en $M_0 = (0,0)$.

Pour a) et c) préciser la position de $\mathcal{S}$ par rapport au plan tangent au voisinage de M_0. Peut-on répondre à la question précédente pour b) ?

1.21. Fonctions convexes et concaves

Exercice 64. — On définit les fontions f et g par :

$$f(x,y) = x^4 + y^4, \qquad g(x,y) = (x-y)^2.$$

1. Montrer que les fonctions f et g sont convexes sur $\mathbb{R}^2$.
2. On pose $h = f - g$. Montrer que la fonction h n'est ni convexe ni concave sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 65. — On reprend la fonction f de l'exercice 63 b) :

$$f(x,y) = \ln(1+2x+3y).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f. *On admet que cet ensemble est ouvert.*
2. Montrer que f est concave sur son domaine de définition.
3. En déduire la position de la surface $\mathcal{S}$ représentative de f par rapport à ses plans tangents.

Exercice 66. — On définit la fontion f par :

$$f(x,y) = \frac{1 - x\,y}{x+y}\,.$$

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ? est-il convexe ? *On admet que $\mathcal{D}_f$ est ouvert.*
2. Étudier la convexité ou la concavité de f sur $\mathcal{C}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x+y > 0\}$, puis sur $\mathcal{C}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x+y > 0\}$. *On admet que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont des ouverts.*
3. On définit maintenant la fonction g par :

$$g(x,y) = \frac{1 - x\,y}{x+y} - \ln(x+y)\,.$$

   Étudier la convexité (ou la concavité) de g sur son domaine de définition qui est ouvert.

Exercice 67. — On définit la fontion f par :

$$f(x,y) = \frac{\exp(5\,x^2 - x\,y + y^2)}{x^2\,y}\,.$$

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ? est-il convexe ? *On admet que $\mathcal{D}_f$ est ouvert.*
2. Montrer que f est convexe sur $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0,\ y > 0\}$. *Indication : penser au logarithme.*

   On admet que $\mathcal{C}$ est ouvert.

3. On définit maintenant la fonction g par :
$$g(x,y) = \frac{\exp(5\,x^2 - x\,y + y^2)}{x^2\,y} + \big((x+y)^2+1\big)^3.$$
Montrer que g est convexe sur $\mathcal{C}$.

Exercice 68. — Soit la fonction f définie par :
$$f(x,y) = x^\alpha\,y^\beta$$
où α et β sont des réels non nuls. Soit $\mathcal{C} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x>0,\; y>0\}$. *On admet que $\mathcal{C}$ est ouvert.*
Étudier la convexité (ou la concavité) de f sur $\mathcal{C}$ en discutant selon les valeurs de α et β.

Exercice 69. — Étudier la convexité (ou la concavité) des fonctions suivantes sur les ensembles indiqués qui sont tous des ouverts :

(i) $f(x,y) = x^{1/2} + 3\,\ln(y) - 2\,\exp(x+y)$ sur $\mathcal{U} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x>0,\; y>0\}$

(ii) $g(x,y) = x^2 + y^4$ sur $\mathbb{R}^2$

(iii) $h(x,y) = \sqrt{2\,x+3\,y}$ sur $\mathcal{V} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; 2\,x+3\,y>0\}$.

Comparer $\mathcal{U}$ avec $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{V}$ avec $\mathcal{D}_h$.

1.22. Extrema libres des fonctions de deux variables

Exercice 70. — Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que les extrema locaux trouvés ne sont pas des extrema globaux.

a) $f(x,y) = x^3 + 3\,x\,y^2 - 15\,x - 12\,y$

b) $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y$ où $a\in\mathbb{R}$. Discuter selon le signe de a.

c) $h(x,y) = x^4 + y^3 - 4\,y - 2$

d) $k(x,y) = x^3 + x\,y^2 - x^2\,y - y^3$

e) voir exercice 2 de septembre 2001 question 5

Exercice 71. — Montrer que les les fonctions suivantes sont convexes sur $\mathbb{R}^2$. Optimiser ces fonctions sur $\mathbb{R}^2$, puis sous la liaison $x+y=0$.

a) $f(x,y) = x^2 + x\,y + y^2 + 2\,x + 3$

b) $g(x,y) = (x^2+y^2) + \exp(x^2+y^2)$

Exercice 72. — 1. Soient a et b deux constantes réelles. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 8x - 2\,x^2 + b^2, \quad g(y) = 8\,y - a^2 - 2\,y^2.$$

a) Déterminer les extrema de chacune de ces fonctions sur $\mathbb{R}$.

b) On considère ensuite la fonction h définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$h(x,y) = 8\,(x+y) - 3\,x^2 - y^2.$$
Déterminer les extrema de h sur $\mathbb{R}^2$.

2. Application : On considère deux firmes concurrentes produisant le même bien en quantités différentes q_1 et q_2 et ayant des fonctions de coût différentes C_1 et C_2. La fonction de coût de chacune des deux firmes dépend des quantités de bien produites par les deux firmes. Le prix unitaire p du bien est fixé sur le marché indépendamment des quantités fabriquées.
   a) Dans un premier temps, chaque directeur de firme essaie de maximiser son profit en agissant sur la variable qu'il contrôle. Calculer les quantités optimales produites par chacune des firmes ainsi que le profit qui en résulte sachant que :
   $$C_1(q_1, q_2) = 2\,q_1 + 2\,q_1^2 - q_2^2, \qquad C_2(q_1, q_2) = 2\,q_2 + q_1^2 + 2\,q_2^2, \qquad p = 10.$$
   b) Dans un deuxième temps, les deux firmes fusionnent. Elle constituent deux divisions d'une même entreprise. Il n'y a plus qu'un centre de décision qui essaie de maximiser son profit en agissant sur les variables qu'il contrôle sans modifier les conditions techniques de production des deux divisions.

   Calculer les quantités optimales qu'il demande à chacune des deux divisions de produire pour maximiser le profit. La fusion est-elle souhaitable ? Pourquoi ?

Exercice 73. — Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0,\ y > 0\}$. On admet que D est ouvert. On considère la fonction d'utilité U définie sur D par :
$$\forall (x, y) \in D, \quad U(x, y) = \frac{2\,x\,y^2}{x + y}\,,$$

où x et y désignent les quantités consommées des deux biens X et Y.
a) Montrer que U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
b) On supose $x_0 = 4$ et $y_0 = 2$. Déterminer l'équation de la tangente au point (x_0, y_0) à la courbe de niveau passant par (x_0, y_0).
c) Calculer le taux marginal de substitution de Y à X au point (x_0, y_0). Comparer avec la pente de la tangente déterminée à la question précédente.

1.23. Extrema liés des fonctions de plusieurs variables

Exercice 74. — Pour chacune des deux questions suivantes on donnera deux méthodes : d'abord en explicitant la contrainte, puis en utilisant le lagrangien.

1. Soient les fonctions f et g définies par :
   $$f(x, y) = xy, \qquad g(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\,.$$
   a) Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$ et sous la contrainte $g(x, y) = 2/3$.
   b) Déterminer les extrema de g sur $\mathcal{D}_g$ et sous la contrainte $f(x, y) = 9$.
2. Soit la fonction h définie par
   $$h(x, y) = -x^2 - 4\,y^2.$$
   Déterminer les extrema de h sur $\mathbb{R}^2$ et sous la contrainte $x + 2\,y^2 - 2 = 0$.

Exercice 75. — Déterminer les extrema (locaux et globaux) des fonctions suivantes sur leur domaine de définition et sous la contrainte indiquée. Pour f_1 et f_2 on fera également une résolution géométrique.

$$\begin{array}{rclll}
f_1(x,y) & = & x+y & \text{sous} & \exp\left(x^2+y^2-1/4\right)=1 \\
f_2(x,y) & = & x\,y & \text{sous} & x^2+y^2-x-y=0 \\
f_3(x,y) & = & x^3+y^3 & \text{sous} & x^2+y^2=1 \\
f_4(x,y) & = & x+2\,y & \text{sous} & x^2+xy+y^2+y=\dfrac{13}{9} \\
f_5(x,y) & = & \ln(x-y) & \text{sous} & x^2+y^2=2 \\
f_6(x,y) & = & x^2+y^2 & \text{sous} & \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}-1=0 \\
f_7(x,y) & = & 2\,x-y & \text{sous} & x^2+xy-y^2=1 \\
f_8(x,y) & = & \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} & \text{sous} & \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{2} \\
f_9(x,y) & = & x^2+y^2+(y-x)^2 & \text{sous} & x^2+y^2+2\,y-2\,x-6=0
\end{array}$$

CHAPITRE 2

RECUEIL D'ANNALES

Les exercices présentés ici proviennent de contrôles et d'examens donnés les années précédentes. La difficulté des exercices peut bien entendu varier selon les années.

2.1. Test du 13 novembre 2003

Exercice 76. — Pour x réel, $|x|$ désigne la valeur absolue de x. Soit $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.
Donner le domaine de définition de f et montrer que f est strictement croissante sur son domaine de définition puis que pour tout $y \in]-1,1[$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 77. — Pour tout réel x, on définit la partie entière, notée $\mathbb{E}$, par $\mathbb{E}(x)$ est le plus petit entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leqslant x < n+1.$$

Donner le domaine de définition et étudier la continuité de la fonction f suivante

$$f(x) = \mathbb{E}(x) + \sqrt{x - \mathbb{E}(x)}.$$

Exercice 78. — Soient les fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-3\,x}{5-2\,x}}, \quad g(x) = \sqrt{2x-5} \quad \text{et} \quad h(x) = \left(\ln\left(4\,x-3\right)\right)^2.$$

1. Déterminer les domaines de définition de ces fonctions.
2. Déterniner le domaines de définition des fonctions marginales des fonctions f, g et h et calculer les fonctions marginales de f, g et h.
3. Donner un point x_0 appartenant aux trois domaines de définition des fonctions marginales f, g et h.
4. Donner l'élasticité des fonctions f, g, h et fg/h.
5. On considère que la fonction $h(x)$ pour $x \geqslant 1$ représente le chiffre d'affaire d'une entreprise en fonction du temps de travail x.

   Montrer que le chiffre d'affaire est strictement croissant par rapport au temps de travail.

   Donner un développement limité de h à l'ordre 2 au point 1.

   En déduire la position de la tangente au point d'abscisse $x = 1$.

Exercice 79. — Soit la fonction $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque que l'on explicitera. On donnera aussi l'ensemble de départ et d'arrivée de la fonction réciproque
2. Donner un développement limité de f à l'ordre 1 au point 2.

Exercice 80. — Soit la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{20x^2 - 18x + 11}{(2x-1)^2(x+3)}.$$

1. Pout tout entier n, donner les dérivées d'ordre n de f et donner les domaines de définition associés.

Indication : On pourra dans un premier temps trouver les réels a et b vérifiant l'égalité suivante
$$f(x) = \frac{a}{(2x-1)^2} + \frac{b}{x+3}.$$

Exercice 81. — Soient les ensembles suivants :
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x - 1| < 1\}$; $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leqslant 1\}$;
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \leqslant 1\}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$.

1. Représenter ces ensembles.
2. Préciser s'ils sont bornés.

2.2. Test du 15 janvier 2004

Exercice 82. — *Questions de cours :*

1. Donner la définition d'un minimum local et d'un maximum global pour une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. Donner la définition d'une fonction convexe de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 83. — Soient les fonctions suivantes
$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6, \quad g(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10.$$

1. Étudier la convexité de f et g.
2. Trouver les extrema de f et préciser si ce sont des minima, maxima, locaux ou globaux.

Exercice 84. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes en un point arbitraire de $\mathbb{R}^2$:
$$g(x, y) = f(x + y), \qquad h(x, y) = f(x^2 + y^2), \qquad k(x, y) = f(xy).$$

Exercice 85. — Soient les fonctions f et g suivantes
$$f(x, y) = x^2 e^{xy}, \quad g(x, y) = \ln(2 - \sqrt{x^2 + y^2}).$$
Pour ces deux fonctions répondre aux questions suivantes.

1. Donner le domaine de définition. On admet que ce domaine est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition.
3. Donner les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en un point quelconque du domaine de définition.
4. Écrire le développement limité à l'ordre 2 au point $(1,0)$.
5. Écrire l'équation du plan tangent au point $(1,0)$ et donner la position de la courbe par rapport à son plan tangent.

2.3. Test du 16 novembre 2004

Exercice 86. — *Questions de cours :*

1. Donner la définition de la concavité pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, non nécessairement $\mathcal{C}^2$.
2. On considère la fonction $g(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}\ln(x)$.
   Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur son domaine de définition.
   En déduire que : $\forall x > 0,\ g(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}\ln(x) \geqslant \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.
3. Étudier les variations de g et en déduire qu'elle admet un minimum global dont on donnera la valeur.
4. Soit y un réel. Déterminer, suivant la valeur de y, le nombre de solutions de l'équation $g(x) - y = 0$.

Exercice 87. — Pour tout réel x, on désigne par $|x|$ la valeur absolue de x.
Soit la fonction $f(x) = |x|^x$.

1. Exprimer f à l'aide d'une fonction exponentielle. Déterminer le domaine de définition de f ainsi que ses limites aux bornes de ce domaine.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0. Donner $f(0)$.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$. Calculer les dérivées f' et f'' et étudier les variations de f.
5. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 de f en 1. En déduire la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au voisinage du point d'abscisse $x = 1$.

Exercice 88. — Soit $h(x) = f \circ u(x)$, avec $f(u) = u^2$, $u(x) = \ln(x^3 - 1)$.

1. Exprimer h en fonction de x. Déterminer les domaines de définition de f et de u. En déduire le domaine de définition de h et montrer que cette fonction est continue sur son domaine de définition.
2. Quel est le domaine de dérivabilité de h ? Calculer la dérivée h' en utilisant l'invariance de la relation différentielle et étudier les variations de h.
3. On considère à présent que la fonction $h(x)$ pour $x \geqslant 2$ représente le chiffre d'affaire d'une entreprise en fonction du temps de travail x.
   Montrer que la fonction marginale de h est donnée par $h_m(x) = 6\,x^2\dfrac{\ln(x^3-1)}{x^3-1}$.

4. Déterminer l'élasticité de h.
5. Montrer que h admet une fonction réciproque, donnant le temps de travail en fonction du chiffre d'affaire y, que l'on explicitera et dont on donnera les ensembles de départ et d'arrivée.

Exercice 89. — Représenter graphiquement les ensembles suivants et déterminer s'ils sont bornés.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x + y \leqslant 1\},$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2y\},$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 2)^2 + y^2 > 4 \text{ et } x - y \leqslant -1\}.$$

2.4. Test du 11 janvier 2005

Exercice 90. — *Question de cours :*
Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et soit (x_0, y_0) un élément de $\mathbb{R}^2$.

1. Donner l'équation du plan tangent à f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
2. Donner la définition d'un développement limité de f au point (x_0, y_0) à l'ordre 2.
3. Donner la définition d'un minimum local de f au point (x_0, y_0).

Exercice 91. — Soit $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - x/2 - y/2 + \ln(e^x + e^y)$.

1. Donner le domaine de définition de f et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.
3. Montrer que $(0, 0)$ est un point critique.
4. Étudier la convexité de f.
5. Montrer que f admet un minimum global au point $(0, 0)$ et calculer ce minimum.

Exercice 92. — 1. On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$.
   (a) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
   (b) Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_g$ et calculer sa dérivée g'.
   (c) Étudier les variations de g et déterminer $g(\mathcal{D}_g)$.
   (d) Montrer qu'il existe un unique réel α, élément de $]0, 1/e[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

2. On considére la fonction de deux variables réelles f définie par $f(x, y) = x(\ln(x) + x + y^2)$.
   (a) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f. Montrer que c'est un convexe de $\mathbb{R}^2$. On admettra que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$.
   (c) Donner les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en un point quelconque de $\mathcal{D}_f$.
   (d) Écrire le développement limité à l'ordre 2 au point $(1, 2)$. Écrire l'équation du plan tangent en ce point et donner la position de la courbe par rapport à son plan tangent.
   (e) En utilisant la question 1, montrer que $(\alpha, 0)$ est un point critique de f. Existe-t-il d'autres points critiques ?
   (f) Écrire l'équation du plan tangent en $(\alpha, 0)$ et donner la position de la courbe par rapport à son plan tangent.
   (g) Montrer que $m = -\alpha(\alpha + 1)$ est un minimum local de f.

2.5. Test du 2 décembre 2005

Exercice 93. — Soient $b > a > 0$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ et convexe sur $[a,b]$.

1. Rappelez la définition de f est convexe sur $[a,b]$.
2. En déduire que

$$\forall (Q, Q_0) \in [a,b]^2, \qquad \frac{f(Q)}{Q} - \frac{f(Q_0)}{Q_0} \geqslant \left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right)\left(f'(Q_0) - \frac{f(Q_0)}{Q_0}\right). \tag{2.1}$$

3. Considérons un bien A dont le coût total de fabrication est lié à la quantité produite $Q \in [a,b]$ par la relation $C = f(Q)$.
   (a) Rappelez la définition du coût moyen et du coût marginal.
   (b) On suppose qu'il existe une quantité $Q^\star$ pour laquelle le coût moyen et le coût marginal s'égalisent. Déduire de (2.1) que le coût moyen atteint son minimum en $Q^\star$.

Exercice 94. — Soit $f : x \mapsto x e^{x^2+1/x}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. Calculer les limites aux bornes de l'intervalle.
3. Soit le polynôme $g(x) = x + 2x^3 - 1$. Montrer qu'il existe un unique réel a dans $\mathbb{R}^+$ tel que $g(a) = 0$. Vérifier que $a \in]0,1[$.
4. En déduire le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$.
5. Donner le développement limité de f au point $x = 1$ à l'ordre 2.
6. En déduire la position de la tangente de f au voisinage du point $x = 1$.
7. Montrer que f est convexe sur $[1,+\infty[$.

Exercice 95. — Représenter graphiquement les ensembles suivants. On précisera si ils sont bornés, convexes et compacts (on demande une démonstration).

1. $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 < 0 \text{ et } -2 < x + y \leqslant 2\}$
2. $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y + 1 < 0 \text{ ou } y \geqslant 0\}$
3. $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant |2x - 2| < 1\}$

2.6. Test du 13 janvier 2006

Exercice 96. — 1. Donner la définition d'un minimum gobal et d'un maximum local d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

2. Donner la définition d'une fonction convexe de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et donner un critère lorsque celle-ci est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 97. — Soient les fonctions f et g suivantes :

$$f(x,y) = x - y^2 - \frac{1}{2}xy + 2 - 2x^2 \quad g(x,y) = x^4 + x^2 y + \frac{1}{4}y^2 - 1.$$

1. Étudier la convexité de f et g sur $\mathbb{R}^2$.
2. Trouver les extrema de f et préciser si ce sont des minima ou des maxima, s'ils sont locaux ou globaux.

Exercice 98. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes en un point arbitraire (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$g(x, y) = f(2x - y + 3), \quad h(x, y) = f(x^3 - y^3).$$

On exprimera le résultat en fonction de f'.

Exercice 99. — Soit f la fonction suivante :

$$f(x, y) = -\ln(xy) - \ln(4 - (x^2 + y^2)).$$

1. Donner $\mathcal{D}_f$, le domaine de définition de f et faire une représentation graphique.
2. Ce domaine est il convexe ? Borné ?
   On admet que le domaine de définition est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$.
4. Donner le développement limité à l'odre 2 au voisinage de $(1, 1)$.
5. Donner l'équation du plan tangent à la surface représentative au voisinage de $(1, 1)$.
6. Étudier la position du plan par rapport à la surface au voisinage de $(1, 1)$.
7. Étudier la convexité sur son domaine de définition de la fonction suivante :
   $$h(x, y) = \ln(4 - (x^2 + y^2)).$$
8. En déduire la convexité de f sur l'ensemble $\mathcal{D}_f \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$. On vérifiera que c'est bien un ensemble convexe.

2.7. Test du 24 novembre 2006

Exercice 100. — Soit f définie par $f(x, y) = xe^y + ye^x$.

1. Donner le domaine de définition de f et calculer les dérivées partielles premières de f.
2. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(0, 0, f(0, 0))$.
3. Donner une valeur approchée de $f(0.1, -0.2)$.
4. Soit $a > 0$. On se place au point $A = (a, a)$. On suppose que les variables x et y augmentent toutes les deux de 5 %. En utilisant un calcul approché, déterminer a pour que f augmente de 10 %.
5. Déterminer la position du plan tangent au graphe au point $(0, 0, f(0, 0))$.
6. Étudier la convexité de f sur son ensemble de définition.

Exercice 101. — Soit g la fonction à deux variables définie par

$$g(x, y) = \frac{\exp(x + y)}{\sqrt{x + y}}.$$

1. Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_g$. On suppose qu'il est ouvert.
2. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_g$.
3. Etudier la convexité de g sur son ensemble de définition.
4. Calculer les dérivées partielles du premier ordre de la fonction g sur $\mathcal{D}_g$.

Exercice 102. — On considère la fonction réelle de deux variables f définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2x-y^2}$.

1. Déterminer et représenter son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On suppose que cet ensemble est ouvert. Est il convexe ?
2. Déterminer et représenter la courbe de niveau C_k pour $k=1$.
3. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$.
4. Calculer les dérivées partielles du premier ordre de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$.
5. Écrire le développement limité d'ordre 1 de f au point $(3,2)$. En déduire une valeur approchée de f au point $(2.9, 2.2)$. Commenter votre résultat.
6. Calculer les dérivées partielles du second ordre de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$. Vérifier que
$$D^2 f(3,2) = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 81/2 \end{pmatrix}.$$
7. Écrire le développement limité d'ordre 2 de f au point $(3,2)$. En déduire l'équation du plan tangent et la position du graphe de f par rapport au plan tangent au point $(3,2)$.

2.8. Test du 12 janvier 2007

Exercice 103. — 1. Vérifier que la fonction $(x \mapsto \ln x)$ est concave sur son ensemble de définition, et en déduire que
$$\forall x > 0, \ \ln x \leqslant x - 1\,.$$
Dans toute la suite, on étudie la fonction $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x}$.

2. Déterminer l'ensemble de définition de f.
3. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition, et calculer sa dérivée.
4. Écrire la formule de Taylor-Young pour f à l'ordre 2 au point $x_0 = 1$. En déduire l'équation de la tangente en ce point et la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.
5. Quelle est l'approximation affine de f au voisinage de 1 ? En déduire une valeur approchée de $f(1,01)$.
6. Montrer que f peut se prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = -1$. On note encore f son prolongement.
7. Montrer que la fonction ainsi prolongée est dérivable à droite en 0. La dérivée est-elle continue à droite en 0 ?
8. Etudier les variations de f et tracer sommairement sa courbe représentative en indiquant les tangentes aux points $(0, f(0))$ et $(1, f(1))$.
9. En fonction des valeurs de y, discuter le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$.

Exercice 104. — Déterminer toutes les fonctions $f\ :\ ]0;+\infty[\longrightarrow]0;+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ dont l'élasticité en x vaut x pour tout $x > 0$.

Exercice 105. — On pose :

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \leqslant y \quad \text{et} \quad y^2 - 2y \leqslant 3 - x^2\right\}$$

et

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x - 1| < 3 \quad \text{et} \quad |y| \geqslant 2\right\}.$$

1. Représenter graphiquement A et B.
2. Ces domaines sont-ils bornés ? Justifier.
3. Sont-ils ouverts ? fermés ? (*Dans cette question, et uniquement dans cette question, on demande de répondre sans donner de justification*).

2.9. Test du 25 novembre 2008

Exercice 106. — Soit la fonction

$$f(x, y) = \ln(2 - x^2 - y^2) + \sqrt{2x + 3y}.$$

1. (a) Donner et tracer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
   (b) L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est-il convexe, borné ? On demande de justifier les réponses.
   (c) Soit k un réel, donner la définition de la courbe de niveau k associée à f.
2. Soit maintenant la fonction suivante

$$g(x) = f(x, 0).$$

   (a) Calculer $g(x)$. Donner le domaine de définition de g et montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle que l'on déterminera.
   (b) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
   (c) Écrire le développement limité de g à l'ordre 2 au point $x = 1$.
   (d) En déduire l'équation de la tangente au point $(1, g(1))$. Préciser la position du graphe de g au voisinage de $x = 1$.

Exercice 107. — Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2}{x}\, e^{-x^2}.$$

1. Calculer l'élasticité de $f(x)$ pour tout $x > 0$.
2. Donner une valeur approchée de la variation relative de f lorsque x augmente de 5% à partir de 1.
3. En partant de $x_0 = 1$, de combien faut-il faire varier x pour que f augmente de 1% ? (On demande un calcul approché).
4. Calculer l'élasticité de $f^2(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 108. — 1. Donner l'équation cartésienne du plan passant par $A = (1, 2, 3)$ et orthogonal au vecteur $v = (1, 1, 0)$.

2. Soit l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |2x + 1| < y - 1\}.$$

   (a) Représenter graphiquement $\mathcal{A}$.

(b) Sans justification, expliciter sur le graphique la frontière de $\mathcal{A}$.

(c) L'ensemble $\mathcal{A}$ est-il borné ? convexe ? On demande de justifier les réponses.

2.10. Test du 13 janvier 2009

Exercice 109. — **Partie 1.** On définit la fonction φ par

$$\varphi(x) = 2x - \frac{2}{x^2} + \ln x.$$

1. Tracer grossièrement la courbe représentative de φ sur son domaine de définition. Montrer que φ réalise une bijection sur des intervalles que l'on précisera.
2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur son domaine de définition que l'on déterminera.
3. Soit la fonction f suivante :

$$f(x, y) = 2\left(\sqrt{x+y+1}\right) - \frac{2}{(\sqrt{x+y+1})^2} + \ln\left(\sqrt{x+y+1}\right).$$

Étudier la convexité (ou la concavité) de f sur son ensemble de définition.

Partie 2. La surface $S(x, y)$ d'un container en carton d'un volume 1 m^3 dont la base a pour dimensions x et y est la fonction

$$S(x, y) = 2\,x\,y + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + x\,\ln x + y\,\ln y - (x + y) + 2.$$

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_S$ de S et montrer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_S$.
2. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de S.
3. En utilisant la partie 1, déterminer les points critiques (x, y) de S tels que $x = y$ et leur nature.
4. Donner une estimation de la variation relative de S lorsque x augmente de 5% et y de 10% à partir du point $(1, 1)$.
5. Écrire la formule de Taylor-Young de S à l'ordre 2 au point $(1, 1)$. En déduire une approximation à l'ordre 2 de la variation absolue de S lorsque x augmente de 0.05 et y de 0.1 à partir du point $(1, 1)$ en supposant que le reste est négligeable.
6. Donner l'équation du plan tangent au graphe de S au point $(1, 1)$ et la position du graphe par rapport au plan tangent.
7. La fonction S est-elle convexe sur son domaine de définition ? concave ? Justifiez votre réponse.
8. Montrer que la fonction $x \mapsto x\,\ln x$ est convexe sur $\mathbb{R}_*^+$. En déduire que pour tout $x > 0$,

$$x \ln x \geqslant x - 1,$$

puis que la fonction S est positive sur son domaine de définition. La fonction S est-elle bornée sur son domaine de définition ? Vous devez justifier votre réponse.

Exercice 110. — On définit la fonction
$$f(x,y) = x\left(y^2 + (\ln x)^2\right).$$

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.
2. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.
3. Déterminer les points critiques de f et déterminer leur nature.

2.11. Examen février 2006

Exercice 111. — Soit la fonction de deux variables réelles définies sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = e^{x^4+y^4-2xy}.$$
On sait que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer les dérivées partielles de f à l'ordre 1 puis à l'ordre 2 en un point (x,y) arbitraire de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $D^2f_{(0,0)}$ et en déduire la convexité de la fonction f.
3. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au point $(0,1)$.
4. Déterminer l'équation du plan tangent au point $(0,1)$ et sa position au voisinage de ce point par rapport à la courbe représentative de f.
5. Calculer, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $e_{f/x}(x,y)$ et $e_{f/y}(x,y)$.
6. En déduire une approximation de l'accroissement relatif de f au voisinage de $(1,2)$ lorsque x croît de 3% et y croît de 2%.

Exercice 112. — Soit la fonction f définie par
$$f(x,y) = (y-1)\ln(y-1) - \ln(x) + x^2 - xy + 2y^2 - 7y - \frac{3}{2}x + 3.$$

1. Donner $\mathcal{D}_f$, le domaine de définition de f et faire un dessin de cet ensemble. On précisera bien si les bords appartienent ou pas à l'ensemble.
2. L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est-il convexe ? *Nous admettons que $\mathcal{D}_f$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$.
4. Montrer que la fonction $\varphi : u \mapsto u \ln u$ est convexe sur son ensemble de définition.
5. En déduire la convexité de f sur $\mathcal{D}_f$.
6. Montrer que $(2,2)$ est un point critique.
7. En déduire la nature de $f(2,2)$.
8. La fonction f admet-elle un maximum global sur $\mathcal{D}_f$?

Exercice 113. — Soient les fonctions f et g suivantes :
$$f(x,y) = x^2 + y - \ln(x^2+y^2-7),$$
$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 8.$$
On va chercher dans cet exercice, les extrema de la fonction f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

1. Donner $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de définition de f et montrer que
$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | g(x, y) = 0\} \subset \mathcal{D}_f.$$
Tracer les deux ensembles sur le même dessin. *Nous admettons que $\mathcal{D}_f$ est un ouvert et que les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$.*
2. Montrer qu'il n'y a pas de point critique de deuxième espèce pour ce problème.
3. Nous cherchons les points critiques de première espèce pour f sur l'ensemble $\mathcal{D}_f$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.
   (a) Montrer que si (x, y) est un point critique alors on obtient $\lambda x = 0$, où λ est le multiplicateur de Lagrange associé.
   (b) En déduire alors les 4 points critiques de première espèce avec leur multiplicateur de Lagrange associé.
4. Sous la contrainte $g(x, y) = 0$, f admet-elle un minimum global et un maximum global ?
5. Préciser les points pour lesquels ces extrema globaux sous contrainte sont atteints.
6. Trouver la nature des autres points critiques.

2.12. Examen septembre 2006

Exercice 114. — Déterminer le mininum de la somme des carrés de trois nombres réels dont la somme est égale à 3, c'est-à-dire, déterminer le minimum de $x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x + y + z = 3$. *On pourra se ramener à l'étude d'une fonction de deux variables.*

Exercice 115. — On considère la fonction f définie par $f(x, y) = x^4 + 2y^2 - 4axy$ où a est un paramètre réel.

1. Discuter, suivant les valeurs de a, l'existence des points critiques de f.
2. Discuter, suivant les valeurs de a, la nature locale des points critiques de f.

Exercice 116. — On considère la fonction f définie par
$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f. Cet ensemble est-il convexe ? On admet que $\mathcal{D}$ est un ensemble ouvert.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et calculer le gradient de f en chaque point de $\mathcal{D}$.
3. Déterminer l'approximation affine de f au voisinage du point $(1, 2)$.
4. On cherche les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid x^2 + y^2 = 2\}$.
   (a) Montrer qu'il n'existe pas de points critiques de seconde espèce.
   (b) Montrer que si $(x, y) \in \mathcal{E}$ est un point critique de première espèce tel que $xy \neq 0$, alors $x^4 = y^4$.
   (c) Déterminer les extrema de f sur $\mathcal{E}$.
5. Déterminer les extrema de f sur $\mathcal{D}$. *On pourra étudier le signe de f sur $\mathcal{D}$.*
6. Déterminer les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.

2.13. Examen février 2007

Exercice 117. — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = xye^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}.$$

1. (a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(u) = ue^{-\frac{u^2}{2}}$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer φ' et φ''.

   (b) Déterminer les extrema de φ sur $\mathbb{R}$ et donner le plus grand intervalle (au sens de l'inclusion) sur lequel φ est convexe.

   (c) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, exprimer $f(x,y)$ en fonction de $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$. En déduire une expression des dérivées partielles d'ordre 1 de f en fonction de φ et φ'.

   (d) Déterminer les cinq points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.

   (e) Toujours à l'aide des fonctions φ, φ' et φ'', donner la matrice hessienne de f (i.e. les dérivées partielles secondes de f) en un point quelconque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   (f) Donner la nature locale de tous les points critiques. *Une attention particulière sera donnée à cette question.*

   (g) On pose $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}$. On suppose que $\mathcal{D}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

      (i) Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$.

      (ii) Montrer que la fonction composée $h = \ln \circ f$ est bien définie sur $\mathcal{D}$ et étudier la convexité ou la concavité de h sur $\mathcal{D}$.

      (iii) En déduire sans calcul les extrema de f sur $\mathcal{D}$.

      (iv) Montrer que f est bornée sur $\mathcal{D}$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

   (a) Montrer qu'il n'y a pas de point critique de seconde espèce de f sous la contrainte $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$.

   (b) Montrer que $(x,y) \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifient l'équation $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ si et seulement si
$$\begin{cases} y^3 e^{-1/2} = 2\lambda x \\ x^3 e^{-1/2} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

   (c) Trouver les quatre points critiques de première espèce de f sous la contrainte $\mathcal{E}$.

   (d) Donner la nature de ces points critiques et donner les extrema de f sous la contrainte $\mathcal{E}$. Représenter sur un dessin la contrainte et les différents points critiques.

Exercice 118. — On considère la fonction réelle de deux variables f définie par
$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{x+y}.$$

1. Déterminer et représenter son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On admet qu'il est ouvert. Est-il convexe ? Justifier votre réponse.

2. Déterminer et représenter (sur le même graphique que pour la question précédente) la courbe de niveau $\mathcal{C}_k$ pour $k = -2$ et $k = 1$.
3. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$ et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.
4. En déduire une valeur approchée de f au point $(0.9, 1.2)$ et déterminer l'équation de la tangente à la courbe de niveau $\mathcal{C}_1$ au point $(1, 1)$.
5. Trouver les extrema de f sur $\mathcal{D}_f$.
6. Trouver les extrema de f sur le cercle de centre $(-1, -1)$ et rayon $\sqrt{2}$. *On pourra utiliser la question 2.*
7. Etudier la convexité ou la concavité de f sur les ensembles E_1 et E_2 définis par
$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 0\}.$$

2.14. Examen septembre 2007

Exercice 119. — Une firme (en situation de monopole) produit un unique bien qui peut être vendu à deux clients a et b. Si la firme produit la quantité Q_a d'unités de bien pour le client a, alors celui-ci est diposé à payer le prix unitaire de $50 - 5Q_a$. Si la firme produit la quantité Q_b d'unités de bien pour le client b, alors celui-ci est diposé à payer le prix unitaire de $100 - 10Q_b$. Le coût pour la firme de produire Q unités de bien est $90 + 20Q$.

1. Que représente la fonction Π définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ par
$$\Pi(Q_a, Q_b) = Q_a(50 - 5Q_a) + Q_b(100 - 10Q_b) - [90 + 20(Q_a + Q_b)].$$
2. Si la firme veut maximiser son profit, quelle quantité de bien doit-elle produire et vendre à chaque client ? Calculer alors le profit maximal.

Exercice 120. — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x^2 + y^2)\exp(-x)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Trouver les optima locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle ne possède pas de maximum global.

Exercice 121. — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y$ et l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2/9 = 1\}$.

1. On suppose que l'ensemble $\mathcal{E}$ est fermé. Montrer qu'il est compact.
2. Représenter, sur un même graphique, les courbes de niveau -3, 0 et 3 de la fonction f ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.
3. Déterminer, par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, les extrema de f sur $\mathcal{E}$. Placer les points sur le dessin.

Exercice 122. — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 y$ et l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 3\}$.

1. On suppose que l'ensemble $\mathcal{E}$ est fermé. Montrer qu'il est compact.
2. On cherche à optimiser f sur $\mathcal{E}$.
   (a) Trouver les 6 points critiques de première espèce sous contrainte.

(b) Déterminer la nature de chaque points critiques.

Exercice 123. — On considère $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \text{et} \quad x+y+z=0\}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer le point de $\mathcal{C}$ qui est le plus éloigné du point $A = (1,1,0)$ au sens de la distance euclidienne.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2.$$

Déterminer les extrema locaux de f sur l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par

$$\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+(x+y)^2 = 1\}.$$

2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est compact (on admet que $\mathcal{C}$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^3$).
3. Montrer les deux propriétés suivantes :
   (a) si $(x,y,z) \in \mathcal{C}$ alors $(x,y) \in \mathcal{E}$,
   (b) si $(x,y) \in \mathcal{E}$ alors $(x,y,-x-y) \in \mathcal{C}$.
4. Soit la fonction F définie par

$$\forall M = (x,y,z), \quad F(x,y,z) = d(M,A)^2.$$

Répondre à la question initiale.

2.15. Examen février 2008

Exercice 124. — Soient les fonctions f et g suivantes

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \ln(x+y) \quad \text{et} \quad g(x,y) = x + xy + y.$$

1. Etude de f
   (a) Donner $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f. On admet que D_f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition.
   (b) Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage du point $(1,1)$.
   (c) Donner l'équation du plan tangent au graphe au point $(1,1)$ et donner sa position par rapport au graphe de f.
   (d) Donner l'approximation affine de f au voisinage du point $(1,1)$. Calculer ensuite une approximation de $f(1.2, 0.98)$. Vous pouvez utiliser pour cette question l'approximation suivante $\ln(2) \sim 0.69$.
   (e) La fonction f est-elle bornée ?
   (f) Étudier la convexité de f sur son ensemble de définition.
2. Calcul des extrema de f sous contrainte $g(x,y) = 3$.
   (a) Montrer qu'il n'y a pas de point critique de deuxième espèce sous la contrainte $\{(x,y) \in \mathcal{D}_f \mid g(x,y) = 3\}$.

(b) Calculer le point critique de première espèce sous la contrainte suivante
$$\{(x, y) \in \mathcal{D}_f \mid g(x, y) = 3\}.$$
Vous pouvez montrer dans un premier temps qu'il y a deux possibilités : $x = y$ ou alors $\lambda = -1$. Conclure à l'impossibilité de ce second cas en posant $u = x + y$.

(c) Donner la nature du point critique (extremum local ou point col) sous la contrainte $\{(x, y) \in \mathcal{D}_f \mid g(x, y) = 3\}$.

(d) Soit la fonction
$$\Phi(x) = \frac{3 - x}{1 + x}.$$
Étudier les variations de Φ sur son ensemble de définition et tracer son graphe.

(e) Dessiner maintenant la contrainte $\{(x, y) \in \mathcal{D}_f \mid g(x, y) = 3\}$ avec le point critique de première espèce sous la contrainte $\{(x, y) \in \mathcal{D}_f \mid g(x, y) = 3\}$ que vous avez trouvé précédemment.

Exercice 125. — Une entreprise fabrique deux modèles de petites voitures, les modèles X et Y. Le modèle X, le plus abordable, se vend à 1 \$ pièce. Quant au modèle Y, beaucoup plus sophistiqué, il se vend à 3 \$.
Le coût de fabrication, exprimé en \$, est donné par la fonction suivante :
$$C(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 2x - 1000,$$
où x est le nombre de petites voitures du modèle X et y est le nombre de petites voitures du modèle Y. On suppose que les jouets fabriqués sont tous écoulés sur le marché.

1. Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, donner $P(x, y)$, le profit de l'entreprise lorsqu'elle a vendu x jouets de modèle X et y jouets de modèle Y.
2. La fonction P est-elle convexe $(\mathbb{R}^{+*})^2$? Concave sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$?
3. La capacité de production de l'entreprise est au total 20 jouets par jour. En supposant que l'entreprise tourne à plein régime, trouver la répartition maximale entre les modèles de type X et Y permettant de maximiser le profit quotidien.

   Calculer dans ce cas le profit réalisé.
4. Le conseil d'administration de l'entreprise s'interroge sur la pertinence de vouloir produire à pleine capacité. Il se demande s'il ne peut pas augmenter le profit en produisant autrement.

   Pouvez-vous aider le conseil d'administration ?

Exercice 126. — Soit la fonction
$$f(x, y) = (2 - x)e^{x^2+y^2-xy}.$$

1. Calculer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter la courbe de niveau 0 de f. Montrer que que point $(2, 0)$ appartient à cette courbe de niveau et donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe de niveau en ce point.

2.16. Examen septembre 2008

Exercice 127. — Soit f, la fonction définie par
$$f(x) = \frac{3-x}{x+1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Calculer les variations de f et tracer son graphe.
3. La fonction f a-t-elle des extrema sur $\mathcal{D}_f$? Si oui, lesquels ? La fonction f est-elle convexe ?
4. Soit la fonction $\Phi(x) = \ln(f(x))$. Etudier les variations de Φ sur son ensemble de définition et tracer son graphe.

Exercice 128. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Donner les domaines de définition et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes en un point arbitraire (x, y) de $\mathbb{R}^2$:
$$h(x, y) = f(2x - 3y + 3), \quad k(x, y) = f\left(x^2 - \frac{y^3}{3}\right).$$
On exprimera le résultat en fonction de f'.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction h.
3. Montrer que si f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ alors h est convexe sur son domaine de définition.

Exercice 129. — On considère la fonction f définie par
$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f. Cet ensemble est-il convexe ? On admet que $\mathcal{D}$ est un ensemble ouvert.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et calculer le gradient de f en chaque point de $\mathcal{D}$.
3. Déterminer l'approximation affine de f au voisinage du point $(1, 2)$.
4. On cherche les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid x^2 + y^2 = 2\}$.
   (a) Montrer qu'il n'existe pas de point critique de seconde espèce.
   (b) Chercher les points critiques de première espèce. *On pourra par exemple montrer que si $(x, y) \in \mathcal{E}$ est un point critique de première espèce tel que $xy \neq 0$, alors $x^4 = y^4$.*
   (c) Déterminer les extrema de f sur $\mathcal{E}$.
5. Déterminer les extrema de f sur $\mathcal{D}$. *On pourra étudier le signe de f sur $\mathcal{D}$.*
6. Déterminer les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.

2.17. Examen du 5 février 2009

Exercice 130. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x, y) = \frac{y^2}{2} e^{x-1} - \frac{x}{2} - y.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer l'unique point critique M_0 de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer les dérivées secondes de f et en déduire la nature de M_0.
4. La fonction f est-elle convexe ?
5. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f au point $M_1 = (1, -2)$. Préciser l'équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(1, -2, f(1, -2))$, et la position de la surface représentative de f par rapport à ce plan.
6. Écrire l'approximation affine de f en M_1. En déduire une valeur approchée de f(0.9,-1.95).
7. Calculer $e_{f/x}(M_1)$ et $e_{f/y}(M_1)$. À partir du point M_1, on suppose que les variations relatives de x et y vérifient $\frac{\Delta x}{x} = \frac{2}{3}\frac{\Delta y}{y}$.

   Si f augmente de 2% à partir de M_1, déterminer les variations relatives de x et de y qui ont provoqué ce changement.

Exercice 131. — 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y.$$

   (a) Calculer les points critiques de f et donner leur nature locale.

   (b) En étudiant f, préciser si les extrema locaux trouvés à la question précédentes sont globaux ou pas.

   (c) Rechercher et représenter sur un graphique la courbe de niveau 0 de f.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x, y) = x^2 + y^2.$$

   On cherche maintenant à optimiser f sous la contrainte $g(x, y) = 1$.

   (a) Montrer qu'il n'y a pas de point critique de seconde espèce sous la contrainte $g(x, y) = 1$.

   (b) Chercher les 6 points critiques de première espèce sous la contrainte $g(x, y) = 1$. Représenter ces points critiques sur un dessin.

   (c) Donner le maximum et le minimum global de f sous la contrainte $g(x, y) = 1$.

   (d) Donner la nature des autres points critiques sous la contrainte $g(x, y) = 1$.