

Méthode d'élimination de Gauss: exemple

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = b \quad \det(A) = 5$$

Descente: élimination sur la première colonne (x_1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Descente: élimination sur la deuxième colonne (x_2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ d'où par remontée } X = \begin{pmatrix} -6/5 \\ -3/5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

factorisation de Gauss: exemple

D'où $UX = b'$ avec

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} b'$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} b'$$

D'où la factorisation de Gauss

$$A = LU$$

avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Généralisation à $A \in \mathcal{M}_n$ inversible: $AX = b$

$$A^{(1)} = A, \quad b^{(1)} = b$$

$$A^{(2)} = L^{(1)}A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{a_{2,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{k,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{n,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1,n}^{(1)} \\ a_{2,1}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k,1}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{k,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{et } b^{(2)} = L^{(1)}b^{(1)}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{k,2}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{k,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{avec } a_{i,j}^{(2)} = a_{i,j}^{(1)} - \frac{a_{i,1}^{(1)}a_{1,j}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}}, \quad i, j = 2, \dots, n$$

Généralisation à $A \in \mathcal{M}_n$ inversible: $AX = b$

$$A^{(k+1)} = L^{(k)}A^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{n,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_{k,k}^{(k)} & \dots & \dots & a_{k,n}^{(k)} \\ 0 & \dots & a_{k+1,k}^{(k)} & \dots & \dots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n,k}^{(k)} & \dots & \dots & a_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix}$$

et $b^{(k+1)} = L^{(k)}b^{(k)}$

$$A^{(k+1)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_{k,k}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k,n}^{(k)} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{n,n}^{(k+1)} \end{pmatrix} \text{ avec } a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - \frac{a_{i,k}^{(k)} a_{k,j}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}, \quad i, j = k+1, \dots, n$$

Généralisation à $A \in \mathcal{M}_n$ inversible: $AX = b$

$$A = LU$$

avec

$$U = A^{(n)}$$

$$U = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & a_{k,k}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k,n}^{(k)} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_{n,n}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Généralisation à $A \in \mathcal{M}_n$ inversible: $AX = b$

$$A = LU$$

avec

$$U = A^{(n)}$$

$$L = \left(L^{(n-1)} \dots L^{(k)} \dots L^{(1)} \right)^{-1} = \left(L^{(1)} \right)^{-1} \dots \left(L^{(k)} \right)^{-1} \dots \left(L^{(n-1)} \right)^{-1}$$

$$\left(L^{(k)} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{a_{n,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{k,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Généralisation à $A \in \mathcal{M}_n$ inversible: $AX = b$

$$(L^{(k)})^{-1}(L^{(k+1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \frac{a_{k+2,k+1}^{(k+1)}}{a_{k+1,k+1}^{(k+1)}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{n,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & \frac{a_{n,k+1}^{(k+1)}}{a_{k+1,k+1}^{(k+1)}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Généralisation à $A \in \mathcal{M}_n$ inversible: $AX = b$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{a_{2,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & 1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \frac{a_{k+2,k+1}^{(k+1)}}{a_{k+1,k+1}^{(k+1)}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{n,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & \vdots & \frac{a_{n,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & \frac{a_{n,k+1}^{(k+1)}}{a_{k+1,k+1}^{(k+1)}} & \frac{a_{n,k}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} & 1 \end{pmatrix}$$

Existence et unicité de la factorisation $A = LU$

- Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on suppose que les sous matrices diagonales de dimension k

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

sont inversibles pour tous $k = 1, \dots, n$.

- Alors la factorisation $A = LU$ avec $L_{i,i} = 1, i = 1, \dots, n$ existe et est unique.

Preuve:

- Existence établie précédemment car on montre que le pivot $a_{k,k}^k \neq 0$
- Unicité: $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ implique $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = I$

Algorithme: factorisation LU de $A \in \mathcal{M}_n$ inversible

Initialisation: $U = A, L = I$

- For $k = 1, \dots, n - 1$ (boucle sur les pivots)
 - For $i, j = k + 1, \dots, n$
 - $U_{i,j} \leftarrow U_{i,j} - \frac{U_{i,k}U_{k,j}}{U_{k,k}}$ (on suppose le pivot $U_{k,k}$ non nul)
 - End For
 - For $i = k + 1, \dots, n$
 - $L_{i,k} = \frac{U_{i,k}}{U_{k,k}}$
 - End For
- End For
- $U \leftarrow \text{triu}(U)$

Remarque 1: on a supposé que $U_{k,k} \neq 0$

Remarque 2: on peut tout stocker dans A au cours de l'algorithme

Résolution de $LUX = b$

Descente: $LY = b$

- For $i = 1, \dots, n$
 - $Y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} Y_j$
- End For

Remontée: $UX = Y$

- For $i = n, \dots, 1; -1$
 - $X_i = \frac{Y_i - \sum_{j=i+1}^n U_{i,j} X_j}{U_{i,i}}$
- End For

Complexité de l'algorithme

On compte le nombre d'additions et de multiplications et de divisions (opérations flottantes)

- Factorisation: $2/3n^3 + \mathcal{O}(n^2)$
- Descente remontée: $2n^2 + \mathcal{O}(n)$

Conservation de la largeur de bande

$$q = \max_{i,j=1,\dots,n} \{|j - i| \text{ tel que } A_{i,j} \neq 0\}$$

La factorisation $A = LU$ précédente (sans pivotage) conserve la largeur de bande q pour U et L

Preuve: propriété vérifiée pour toutes les matrices $A^{(k)}$ à chaque étape $k = 1, \dots, n$

Complexité:

- Factorisation: $2nq^2 + \mathcal{O}(nq)$
- Descente remontée: $2nq + \mathcal{O}(n)$

Algorithme: factorisation LU pour une matrice bande de largeur de bande q

Initialisation: $U = A, L = I$

- For $k = 1, \dots, n - 1$ (boucle sur les pivots)
 - For $i, j = k + 1, \dots, \max(k + q, n)$
 - $U_{i,j} \leftarrow U_{i,j} - \frac{U_{i,k} U_{k,j}}{U_{k,k}}$ (on suppose le pivot $U_{k,k}$ non nul)
 - End For
 - For $i = k + 1, \dots, \max(k + q, n)$
 - $L_{i,k} = \frac{U_{i,k}}{U_{k,k}}$
 - End For
- End For
- $U \leftarrow \text{triu}(U)$

Résolution de $LUX = b$ pour une matrice bande de largeur de bande q

Descente: $LY = b$

- For $i = 1, \dots, n$
 - $Y_i = b_i - \sum_{j=\max(i-q,1)}^{i-1} L_{i,j} Y_j$
- End For

Remontée: $UX = Y$

- For $i = n, \dots, 1; -1$
 - $X_i = \frac{Y_i - \sum_{j=i+1}^{\min(i+q,n)} U_{i,j} X_j}{U_{i,i}}$
- End For

Matrices de permutation

Bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$

Première représentation:

$$P = (j_1, \dots, j_n)$$

avec $j_i \in \{1, \dots, n\}$ et $j_i \neq j_l$ pour $i \neq l$.

Action sur les vecteurs $b \in \mathbb{R}^n$: $(Pb)_i = b_{P(i)}$ pour $i = 1, \dots, n$

D'où la représentation matricielle: $P_{i,j} = 1$ si $j = P(i)$, sinon 0. On a sur les matrices $A \in \mathcal{M}_n$:

$$(PA)_{i,j} = A_{P(i),j}.$$

Exemple

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Pb = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_4 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Transpositions

$$\tau = (i_1, i_2)$$

est la permutation telle que

$$\tau(i_1) = i_2, \tau(i_2) = i_1, \tau(i) = i \quad \forall i \neq i_1, i_2.$$

On a

$$\tau^2 = I,$$

donc

$$\tau^{-1} = \tau.$$

factorisation avec pivotage $PA = LU$

On a $A^{(1)} = A$ et pour $k = 1, \dots, n-1$

$$A^{(k+1)} = L^{(k)} \tau^{(k)} A^{(k)}$$

avec $\tau^{(k)} = (k, i_k)$ pour $i_k \geq k$ tel que $|A_{i_k, k}^{(k)}| = \max_{i=k, \dots, n} |A_{i, k}^{(k)}|$.

D'où par récurrence

$$A^{(n)} X = UX = L^{(n-1)} \tau^{(n-1)} L^{(n-2)} \tau^{(n-2)} \dots \tau^{(k+1)} L^{(k)} \tau^{(k)} \dots \tau^{(2)} L^{(1)} \tau^{(1)} b$$

$$UX = L^{(n-1)} \left(\tau^{(n-1)} L^{(n-2)} \tau^{(n-1)} \right) \dots \left(\tau^{(n-1)} \dots \tau^{(2)} L^{(1)} \tau^{(2)} \dots \tau^{(n-1)} \right) \left(\tau^{(n-1)} \dots \tau^{(1)} \right) b$$

d'où

$$L = \left(\tau^{(n-1)} \dots \tau^{(2)} (L^{(1)})^{-1} \tau^{(2)} \dots \tau^{(n-1)} \right) \dots \left(\tau^{(n-1)} (L^{(n-2)})^{-1} \tau^{(n-1)} \right) (L^{(n-1)})^{-1}$$

et

$$P = \left(\tau^{(n-1)} \dots \tau^{(2)} \tau^{(1)} \right)$$

Algorithme avec pivotage partiel $PA = LU$

Initialisation: $U = A, L = I, P = (1, \dots, n)$

- For $k = 1, \dots, n - 1$ (boucle sur les pivots)
 - $i_k = \operatorname{argmax}_{i=k, \dots, n} |U_{i,k}|$ (choix du pivot) transposition: $\tau = (k, i_k), i_k \geq k$
 - $U \leftarrow \tau U$ permutation des lignes de U
 - $L \leftarrow \tau L \tau$ permutation des lignes de L hors diagonale
 - $P \leftarrow \tau P$ mise à jour de la permutation P pour b
 - For $i, j = k + 1, \dots, n$
 - $U_{i,j} \leftarrow U_{i,j} - \frac{U_{i,k} U_{k,j}}{U_{k,k}}$
 - End For
 - For $i = k + 1, \dots, n$
 - $L_{i,k} = \frac{U_{i,k}}{U_{k,k}}$
 - End For
- End For
- $U \leftarrow \operatorname{triu}(U)$

Algorithme avec pivotage partiel $PA = LU$ et avec stockage de L (sans la diagonale) et de U dans la matrice A

Initialisation: $P = (1, \dots, n)$

- For $k = 1, \dots, n - 1$ (boucle sur les pivots)
 - $i_k = \operatorname{argmax}_{i=k, \dots, n} |A_{i,k}|$ (choix du pivot) transposition: $\tau = (k, i_k), i_k \geq k$
 - $A \leftarrow \tau A$ permutation des lignes k et i_k
 - $P \leftarrow \tau P$ mise à jour de la permutation
 - For $i = k + 1, \dots, n$
 - $A_{i,k} \leftarrow \frac{A_{i,k}}{A_{k,k}}$
 - End For
 - For $i, j = k + 1, \dots, n$
 - $A_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - A_{i,k}A_{k,j}$
 - End For
- End For

L est la partie triangulaire inférieure stricte de A plus la diagonale unité.

U est la partie triangulaire supérieure de A (avec la diagonale).

Résolution de $PAX = LUX = Pb$ pour la factorisation avec pivotage P

Descente: $LY = Pb$

- For $i = 1, \dots, n$
 - $Y_i = b_{P(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} Y_j$
- End For

Remontée: $UX = Y$

- For $i = n, \dots, 1; -1$
 - $X_i = \frac{Y_i - \sum_{j=i+1}^n U_{i,j} X_j}{U_{i,i}}$
- End For

Conditionnement

Soit $\|\cdot\|$ la norme induite dans \mathcal{M}_n par une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n

Conditionnement de A inversible : $\text{Cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cond}(A) \geq 1 \\ \text{Cond}(\alpha A) = \text{Cond}(A) \\ \text{Cond}(AB) \leq \text{Cond}(A)\text{Cond}(B) \end{array} \right.$$

Soit A inversible et σ_1, σ_n les vp min et max de $A^t A$, on a pour la norme $\|\cdot\|_2$

$$\text{Cond}_2(A) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_1} \right)^{1/2}$$

On en déduit que $\text{Cond}_2(A) = 1$ ssi $A = \alpha Q$ où Q matrice orthogonale

Pour A SDP de vp min et max λ_1 et λ_n , on a pour la norme $\|\cdot\|_2$

$$\text{Cond}_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

Erreur d'arrondi

Soit A une matrice inversible, on cherche à estimer l'influence sur la solution d'une erreur d'arrondi sur le second membre b

$$\begin{cases} Ax = b \\ A(x + \delta x) = b + \delta b \end{cases}$$

implique

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$