$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

Position du problème:

But: ~~$Ax = b$~~. Résoudre: $Ax = b$

$\sigma \neq 0 \quad x = A^{-1} b$.

Méthode directe:

- Méthode élimination de Gauss
- " Gauss Jordan

} T.D.1

- Factorisation LU.
- Factorisation Cholesky.

Méthode itérative: - Jacobi, Gauss - Seidel

Exo 1:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

L1, Gr 5, Algèbre Linéaire **MR BEY**

2012 /2013 **Université Paris Dauphine**

Devoir de Maison 5

Durée : 1 H :30

Question de cours. Enoncer le théorème du rang.

Exercice 1. Soit A la matrice 4×4 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme défini par $f(v) = Av$ pour tout $v \in \mathbb{R}^4$.

a. Déterminer le rang de f.

b. Déterminer une base de $\mathrm{im}(f)$.

c. Déterminer une base de $\ker(f)$.

Exercice 2. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer $\det(A)$.

b. Déterminer A^{-1}.

Exercice 3. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres de A.

b. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

c. Déterminer la matrice $A' = P^{-1}AP$.

① Décomposition (LU) :

Etape 1 :

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -8 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \qquad L^{(1)} = I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 2 :

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 \end{array}$$

$$\cancel{L^{(2)} = \left(E^{(2)}\right)^{-1} =}$$

avec $\cancel{E^{(2)} = I \prod_{i=} T_i P_2 \left(-a_i\right.}$

$$E^{2} = \prod_{i=2}^{3} T_i$$

L1, Gr 5, Algèbre Linéaire **MR BEY**

2012 /2013 **Université Paris Dauphine**

Devoir de Maison 5

Durée : 1 H :30

Question de cours. Enoncer le théorème du rang.

Exercice 1. Soit A la matrice 4×4 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme défini par $f(v) = Av$ pour tout $v \in \mathbb{R}^4$.

a. Déterminer le rang de f.

b. Déterminer une base de $\operatorname{im}(f)$.

c. Déterminer une base de $\ker(f)$.

Exercice 2. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer $\det(A)$.

b. Déterminer A^{-1}.

Exercice 3. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres de A.

b. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

c. Déterminer la matrice $A' = P^{-1}AP$.

$A =$

$\Delta_1 = |2| \neq 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 4 \neq 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

~~Tous~~ les mineurs principaux de la matrice A sont tous nuls, donc A admet une unique factorisation LU,

avec L matrice triang. inf, diag 1, et

U "   = sup ~~diagonal~~

L1, Gr 5, Algèbre Linéaire **MR BEY**

2012 /2013 **Université Paris Dauphine**

Devoir de Maison 5

Durée : 1 H :30

Question de cours. Enoncer le théorème du rang.

Exercice 1. Soit A la matrice 4×4 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme défini par $f(v) = Av$ pour tout $v \in \mathbb{R}^4$.

a. Déterminer le rang de f.

b. Déterminer une base de $\mathrm{im}(f)$.

c. Déterminer une base de $\ker(f)$.

Exercice 2. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer $\det(A)$.

b. Déterminer A^{-1}.

Exercice 3. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres de A.

b. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

c. Déterminer la matrice $A' = P^{-1}AP$.

Rappel.

$$E^{(P_2)} = \prod_{i=P_2}^{n-1} T_{iP_{2-1}}\left(-\frac{a_{iP_{2-1}}^{(P_2)-1}}{a_{P_{2-1}P_{2-1}}^{(P_2)-1}}\right).$$

Etape 1:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$E \quad E^{(1)} = \prod_{i=2}^{4} T_{i1}\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right).$$

$$E^{(1)} = T_{21}\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \cdot T_{31}\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right) \cdot T_{41}\left(-\frac{a_{41}}{a_{11}}\right)$$

$$= T_{21}(-2) \quad T_{31}(1) \quad T_{41}(0).$$

L1, Gr 5, Algèbre Linéaire **MR BEY**

2012 /2013 **Université Paris Dauphine**

Devoir de Maison 5

Durée : 1 H :30

Question de cours. Enoncer le théorème du rang.

Exercice 1. Soit A la matrice 4×4 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme défini par $f(v) = Av$ pour tout $v \in \mathbb{R}^4$.

a. Déterminer le rang de f.

b. Déterminer une base de $\mathrm{im}(f)$.

c. Déterminer une base de $\ker(f)$.

Exercice 2. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer $\det(A)$.

b. Déterminer A^{-1}.

Exercice 3. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres de A.

b. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

c. Déterminer la matrice $A' = P^{-1}AP$.

$$\left(E^{(1)}\right)^{-1} = T_{21}(2)\, T_{31}(-1)\, T_{41}(0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E\,A$ $\quad \boxed{A^{(1)} = E^{(1)} A.}$

<u>Etape 2</u>

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 15 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 \end{array}$$

$$\cancel{A^{(2)}} = A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

L1, Gr 5, Algèbre Linéaire **MR BEY**

2012 /2013 **Université Paris Dauphine**

Devoir de Maison 5

Durée : 1 H :30

Question de cours. Enoncer le théorème du rang.

Exercice 1. Soit A la matrice 4×4 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme défini par $f(v) = Av$ pour tout $v \in \mathbb{R}^4$.

a. Déterminer le rang de f.

b. Déterminer une base de $\mathrm{im}(f)$.

c. Déterminer une base de $\ker(f)$.

Exercice 2. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer $\det(A)$.

b. Déterminer A^{-1}.

Exercice 3. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres de A.

b. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

c. Déterminer la matrice $A' = P^{-1}AP$.

$$A^{(2)} = \begin{array}{c} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U.\ \text{Tri...}} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array}$$

$$E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_{33}(-1) \cdot T_{43}(-3).$$

$$\left(L^{(2)}\right) = \left(E^{(2)}\right)^{-1} = T_{33}(1)\ T_{43}(3).$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Triang. inf avec 1 en diag.}}$$

Ici

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L1, Gr 5, Algèbre Linéaire **MR BEY**

2012 /2013 **Université Paris Dauphine**

Devoir de Maison 5

Durée : 1 H :30

Question de cours. Enoncer le théorème du rang.

Exercice 1. Soit A la matrice 4×4 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme défini par $f(v) = Av$ pour tout $v \in \mathbb{R}^4$.

a. Déterminer le rang de f.

b. Déterminer une base de $\mathrm{im}(f)$.

c. Déterminer une base de $\ker(f)$.

Exercice 2. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer $\det(A)$.

b. Déterminer A^{-1}.

Exercice 3. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres de A.

b. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

c. Déterminer la matrice $A' = P^{-1}AP$.

$$E^{(1)}_{(P_2)}$$

$$G^{(P_1)} = \prod_{i=P_1+1}^{n} T_{iP_2}\left(-\frac{a_{iP_2}}{a_{P_2P_2}}\right)$$

avec $\cancel{T_{iP_1} = I}$

$\cancel{T_{ij}}$ $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad\quad & j \end{array} \\ i & \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

E_{ij}

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{21}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L1, Gr 5, Algèbre Linéaire — MR BEY

2012 /2013 — Université Paris Dauphine

Devoir de Maison 5

Durée : 1 H :30

Question de cours. Enoncer le théorème du rang.

Exercice 1. Soit A la matrice 4×4 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $f \colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme défini par $f(v) = Av$ pour tout $v \in \mathbb{R}^4$.

a. Déterminer le rang de f.

b. Déterminer une base de $\mathrm{im}(f)$.

c. Déterminer une base de $\ker(f)$.

Exercice 2. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer $\det(A)$.

b. Déterminer A^{-1}.

Exercice 3. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres de A.

b. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

c. Déterminer la matrice $A' = P^{-1}AP$.

$$A = LU$$

$$Ax = b \iff L\underbrace{Ux}_{y} = b.$$

$$Ly = b. \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$L \quad y_1$

$$Ux = y.$$

$$\det A = \det(LU)$$

$$= \det(L) \cdot \det(U).$$

$$= \underbrace{\prod_{i=1}^{4} L_{ii}}_{1} \; \underline{\prod_{i=1}^{4} \det u_{ii}}$$

L1, Gr 5, Algèbre Linéaire **MR BEY**

2012 /2013 **Université Paris Dauphine**

Devoir de Maison 5

Durée : 1 H :30

Question de cours. Enoncer le théorème du rang.

Exercice 1. Soit A la matrice 4×4 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme défini par $f(v) = Av$ pour tout $v \in \mathbb{R}^4$.

a. Déterminer le rang de f.

b. Déterminer une base de $\mathrm{im}(f)$.

c. Déterminer une base de $\ker(f)$.

Exercice 2. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer $\det(A)$.

b. Déterminer A^{-1}.

Exercice 3. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres de A.

b. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

c. Déterminer la matrice $A' = P^{-1}AP$.

EX2:

Théorème unicité :

A matrice donnée.

A admet une Factorisation LU où toutes les mineurs principaux sont non nuls.

avec L. triang inf diag 1. , U. triang sup.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21} \\ & & \end{pmatrix}$$

Méthode directe.

Par identification,

par la Élimination de Gauss et matrice élémentaire

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad E^{(1)} = Id_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \cancel{0}\,-\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{17}{8} \end{pmatrix} \qquad E^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

$L_3 + \frac{1}{8} L_2$

Matrice donnée ??

$$E^{(p_2)} = \prod_{i=p_2+1}^{n} T_{ip_2}\left(-\frac{a_{ip_2}^{(p_2)}}{a_{p_2p_2}^{(p_2)}} \right) \qquad 1 \leq p_2 \leq n-1$$

$$E^{(1)} = \prod_{i=2}^{3} T_{i1}\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}} \right) = T_{21}\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) T_{31}\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}} \right)$$

$$= \prod_{i=2}^{3} \quad = T_{21}(1)\; T_{31}\left(-\frac{1}{2} \right).$$

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$$

$=$

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$T_{21} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E^{(1)}.$$

$$L^{(1)} = \left(E^{(1)}\right)^{-1} = \prod_{i=2}^{3} T_{i1}\left(\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$$

$=\Big($

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ +1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L \end{array} \qquad \cancel{L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & & \end{pmatrix}}$$

$E^{(2)} =$

$$E^{(2)} A^{(1)} = A^{(2)}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

LU.

diag.

une matrice.
A admet une factorisation
si tous les mineurs
principaux sont non nuls.

$\Delta_1 = |2| \neq 0$ Th. m.

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$ diag. 1

Donc on pourrait factoriser
la matrice A sous la forme LU

L. U. =

Trung. trùng. cấp.
cấp

$$E_{P_k} \dots E_2 E_1 A = U.$$

Ex 1

$$\begin{pmatrix}2&-1&4&0\\4&-1&5&1\\-2&2&-2&3\\0&3&-9&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\16\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{k} - \frac{a_{ik}^{k}}{a_{kk}^{k}} a_{kj}^{k}$$

$$a_{2j}^{2} = a_{2j}^{1} - \frac{a_{21}^{1}}{a_{11}} a_{1j}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 8 & L_1 \\ 4x - y + 5z + t = 16 & L_2 \\ -2x + 2y - 2z + 3t = 3 & L_3 \\ 0 + 3y - 9z + 4t = 3 & L_4 \end{cases}$$

$\frac{g_3}{3}t + \frac{1}{3}t$

$$\begin{cases} 2x - y + 4z + 0 = 8 & L_1 \\ 0 \quad -3y - 3z + t = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 \quad 3y + 2z + 3t = 11 & L_3 \leftarrow L_3 - (-1)L_1 \\ 0 \quad 3y - 9z + 4t = 3 \end{cases}$$

$\frac{60t}{3}$

$20t + 5t$

$$\begin{cases} 2x - y + 4z + 0 = 8 & L_1 \\ 0 \quad -3y - 3z + t = 0 & L_2 \\ 0 \quad 0 + z + \frac{10t}{3} = 11 & L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{(-3)} L_1 \\ 0 \quad 0 - 6z + 5t = 3 & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 4z + 0 = 8 & L_1 \\ 0 \quad -3y - 3z + t = 0 & L_2 \\ 0 \quad 0 + z + \frac{10t}{3} = 11 & L_3 \\ 0 \quad 0 \quad 0 + 25t = 69 & L_4 \leftarrow L_4 \end{cases}$$

$t = \boxed{\frac{69}{20}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ t \end{matrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{6} & \cancel{2} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{46} & \cancel{-18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ \cancel{-50} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 9 & -11 & -1 \\ 8 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{matrix}\;\right|\left.\begin{matrix} 6 \\ -20 \\ -2 \\ -4 \end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 9 & -11 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 9 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & 46 & 14 \\ 0 & 1 & 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 9 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & 46 & 14 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

Ex3

$$UX = I_4$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x + y + 0 + 0 \\ 0 + 4y + z + 0 \\ 0 + 0 + 3z + t \\ 0 + 0 + 0 + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A \cdot I = A$$
$$I \cdot A = A$$

EA3

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\cancel{L_2}$ $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3} L_4.$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{4} L_3.$

ok

$A X = I.$

$A = I \times A^{-1}.$

$$\left(A \; I_n\right) = \left(I_n \; A^{-1}\right)$$

$$A . I = \underbrace{A . A^{-1}}_{Id} . A$$

$A I =$

$$\left(A \quad I\right) = \left(I \quad A^{-1}\right).$$

Corrigés des exercices du chapitre 2 : Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

Exercice 1 : Méthode de Gauss

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ - & & x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & & & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

On fait d'abord $\mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_4 \leftarrow \mathcal{L}_4 - 2\mathcal{L}_1$ pour éliminer x_1 dans les lignes 2, 3 et 4. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & 7x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}\right.$$

On fait ensuite $\mathcal{L}_4 \leftarrow \mathcal{L}_4 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & 6x_2 & + & \frac{3}{2}x_3 & & & = & -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

puis $\mathcal{L}_4 \leftarrow \mathcal{L}_4 - 6\mathcal{L}_3$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & & + & \frac{15}{2}x_3 & & & = & -\frac{15}{2} \end{array}\right. .$$

On a alors $\left\{\begin{array}{l} x_3 = -1 \\ x_2 = 1 + x_3 = 0 \\ x_4 = \dfrac{5 + 2x_2 + x_3}{2} = 2 \\ x_1 = 2 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{array}\right.$, soit $\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, -1, 2)}$.

Exercice 2 : Décomposition LU

On pose

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

1) Donner la décomposition LU de la matrice A ($i.e.$ $A = LU$ avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure).

2) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ où $b = {}^t\begin{pmatrix} 1.5 & 4 & -14 & -6.5 \end{pmatrix}$.

3) Soit $B = {}^tU\,A\,{}^tL$. Sans calculs supplémentaires, donner une décomposition LU de la matrice B.

---

1) Vérifions tout d'abord que, $\forall k = 1, \ldots, 4$, $\det \Delta_k \neq 0$:

$$\det \Delta_1 = -2 \neq 0\ ;$$

$$\det \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0\ ;$$

$$\begin{aligned} \det \Delta_3 &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -4 & -1 & -12 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -12 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -12 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -2(4) - 1(-24+16) - 1(-2) = 2 \neq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \Delta_4 = \det A &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -6 & 0 & -13 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -6 & -13 & 10 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} \\ &= -1 \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -2(5-2) = -6 \neq 0. \end{aligned}$$

Maintenant, obtenons la décomposition LU par la méthode du pivot de Gauss :
→ Étape 1 :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$

et

$$E_1 A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$

→Étape 2 :

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$E_2E_1A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Étape 3 :

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{U = E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{L = L_1L_2L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$.

2) Résolvons successivement les systèmes $L\tilde{x} = b$ et $Ux = \tilde{x}$:

$\rightarrow$ Système $L\tilde{x} = b$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} \tilde{x}_1 & & & & = & 1.5 \\ -\ \tilde{x}_1 & +\tilde{x}_2 & & & = & 4 \\ 2\tilde{x}_1 & -3x_2 & +\tilde{x}_3 & & = & -14 \\ \tilde{x}_1 & & -2\tilde{x}_3 & +\tilde{x}_4 & = & -6.5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{x}_1 = 1.5 \\ \tilde{x}_2 = 4 + \tilde{x}_1 = 5.5 \\ \tilde{x}_3 = -14 - 3 + 16.5 = -0.5 \\ \tilde{x}_4 = -6.5 - 1.5 - 1 = -9 \end{array}\right.$$

$\rightarrow$ Système $Ux = \tilde{x}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} -2x_1 & +\ x_2 & -\ x_3 & +\ x_4 & = & 1.5 \\ & x_2 & +\ 3x_3 & -\ 2x_4 & = & 5.5 \\ & & -\ x_3 & +\ x_4 & = & -0.5 \\ & & & -\ 3x_4 & = & -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_4 = 3 \\ x_3 = 0.5 + x_4 = 3.5 \\ x_2 = 5.5 + 2x_4 - 3x_3 = 1 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}(1.5 - x_2 + x_3 - x_4) = -0.5 \end{array}\right.$$

3) $B = {}^t\!U(LU)\,{}^t\!L = ({}^t\!UL)(U\,{}^t\!L)$. U est triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure donc ${}^t\!U$ est triangulaire inférieure et ${}^t\!L$ triangulaire supérieure. Ainsi, ${}^t\!UL$ est triangulaire inférieure et $U\,{}^t\!L$ est triangulaire supérieure et on a bien $B = L'U'$ avec $L' = {}^t\!UL$ et $U' = U\,{}^t\!L$.

Exercice 3 : Décomposition LU

1) Réaliser la décomposition LU de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

2) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ avec $b = {}^t(0, 2, -1, 5)$.

3) Sans calculer A^2, résoudre le système linéaire $A^2x = b$.

1) Vérifions tout d'abord que, $\forall k = 1, \ldots, 4$, $\det \Delta_k \neq 0$:

$$\det \Delta_1 = -1 \neq 0 \ ;$$

$$\det \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \ ;$$

$$\begin{aligned} \det \Delta_3 &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(-11) - 1 - 3 \times 4 = -2 \neq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \Delta_4 = \det A &= -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & 8 & 13 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & -1 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 13 \end{vmatrix} \\ &= -[-5 \times 13 + 8 - 3 \times (2 \times 13 + 1) + 8 \times (2 \times 8 + 5)] \\ &\quad - [-5 \times 13 + 8 - 3 \times (-2 \times 13 + 3) + 8 \times (-2 \times 8 + 3 \times 5)] \\ &\quad -3\,[2 \times 13 + 1 - (-2 \times 13 + 3) + 8 \times (-2 - 3 \times 2)] \\ &= -(-57 - 81 + 168) - (-57 + 69 - 8) - 3(27 + 23 - 64) \\ &= -30 - 4 + 3 \times 14 = 8 \neq 0. \end{aligned}$$

Maintenant, obtenons la décomposition LU par la méthode du pivot de Gauss :

→ Étape 1 :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$E_1 A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

→ Étape 2 :

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Étape 3 :

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{U = E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{L = L_1L_2L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$.

2) Résolvons successivement les systèmes $L\tilde{x} = b$ et $Ux = \tilde{x}$:

$\rightarrow$ Système $L\tilde{x} = b$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} \tilde{x}_1 & & & & = 0 \\ -\tilde{x}_1 & +\tilde{x}_2 & & & = 2 \\ 2\tilde{x}_1 & & +\tilde{x}_3 & & = -1 \\ -3\tilde{x}_1 & +2\tilde{x}_2 & -\tilde{x}_3 & +\tilde{x}_4 & = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{x}_1 = 0 \\ \tilde{x}_2 = 2 + \tilde{x}_1 = 2 \\ \tilde{x}_3 = -1 - 2\tilde{x}_1 = -1 \\ \tilde{x}_4 = 5 + 3\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = 5 - 4 - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$\rightarrow$ Système $Ux = \tilde{x}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} -x_1 & +x_2 & -3x_3 & & = 0 \\ & 2x_2 & & +8x_4 & = 2 \\ & & x_3 & -x_4 & = -1 \\ & & & -4x_4 & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_3 = -1 + x_4 = -1 \\ x_2 = \frac{1}{2}(2 - 8x_4) = 1 \\ x_1 = x_2 - 3x_3 = 4 \end{array}\right.$$

3) $A^2x = b \Leftrightarrow A(Ax) = b \Leftrightarrow Ax = {}^t\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; résolvons ce système par la méthode utilisée à la question 2)

$\rightarrow$ Système $L\tilde{x} = {}^t\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} \tilde{x}_1 & & & & = 4 \\ -\tilde{x}_1 & +\tilde{x}_2 & & & = 1 \\ 2\tilde{x}_1 & & +\tilde{x}_3 & & = -1 \\ -3\tilde{x}_1 & +2\tilde{x}_2 & -\tilde{x}_3 & +\tilde{x}_4 & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{x}_1 = 4 \\ \tilde{x}_2 = 1 + \tilde{x}_1 = 1 + 4 = 5 \\ \tilde{x}_3 = -1 - 2\tilde{x}_1 = -1 - 8 = -9 \\ \tilde{x}_4 = 3\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = 12 - 10 - 9 = -7 \end{array}\right.$$

$\rightarrow$ Système $Ux = \tilde{x}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} -x_1 & +x_2 & -3x_3 & & = 4 \\ & 2x_2 & & +8x_4 & = 5 \\ & & x_3 & -x_4 & = -9 \\ & & & -4x_4 & = -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_4 = \frac{7}{4} = 1,75 \\ x_3 = -9 + x_4 = -\frac{29}{4} = -7,25 \\ x_2 = \frac{1}{2}(5 - 8x_4) = -\frac{9}{2} = -4,5 \\ x_1 = 4 + x_2 - 3x_3 = \frac{53}{4} = 13,25 \end{array}\right.$$

Exercice 4 : Décomposition de Cholesky.

Donner la factorisation de Cholesky des matrices :

1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 25 \end{pmatrix}$

2) $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & 49 & -4 \\ -6 & 1 & -4 & 51 \end{pmatrix}$.

---

1) Posons $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$. $A = B\,{}^tB$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 25 \end{pmatrix}$$

ce qui donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
b_{1,1}^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad b_{1,1} = 1 \\
b_{1,1} \times b_{2,1} = -2 \quad &\Rightarrow \quad b_{2,1} = -2 \\
b_{1,1} \times b_{3,1} = 0 \quad &\Rightarrow \quad b_{3,1} = 0 \\
b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2 = 8 \quad &\Rightarrow \quad b_{2,2} = 2 \\
b_{2,1} \times b_{3,1} + b_{2,2} \times b_{3,2} = -6 \quad &\Rightarrow \quad b_{3,2} = \frac{-6 - (-2) \times 0}{2} = -3 \\
b_{3,1}^2 + b_{3,2}^2 + b_{3,3}^2 = 25 \quad &\Rightarrow \quad b_{3,3} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.}$

Posons

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0 & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & 0 \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} \end{pmatrix} \;;$$

ce qui donne les relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
b_{1,1}^2 = 4 \quad &\Rightarrow \quad b_{1,1} = 2 \\
b_{1,1} \times b_{2,1} = 0 \quad &\Rightarrow \quad b_{2,1} = 0 \\
b_{1,1} \times b_{3,1} = 12 \quad &\Rightarrow \quad b_{3,1} = \frac{12}{2} = 6 \\
b_{1,1} \times b_{4,1} = -6 \quad &\Rightarrow \quad b_{4,1} = \frac{-6}{2} = -3 \\
\\
b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad b_{2,2} = 1 \\
b_{2,1} \times b_{3,1} + b_{2,2} \times b_{3,2} = 2 \quad &\Rightarrow \quad b_{3,2} = \frac{2-0}{1} = 2 \\
b_{2,1} \times b_{4,1} + b_{2,2} \times b_{4,2} = 1 \quad &\Rightarrow \quad b_{4,2} = \frac{1-0}{1} = 1 \\
\\
b_{3,1}^2 + b_{3,2}^2 + b_{3,3}^2 = 49 \quad &\Rightarrow \quad b_{3,3} = \sqrt{49-36-4} = \sqrt{9} = 3 \\
b_{3,1}b_{4,1} + b_{3,2}b_{4,2} + b_{3,3}b_{4,3} = -4 \quad &\Rightarrow \quad b_{4,3} = \frac{-4-6\times(-3)-2\times 1}{3} = \frac{12}{3} = 4 \\
\\
b_{4,1}^2 + b_{4,2}^2 + b_{4,3}^2 + b_{4,4}^2 = 51 \quad &\Rightarrow \quad b_{4,4} = \sqrt{51-9-1-16} = \sqrt{25} = 5
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\boxed{B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.}$

Exercice 5 : Décompositon QR

Chercher la décomposition QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -46/5 & -43/5 \\ 2 & 8 & 23 \\ -2 & -28/5 & 26/5 \end{pmatrix}$$

En déduire la solution du système $Ax = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\rightarrow$ 1$^{\text{ère}}$ étape : Posons $a_1 = {}^t(1,2,-2)$. Alors,

- $\| a_1 \|_2 = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$ et $e^{i\alpha_1} = 11$;
- $v_1 = {}^t(-2,2,-2)$;
- $H_1 = \mathbb{I}_3 - 2\dfrac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}(-1,1,-1)}{(-1,1,-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$

- $H_1 A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -36/5 & 27/5 \\ 0 & 48/5 & 114/5 \end{pmatrix}$.

$\longrightarrow$ 2$^{\text{ème}}$ étape : Posons $a_2 = {}^t(-36/5, 48/5)$. Alors,

$\| a_2 \|_2 = \frac{1}{5}\sqrt{1296 + 2304} = \frac{\sqrt{3600}}{5} = \frac{60}{5} = 12$ et $e^{i\alpha_2} = -1$;

$v_2 = {}^t(24/5, 48/5)$;

$\tilde{H}_2 = I_2 - 2\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}(1,2)}{(1,2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$ et $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$;

$\boxed{H_2 H_1 A = R = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}}$;

et $\boxed{Q = (H_2 H_1)^{-1} = H_1^{-1} H_2^{-1} = H_1 H_2 = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 14 & -2 \\ 10 & -5 & -10 \\ -10 & 2 & -11 \end{pmatrix}}$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad & \Leftrightarrow \quad QRx = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad Rx = {}^tQ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{car } Q \text{ est unitaire} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{llll} 3x_1 & +6x_2 & +9x_3 & = \frac{1}{15}(5 + 10 - 10) \\ & -12x_2 & -15x_3 & = \frac{1}{15}(14 - 5 + 2) \\ & & -18x_3 & = \frac{1}{15}(-2 - 10 - 11) \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 = -\frac{1}{15 \times 18}(-23) = \frac{23}{270} \\ x_2 = -\frac{1}{12}\left(\frac{11}{15} + \frac{23}{18}\right) = -\frac{181}{1080} \\ x_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{181}{180} - \frac{23}{30}\right) = \frac{103}{540} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

La solution du système $Ax = {}^t(1,1,1)$ est $\boxed{x = {}^t\left(\frac{103}{540}, \frac{181}{1080}, \frac{23}{270}\right)}$.

Exercice 6 : Calcul de déterminant et décomposition LU

1) Expliquer comment on peut calculer le déterminant d'une matrice A d'ordre n à partir de sa factorisation LU.

2) Appliquer cette méthode à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1) $A = LU$ donc $\det A = \det L \times \det U$ avec $\det L = \prod_{i=1}^{n} \ell_{ii} = 1$ et $\det U = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$. Ainsi, $\boxed{\det A = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}}$.

2) Le calcul direct donne $\det A = 30$.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = U.$$

On a alors $\det A = \det U = 2 \times 3 \times 5 = 30$.

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, w_3(x)\, \underline{w_2(x)\,(x-1)(x+1)}\, dx = 0$$

$$\forall\, p \in \mathbb{R}_2(\mathbb{R}).$$

Notons $G(x) = w_2(x)\,(x-1)(x+1)$. paire

Posons. $w_3(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

$$= \underbrace{(x^3 + cx)}_{\text{impaire}} + \underbrace{(bx^2 + d)}_{\text{paire}}.$$

et $p(x) = Ax^2 + Bx + C$. En particulier

$$= \underbrace{(Ax^2 + C)}_{\text{paire}} + \underbrace{Bx}_{\text{impaire}}.$$

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, w_3(x)\, G(x)\, dx = 0.$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[(Ax^2 + C) + Bx\right]\left[(x^3 + cx) + (bx^2 + d)\right] G(x)\, dx = 0.$$

$$= \int_{-1}^{1} (Ax^2 + C)(bx^2 + d)\, G(x)\, dx$$

$$+ \int_{-1}^{1} Bx\,(x^3 + cx)\, G(x)\, dx = 0$$

$$A \int_{-1}^{1} x^2 (bx^2 + d)\, G(x)\, dx + C \int_{-1}^{1} (bx^2 + d)\, G(x)\, dx$$

$$+ B \int_{-1}^{1} (x^4 + c x^2)\, G(x)\, dx = 0.$$

On déduit le c exactement

$$\begin{cases} b \int_{-1}^{1} x^4 G \, dx + d \int_{-1}^{1} x^2 G \, dx = 0 \\ b \int_{-1}^{1} x^2 \, dx + d \int_{-1}^{1} 1 \, dx = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\left(\int_{-1}^{1} x^2 G \, dx\right)^2 - \left(\int_{-1}^{1} x^4 G\right) \cdot \left(\int_{-1}^{1} G\right) \neq 0}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & l_4 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & l_5 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$b_1 = y_1$$
$$l_2 y_1 + y_2 = b_2$$
$$l_3 y_2 + y_3 = b_3$$
$$\vdots$$
$$l_n y_{n-1} + y_n = b_n$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & 0 & 0 & & \\ 0 & u_2 & c_2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & u_3 & c_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & & u_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$LU = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & & & & \\ l_2 u_1 & l_2 c_1 + u_2 & c_2 & & 0 & \\ 0 & l_3 u_2 & l_3 c_2 + u_3 & c_3 & & \\ & & l_4 u_3 & l_4 c_3 + u_4 & c_4 & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & l_{n-1} u_{n-2} & l_{n-1} c_{n-2} + u_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & l_n u_{n-1} & l_n c_{n-1} + u_n \end{pmatrix}$$

P

$l =$

Par identification

$$\begin{cases} a_1 = u_1 \\ d_i = l_i u_{i-1} \quad \forall \text{ avec } i = \{2 \ldots n\} \\ a_i = l_i c_{i-1} + u_i \quad \text{avec } i = \{2 \ldots n\}. \end{cases}$$

$$a_1 = u_1$$

$$l_i = \frac{d_i}{u_{i-1}}$$

$$u_i = a_i - l_i c_{i-1}$$

$$=$$

$$\begin{cases} b_1 = y_1 \\ y_i = b_i - \underbrace{l_i y_{i-1}}_{} \quad i = 2 \ldots n \end{cases}$$

multiplication $(n-1)$
soustraction $(n-1)$

$$u_1 x_1 + c_1 x_2 = y_1$$
$$u_2 x_2 + c_2 x_3 = y_2$$
$$\vdots$$
$$u_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = y_{n-1}$$

$$\cancel{u_n u_n = x_n}$$

$$u_n x_n = y_n$$

$$\cancel{u_i x_{i-1} + c_{i-1} x_i}$$

$$y_{i-1}$$

$$x_1 = \frac{(y_1 - c_1 x_2)}{u_1}$$

$$x_2 = \frac{(y_2 - c_2 x_3)}{u_2}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - c_{n-1} x_n}{u_{n-1}}$$

$$x_n = \frac{y_n}{u_n}$$

$$x_n = \frac{y_n}{u_n}$$

$$x_{j-1} = \frac{y_{j-1} + c_{j-1} x_j}{u_{j-1}} \quad j \in \{(n-1) \ldots 2\}$$

Ex 7 :

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$Ax = b$.

(1) A symétrique définie (+).

LDL^T

D matrice diagonale

$\forall v \neq 0$
${}^t v M v > 0$
$Sp(A) \subset]0, +\infty[$

$A = B \cdot B^T$

* LU.

$\overline{Tu}$. $\overline{B B^T}$.

diagon.

(1)

A matrice symétrique définie (+)

Alors les valeurs propres sont strictement (+) par suite 0 n'est pas valeur propre.

$0 \notin \operatorname{Ker} A$ inversible.

$$\begin{cases} b_{11}^2 = 2 & \Rightarrow & b_{11} = \sqrt{2}. \\ b_{11}\, b_{21} = 1 & \Rightarrow & b_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \\ b_{11}\, b_{31} = 2 & \Rightarrow & b_{31} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$b_{21}^2 + b_{22}^2 = 3 \Rightarrow b_{22}^2 = \frac{3 - \frac{1}{2}}{\cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \cancel{6}\ \frac{5}{2}.$$

$$\boxed{b_{22} = \sqrt{\frac{5}{2}}.}$$

$$b_{21}\, b_{31} + b_{22}\, b_{32} = 1$$

$$b_{32} = \frac{1 - b_{21} b_{31}}{b_{22}} = \frac{1 - \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \cancel{\sqrt{2}}}{} = 0$$

$$-b_{31}^2 - b_{32}^2 + 3 = b_{33}^2$$

$$-2 - 3 \Rightarrow \boxed{b_{33} = 1.}$$

$$A = B\, B^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $b = (1 \quad 1 \quad 1)^T$

$$B . B^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$B^T x = y.$

$By = b.$

② $\varepsilon = 0$ $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad Ax = b.$$

~~A défine~~

A n'est pas défine ⊕ $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

ce qui donne

premier pivot nul.

Gauss avec échange

soit factorisation LU.

$\varepsilon = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon = 2 > \frac{11}{8} = 1{,}375$

donc A défine ⊕.

$A = B\,B^T$.

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

matrice Triang. inf.

matrice Triang. Super.

$$= \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{11}b_{21} & b_{11}b_{31} \\ b_{21}b_{11} & b_{21}^2 + b_{22}^2 & b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} \\ b_{31}b_{11} & b_{31}b_{21} + b_{32}b_{22} & b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A symétrique $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$.

définie (+).

$Sp(A) \subset]0, +\infty[$.

$\forall v \in \mathbb{R}^3,\ v \neq 0 \quad v^T A v > 0$.

Critère de Sylvester :

Une matrice A symétrique d'ordre n est définie (+) ssi toutes les sous matrices principales extraites de A ont un déterminant strictement (+).

$\varepsilon > 0 \qquad D = \varepsilon > 0$.

$$D_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\varepsilon - 1 > 0$$

$\varepsilon > \frac{1}{3}$ ok.

$$D_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon - 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$= (\varepsilon - 2)\, 8 + (-1) \cdot [1 - 5]$.

$= 8(\varepsilon - 2) + 4 = 8\varepsilon - 12 > 0$

$\varepsilon > \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

$8\varepsilon - 1 + 2(-5) = 8\varepsilon - 11 > 0$

$\varepsilon > \frac{11}{8}$

Ex5:

A une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante c-à-d.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i \in \{1 \dots n\}.$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} \boxed{5} & 3 & 1 \\ 2 & \boxed{7} & 3 \\ 0 & 1 & \boxed{8} \end{pmatrix}$

But: Montrons A inversible et A admet sa factorisation LU.

① Une matrice strictement dominante est inversible.

On Raisonne par l'absurde:

On suppose que A est une matrice strict. domi non inversible: ~~$Ker(A) = \{0\}$~~ $Ker(A) \neq \{0\}$

~~$A = \{ x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } Ax = 0 \}$~~

$\exists\, x \overset{\neq 0}{\in} \mathbb{R}^n$ tq $Ax = 0$.

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = 0 \;;\qquad \forall i \in \{1, \dots n\}$$

$(4, 6)\,($

$(4, 4)\; (4_j, 1) = (4_i, 1)$

$(x_1, x_2, \dots x_n) \neq 0$

Comme x vecteur non nul donc

$\exists\, p_0 \in \{1, \dots n\}$ tq $x_{p_0} \neq 0$

et $\|x\|_\infty = |x_{p_0}| \neq 0$

On prend ~~Ai~~ $\sum_{\substack{j=1 \\ \cancel{j\neq i}}}^{n} a_{ij}\, x_j = 0 \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$

Prenons $i = k_0$ (en particulier)

donc $\sum_{\substack{j=1 \\ \cancel{j\neq k_0}}}^{n} a_{k_0 j}\, x_j = 0$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k_0}}^{n} a_{k_0 j}\, x_j + a_{k_0 k_0}\, x_{k_0} = 0.$$

donc $\left| - a_{k_0 k_0}\, x_{k_0} \right| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k_0}}^{n} a_{k_0 j}\, x_j \right|$

$$|a_{k_0 k_0}|\, |x_{k_0}| \cancel{\leq} = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k_0}}^{n} a_{k_0 j}\, x_j \right|$$

$$\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k_0}}^{n} |a_{k_0 j}|\, |x_j|$$

$$|a_{k_0 k_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k_0}}^{n} |a_{k_0 j}| \frac{|x_j|}{|x_{k_0}|}$$

Car $\forall\, 1 \leq j \leq n \quad |x_j| \leq |x_{k_0}|$

$\frac{|x_j|}{|x_{k_0}|} \leq 1$

$$|a_{k_0 k_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k_0}}^{n} |a_{k_0 j}| \quad \forall\, 1 \leq k_0 \leq n$$

absurde car A str. d. dom

$$|a_{k_0 k_0}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k_0}}^{n} |a_{k_0 j}|$$

② A matrice d'ordre(n).
Montrons que A adopt la factorisation LU ssi A^T adopt la factorisation LU.

matrice Triang inf diag 1

matrice Triang sup

$A = LU \implies A^T = (LU)^T$
$= U^T L^T$
$= U^T \underbrace{D^{-1} \times D}_{id} \times L^T$

avec $D = \text{diag}(U) = \begin{pmatrix} u_{11} & & 0 \\ & u_{22} & \\ 0 & & \ddots & u_{nn} \end{pmatrix}$

Posons $\tilde{L} = U^T D^{-1}$
et $\tilde{U} = D \times L^T$

donc $A^T = \tilde{L} \tilde{U}$

montrons ~~matrice~~
$\tilde{L} = U^T D^{-1}$ $\qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_{11}} & & 0 \\ & \frac{1}{u_{22}} & \\ 0 & & \ddots & \frac{1}{u_{nn}} \end{pmatrix}$

matrice

$\tilde{L} = U^T D^{-1}$ matrice triang inf de diag 1.

$\tilde{U} = D \times L^T$ matrice triang sup diag u_{ii}

matrice Triang sup

[illegible]

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline \frac{v}{a} & I_{n-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} a & w^T \\ \hline 0 & I_{n-1} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline \frac{v}{a} & I_{n-1} \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c} a & w^T \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} a & w^T \\ \hline v & \frac{v}{a}w^T + B \end{array}\right).$$ par identification

$$A_1 = \frac{v}{a}w^T + B.$$

où alors $\boxed{B = A_1 - \frac{v}{a}w^T.}$

(4) B admet une factorisation donc nous pouvons écrire $B = L_B \cdot U_B$ avec L_B matrice inf diag (1).

U_B matrice sup.

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & L_B U_B \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & L_B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & U_B \end{array}\right). \quad (*)$$

On remplace $(*)$ dans A

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline \frac{v}{a} & I_{n-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & L_B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & U_B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} a & w^T \\ \hline 0 & I_{n-1} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline \frac{v}{a} & L_B \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} a & w^T \\ \hline 0 & U_B \end{array}\right)$$

= matrice triang inf de diag 1.   matrice triang sup.

par réc A admet une factorisation LU lorsque U admet admet une factori LU.

(5) A est une matrice diagonale strict dominante par colonne.

A^T est une matrice diagonale strict dominante par ligne

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall j \in \{1, \dots n\}.$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a & w^T \\ \hline v & A_1 \end{array}\right), \quad A^T = \left(\begin{array}{c|c} a & v^T \\ \hline w^T & A^T \end{array}\right)$$

1ère ligne

$$|a| > \sum_{i=1}^{n-1} v_i$$

$$|a| > \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq j}}^{n-1} + v_j \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n-1} v_i < |a| - v_j}$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n-1} |b_{ij}| \leq \sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n-1} |(A_1)_{ij}| - \frac{1}{a} |w_j| \sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n-1} |v_i|$$

On doit montrer : $\boxed{|b_{jj}| > \sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n-1} b_{ij}}$

Or

$$\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n-1} |b_{ij}| \leq \sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n-1} |(A_1)_{ij}| - \frac{|w_j|}{a} \sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n-1} |v_i|$$

$$\leq \sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n-1} |(A_1)_{ij}| - \frac{|w_j|}{a} (|a| - |v_j|)$$

$$\cancel{< \sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n-1} |(A_1) \quad (A_1)_{jj} - |w_j| - \frac{|w_j|}{|a|}}$$

$$< |(A_1)_{jj}| - |w_j| + \frac{|w_j|}{a} (|a| - |v_j|)$$

$$\leq \underbrace{|(A_1)_{jj}| \cancel{+} \frac{w_j v_j}{\boxed{a}}}_{b_{jj}} = b_{jj}$$

donc $\boxed{\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n-1} |b_{ij}| < b_{jj}}$

par suite B est une matrice à diagonale strictement dominante par colonne.

B est une matrice échelonnée par colonne.

$\overline{B^T}$ mq. A admet une factorisation LU.

$\overline{B^T}$ matrice échelonnée par ligne

Soit A d'ordre 2.

On suppose que à l'ordre $(n-1)$ ~~B admet~~ A admet

Soit $n \geq 2$.

~~On suppose A^T admet une~~

A^T Suppos. A^T (matrice sh. donn par hg d'ord $(n-1)$.) admet une Fad.

Montrons A^T (matrice str. donné par hge d'ordre n) admet une fad. LU.

$$A^T = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \left(\frac{v}{a}\right)^T \\ \hline 0^T & I_{n-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & B^T \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline w^T & I_n \end{array}\right).$$

matrice d'ordre n.

matrice sh. par dge d'ord. $(n-1)$.

admet admet LU.

d'après B^T admet LU

donc A^T admet une fad.

$\varepsilon = 0$ $\quad A x = b$.

$\varepsilon = 0 < \frac{11}{8}$ donc A n'est pas symétrique définie positive

A n'admet pas la factorisation de Cholesky.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On utilise la factorisation LU avec échange
~~càd~~ càd $PA = LU$.

$\boxed{\varepsilon = 2} > \frac{11}{8}$ définie positive

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

f. $A = B\,B^T$

B : matrice inf. à diag > 0

B^T : matrice sup. à diag > 0

Ex 7 : $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad Ax = b \quad b \in \mathbb{R}^n.$ $\varepsilon \in \mathbb{R}.$

$* \ |D_1| = |\varepsilon|$

$D_1 > 0 \iff \varepsilon > 0.$

$* \ D_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\varepsilon - 1$

$D_2 > 0 \iff 3\varepsilon - 1 > 0 \iff \boxed{\varepsilon > \frac{1}{3}}$

$* \ D_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ \\ L_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} \cancel{2-2} \\ \\ \\ \end{vmatrix}$

$C_1 \quad C_2 \quad C_3.$

$= \begin{vmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2-\varepsilon & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-\varepsilon)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= (2-\varepsilon)(1-6) + 3\varepsilon - 1.$

$= -5(2-\varepsilon) + 3\varepsilon - 1$

$= -10 + 5\varepsilon + 3\varepsilon - 1 = 8\varepsilon - 11.$

$D_3 > 0 \iff 8\varepsilon - 11 > 0.$

$\boxed{\varepsilon > \frac{11}{8}}$ 1,3.

c2 : A symétrique définie positive $\iff$

$\boxed{\varepsilon > \frac{11}{8}}$

$\left\{\varepsilon > \frac{11}{8}\right\} \cap \left\{\varepsilon > \frac{1}{3}\right\} \cap \left\{\varepsilon > 0\right\} = \left\{\varepsilon > \frac{11}{8}\right\}$

Posons $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$. $B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{11}b_{21} & b_{11}b_{31} \\ b_{21}b_{11} & b_{22}^2 + b_{21}^2 & b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} \\ b_{31}b_{11} & b_{31}b_{21} + b_{32}b_{22} & b_{33}^2 + b_{31}^2 + b_{32}^2 \end{pmatrix}$$

par identification

$b_{11} = \sqrt{2}$.

$b_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$b_{31} = \sqrt{2}$.

$b_{22}^2 = $ —

$\underline{b_{32}}$

$\underline{b_{33}}$

$A x = b \iff B \underbrace{B^T x}_{y} = b$.

Posons $y = B^T x$ donc

$B y = b$

$y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12}{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$

Ok

TD : Méthodes itératives.

Position de problème.

<u>Question ?</u> Déterminer x tq $Ax = b$. avec une méthode itérative.

$$Ax = b. \iff x = Bx + C.$$

avec $C = (I_n - B)A^{-1}b.$

Si on considère $\lim_{k \mapsto +\infty} x^{(k)} = x.$

algorithme d'itération

$$\begin{cases} x^{(0)} = \text{donnée.} \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + C \end{cases}$$

à la limite

$$x = Bx + C$$

matrice d'itération.

pour étudier la convergence de l'algorithme il suffit d'étudier la matrice d'itération par la méthode Gauss Seidel, soit par la méthode de Jacobi.

Thé :

Si ~~A une matrice triangulaire~~

* Si A une matrice stri domin al dominante par ligne donc Avec la méthode d'itération de Jacobi et la méthode Gauss Seidel converge

* Si $\rho(B) < 1$. alors la matrice B converge

rayon spectral : plus grande v.la. propre en valeur absolue.

* ~~Si une matrice~~

Ex4 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$-F$

$-E$

D

$$A = D - (E + F) \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons écrire

$$A = D - (E + F).$$

$$B_J = D^{-1}(E + F).$$

la matrice A est strictement dominante par ligne donc les méthodes de Gauss Seidel et de Jacobi ~~convergent~~. ~~CVG~~. sont convergentes

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$-F$, D, $-E$

$$A = D - (E+F)$$

$$B_J = D^{-1}(E+F)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{B_J} = \det(B_J - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\lambda \end{vmatrix}$$

la matrice A est strictement dominante par ligne donc les méthodes de Gauss Seidel et de Jacobi ~~convergent~~. ~~CVG~~. sont convergentes

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$-F$, D, E.

$A = D - (E + F)$.

$B_J = D^{-1}(E+F)$.

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{B_J} = \det(B_J - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\lambda \end{vmatrix}$$

Ex4 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$-F$

$-E$

D

$A = D - (E + F)$ avec $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons écrire

$$A = D - (E + F).$$

$$B_J = D^{-1}(E + F).$$

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)\left[\lambda^2 - \frac{1}{16}\right] - \frac{1}{4}\left[-\frac{\lambda}{4}\right].$$

$$= (-\lambda)\left[\lambda^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right].$$

$$= (-\lambda)\left[\lambda^2 - \frac{2}{16}\right]. =$$

$$\boxed{= (-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{1}{8}\right)} \quad \det(B_J).$$

~~Sp(B~~ $Sp(B_J) = \left\{ 0;\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{8}},\ -\frac{1}{\sqrt{8}} \right\}.$

$$\boxed{\rho(B_J) = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

~~ρ(~~

$$B_G = (D - E)^{-1}.\ F.$$

$$= \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \quad \text{Or } D - E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D-E \qquad \overbrace{}^{I_3}$$

$$\left.\begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\left(\quad \middle| \; \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \end{matrix}}_{(D-E)^{-1}} \right)$$

$$BG = (D-E)^{-1} \cdot F$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{64} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

4

Les valeurs propres

$$B_G = (D-E)^{-1} \cdot F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{64} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$P_{B_{GS}} = \det(B_{GS} - \lambda I_3)$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} - \lambda & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{64} & \frac{1}{16} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)\left[\left(\frac{1}{16} - \lambda\right)\left(\frac{1}{16} - \lambda\right) - \frac{1}{4} \times \frac{1}{64}\right].$$

$$= (-\lambda)\left[\left(\frac{1}{16} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{256}\right].$$

$$= (-\lambda)\left[\left(\frac{1}{16} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{1}{16}\right)^2\right].$$

$$= (-\lambda)\left[(-\lambda)\left(-\lambda + \frac{1}{8}\right).\right].$$

$$= \lambda^2\left(\lambda + \frac{1}{8}\right).$$

$Sp(B_{GS}) = \{0, \frac{1}{8}\}$. 5 $\rho(B_{GS}) = \frac{1}{8}$.

$\sqrt{8} < \frac{1}{8}$.

$\rho(B_J) = \frac{1}{\sqrt{8}}$ donc $\rho(B_{GS}) = (\rho(B_J))^2$.

$\rho(B_{GS}) = \frac{1}{8}$

$\frac{1}{\sqrt{8}} <$ $\frac{1}{8} < \frac{1}{\sqrt{8}} < 1$.

donc la méthode Gauss ~~seidel~~ ~~rapi~~ converge plus rapidement que celle de jacobi

O

Exercice 6 :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \cancel{\alpha} & 0 \\ \alpha & 2 & \cancel{\alpha} \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

Si $\alpha = 0$ $\quad A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 I_3$

définie positive

$Sp(I_3) = \{1\} \subset]0, +\infty[$

définie $\oplus$

Si $\alpha \neq 0$.

$$A_\alpha = \begin{vmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{vmatrix}$$

définie

- Soit tous les mineurs principaux sont > 0
- Soit $Sp(A_\alpha) \subset]0, +\infty[$.

~~det~~

$P_{A_\alpha} = \det(A_\alpha - \lambda I_3)$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & 2-\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Posons. $\quad \mu \in \mathbb{R}$.

$2 - \lambda = \alpha \mu$.

(1) $\quad$ dép... $\quad$ relation ... donc

$$P_{A_\alpha} = \begin{vmatrix} \alpha\mu & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha\mu & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha\mu \end{vmatrix}$$

$$= \alpha^3 \begin{vmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 1 & \mu & 1 \\ 0 & 1 & \mu \end{vmatrix}$$

$$= \underset{\neq 0}{\alpha^3} \left(\mu \begin{vmatrix} \mu & 1 \\ 1 & \mu \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \mu \end{vmatrix} \right)$$

$$= \alpha^3 \left(\mu(\mu^2 - 1) - \mu \right)$$

$$= \alpha^3 (\mu^3 - \mu - \mu) = \alpha^3 \mu (\mu^2 - 2).$$

Sp ~~$A_\alpha = \{ 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$~~

$\begin{cases} P_{A_\alpha}(\mu) = 0 \iff \mu \in \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}. \\ \text{avec } 2 - \lambda = \alpha\mu. \end{cases}$

Or $2 - \lambda = \alpha\mu \Rightarrow \lambda = \cancel{\alpha\mu}\ 2 - \alpha\mu.$

$Sp(A_\alpha) = \{ 2, \; 2 - \sqrt{2}\alpha, \; 2 + \sqrt{2}\alpha. \}.$

$\subset]0, +\infty[$

β.

$$2 \mp \sqrt{2}\,\alpha > 0$$

$$2 - \sqrt{2}\,\alpha > 0 \iff \alpha < \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$2 + \sqrt{2}\,\alpha > 0 \iff \alpha > -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

<u>CL</u>: A_α st déf $\oplus$ ssi $-\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$

$$^{*}C_\beta = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta \\ \beta & 1 & \beta \\ \beta & \beta & 1 \end{pmatrix}$$

si $\beta = 0$ $\quad C_0 = I_3$ déf $\oplus$

si $\beta \neq 0$ $\quad$ Posons. $\in \mathbb{R}$.

$$P_{C_\beta}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \beta & \beta \\ \beta & 1-\lambda & \beta \\ \beta & \beta & 1-\lambda \end{vmatrix} \qquad (1-\lambda) = a\beta$$

$$= \begin{vmatrix} a\beta & \beta & \beta \\ \beta & a\beta & \beta \\ \beta & \beta & a\beta \end{vmatrix} = \beta^3 \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= \beta^3 \begin{vmatrix} 1-a & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

(3)

$$= \beta^3 \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\beta^3 \left[a (a^2 - 1) - (a - 1) + (1 - a) \right].$$

$$\beta^3 \left[a (a - 1)(a + 1) - (a - 1) - (a - 1) \right].$$

$$\beta^3 (a - 1) \left[a(a + 1) - 2 \right].$$

$$\boxed{\beta^3 (a - 1) \left[a^2 + a - 2 \right].}$$

$$= \beta^3 (a - 1) \left[(a - 1) \cdot (a + 2) \right].$$

$$\begin{cases} P_{a\beta}(a) = 0 \iff a \in \{1, -2\}. \\ 1 - \lambda = a\beta \end{cases}$$

$\beta = \; 1 - a\beta = \lambda.$

$$S_{p_{a\beta}}(\lambda) = \{(1 - \beta) \; ; \; (1 + 2\beta)\}.$$

$S_{a\beta}(\lambda) \subset \left]0, +\infty\right[\iff$

$1 - \beta > 0 \iff \boxed{\beta < 1.}$

& $1 + 2\beta > 0 \implies \beta > -\frac{1}{2}.$

(a) $\boxed{-\frac{1}{2} < \beta < 1.}$

$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ matrice carrée d'ordre n.

à diagonale strictement dominante par ligne

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad 1 \leq i \leq n$$

A inversible : (~~Voir question~~ Voir correction

A strictement dom par ligne $\Rightarrow$ A inv.

(Voir correction Exercice 5, Question ①).

<u>Rq</u>

de la même manière on montre.

A strictement dominante par ~~ligne~~ colonne $\Rightarrow$

A inversible

(~~Voir correction Ex~~)

② $$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

$$q = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$$

$$\|B_J\|_\infty = q = 1 < 1. \qquad B_J = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}\right)$$

$$\|B_J\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{j \leq n} (B_J)_{ij} \right)$$

$= \max \quad = q < 1$, on déduit la

méthode de J.

$\|B_j$

$e^{k} = \left(e_j^{(k+1)} \ldots e_j^{(k)} \right)$

$\|A\|_p \geq \rho(A)$

$$\boxed{1 > r = \|B_j\| \geq \rho(B_j)}$$

donc pr toute la matrice

$\|$

méthode de Gauss Seidel

$$e_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} e_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} e_j^{(k)}$$

$$\|e^{(k+1)}\|_\infty \leq r \|e^{(k)}\|_\infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$e^k = x - x^k$$

$$\|e^{(k+1)}\|_\infty \leq r \|e^k\|_\infty$$

$$\|e^k\|_\infty \leq r \|e^{k-1}\|_\infty$$

e_i^1

$$\boxed{e^0 = x - x^0}$$

$$e^{(k)} \leq r^k \boxed{\|e^0\|_\infty}$$

$< r < 1$

$$\lim_{k \to \infty} \|e^{(k)}\|_\infty = 0.$$

pr tout k méthode Gauss Seidel conv

$$Ax = b.$$

$$(D - E)\, x^{(k+\frac{1}{2})} = F\, x^{(k)} + b.$$

$$x^{(k+1)} = w\, x^{(k+\frac{1}{2})} + (1-w)\, x^{(k)}$$

$$A = \begin{pmatrix} D & & -F \\ & \ddots & \\ -E & & D \end{pmatrix} \qquad Ax = b.$$

$$x^{(k+\frac{1}{2})} = (D-E)^{-1} F\, x^{(k)} + \cancel{b\,(D-E)}\ (D-E)^{-1} b$$

$$x^{(k+1)} = w\left[(D-E)^{-1} F\, x^{(k)} + (D-E)^{-1} b\right] + (1-w)\, x^{(k)}$$

$$= \left[w\,(D-E)^{-1} F + (1-w)\right] x^{(k)} + (D-E)^{-1}.\, b.\, w.$$

Posons $B_w = w\,(D-E)^{-1} F + (1-w)\, I_n$

$$\cancel{B}_w = w\,(D-E)^{-1}.\, b.\, w$$

Si $w = 1$

$$B_1 = (D-E)^{-1} F$$

$$C_1 = \boxed{(D-E)^{-1} b}.$$

méthode Gauss-Seidel

$B_w =$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$B_w = (1-w)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5^2

$= (1-w)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1-w & -\frac{w}{2} \\ 0 & 1-w \end{pmatrix}.$

$\rho(B_w) =$

~~det~~ $P_{B_w}(\lambda) = |(1-w-\lambda)^{\cancel{2}}|$

$= \lambda = |1-w|$

$\rho(B_w) = |1-w| < 1.$

$-1 < 1-w < 1$

$\boxed{\begin{matrix} -2 < -w < 0 \\ 0 < w < 2 \end{matrix}}$

$1-w$

Ex3 :

$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$; $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$ $\quad 1 \leq i \leq n$

A une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par ligne

D'après Qu Ex5 : TD (factorisation LU), la matrice A est inversible

Rq

De la même façon que que nous montrons A^t une matrice à diagonale strictement dominante par colonne est inversible.

(2) A une matrice strictement dominante par ligne donc les méthodes ~~de Jacobi~~ itératives de Jacobi et Gauss Seidel convergent. ?

* ~~Méthode de Jacobi~~

Méthode de Jacobi

A ~~strictement dominante par ligne.~~

Alors $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \quad 1 \leq i \leq n$

$$\Rightarrow \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1. \quad (1)$$

Posons $\quad q = \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum \left| \frac{a_{ij}}{a_{ij}} \right| \right)$

$$\boxed{q = \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right).}$$

Par définition ~~Pa mal~~ ~~Nouvo~~ nous avons.

$\cancel{(D-E)^{-1} X =}$

$$x^{(k+1)} = D^{-1} b - \underbrace{D^{-1}(A-D)}_{B_J} x^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \underbrace{\frac{1}{a_{ii}} \sum_{i\neq j} a_{ij}}_{(B_J)} x_j^{(k)}$$

~~$\|B_J$~~

~~D'après quest~~

$$\|B_J\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right) \quad \text{Voir Ex1. (b)}$$

$$= q < 1.$$

d'après Ex1, $\cancel{\|A\|_p}$ $\|B_J\|_p > \rho(B_J)$.

$p = 1, 2, \ldots \infty$.

On prend $\rho = +\infty$

$$\boxed{1 > 2 > \|B_J\|_\infty > \rho(B_J)}$$

$\rho(B_J) < 1$ donc la ma

CL/ A ne mance strict domin pa-

lige donc la méthode de Jacobi

converge.

- Méthode de Gauss Seidel

D'après le cours

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

$i = 1, \ldots n$).

On défini l'erreur $e_i^{(k+1)} = x_i^{(k+1)} - x_i$

la solution exacte de $Ax = b$.

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j = b_i$$

donc à l'itération $(k+1)$.

$$e_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum$$

$$\sum a_{ij} x$$

Par raisonnement récurrence sur l'indice $1 \leq i \leq n$

Pour $i = 1$

$$e_1^{(k+1)} = \cancel{- \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ij}} e_j^{(k+1)}} - \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} e_j^{(k)}$$

$$|e_1^{(k+1)}| = \left| \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} e_j^{(k)} \right|$$

$$\leq \sum_{j=2}^{n} \left|\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right| |e_j^{(k)}|$$

$$\leq \max_i \left(\sum_{j=2}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{11}}\right| \right)$$

$$\leq r \, \cancel{\|e_j} \, \|e^{(k)}\|_\infty.$$

la propriété est vraie pour $i = 1$.

* ~~à l'ordre~~ $n-1$.

On suppose $|e_i^{(k+1)}| \leq r \|e^{(k)}\|_\infty$.

$1 \leq i \leq n-1$

Montrons ~~à l'ordre n~~

$$|e_i^{(k+1)}| \leq r \| e^{(k)} \|_\infty$$

$1 \leq i \leq n$ (3)

$$\left|e_i^{(k+1)}\right| \leq \sum_{j=1}^{i-1} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \left|e_j^{(k+1)}\right| + \sum_{j=i+1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| e_j^{(k)}$$

$\leq$

$$\left|e_j^{(k+1)}\right| < 2\|e^{(k)}\|_\infty.$$

$j = 1 \ldots i-1$

$1 \leq i \leq n$

Gu Sylqos $\left|e_j^{(k+1)}\right| \leq 2\|e^{(k)}\|_\infty.$

$j = 1, \ldots, i-1$

Montrons $\left|e_i^{(k+1)}\right| \leq 2\|e^{(k)}\|_\infty$ $\forall i \in \{1, \ldots n\}$.

$\forall i \in \{1, \ldots n\}$

$<2.$

$$\left|e_i^{(k+1)}\right| \leq 2\|e^{(k)}\|_\infty \sum_{j=1}^{i-1} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| + \sum_{j=i+1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$$

$$\leq \|e^{(k)}\|_\infty \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ij}}\right| \right)$$

$$\leq \|e^{(k)}\|_\infty \max \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ij}}\right| \right)$$

d'ou $\left|e_i^{(k+1)}\right| \leq 2\|e^{(k)}\|_\infty$ (4)

$\forall i \in \{1, \ldots n\}$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j + a_{ii} x_i = b_i$$

$$x_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j - b_i}{a_{ii}}$$

$$e_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} e_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} e_j^{(k)} \qquad 1 \leq i \leq n$$

Pon Buti cát monhōrsi

$$\| e^{(k+1)} \|_\infty \leq 2 \| e^{(k)} \|_\infty \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$k \longrightarrow +\infty.$$

$$\|e^{(k+1)}\|_\infty \leq r \, \cancel{\|e^{(k)}\|_\infty}$$

$$\cancel{\|e^{(k)}\|_\infty} \leq r \, \cancel{\|e^{k-1}\|_\infty}$$

$$\vdots$$

$$\cancel{\|e^{(1)}\|_\infty} \leq r \, \|e^0\|_\infty$$

On fait le produit

$$\|e^{(k+1)}\|_\infty \leq r^{k} \|e^0\|_\infty$$

$$\lim_{k \to +\infty} r^{k} = 0$$

donc $\lim_{k \to +\infty} \|e^{(k)}\|_\infty$

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k+1)} \longrightarrow x.$$

Cverge de la Méthode Gauss Seidel

Jacobi

$$D\, x^{(k+1)} = b - (A - D)\, x^{k}$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1} b - \underbrace{D^{-1}(A-D)}_{B}\, x^{(k)}.$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{A_{ii}} - \sum_{i \neq j} \frac{1}{A_{ii}} A_{ij}\, x_j^{k}.$$

Gauss Seidel.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)} \right).$$

$i = 1, \ldots n.$

Toujours dans la même ~~histoire~~ question..

Résoudre $Ax=b$ avec une Méthode direct.

nous allons voir aujourd. la factorisation de cholesky

Théo

Soit A une matrice définie positive. A il ... symétrique

nous pouvons écrire A sous la forme suivante

$$A = B \cdot B^T$$

avec B matrice inf. avec une diag >0.

matrice sup. avec un diag

Définition

Une matrice définie ⊕

si $(Ax, x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$.

avec $(Ax, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Théo (critère de Sylvester),

Soit A une matrice d'ordre n.

Un la matrice A est définie ⊕.

Théo (critère de Sylvester).

Une matrice ~~A est définie~~

- Soit A une matrice d'ordre n.

A une matrice symétrique définie ⊕ ssi tous ses mineurs principaux sont strictement ⊕

càd $D_k > 0 \quad \forall\, k \in \{1, \dots, n\}$.

* ou. A une matrice sym définie ⊕ ssi

$$Sp(A) \subset \,]0, +\infty[$$

Spectre : ensemble des valeurs propres.

⑤ A une matrice strictement dominante par colonnes
alors il existe une matrice B strictement dominante par colonne

Autre
$\overline{A^t}$ une matrice strictement dominante par ligne
alors $\exists$ $\overline{B^t}$ une matrice strictement dominante par ~~colonne~~ ligne

Par récurrence, nous montrons $\overline{A^t}$ strictement dominante ligne $\Rightarrow$
admet ~~LU~~ A admet factorisation LU.

$\boxed{n = 2.}$

$$\overline{A^t} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\overline{A^t}$ strictement dominante par ligne

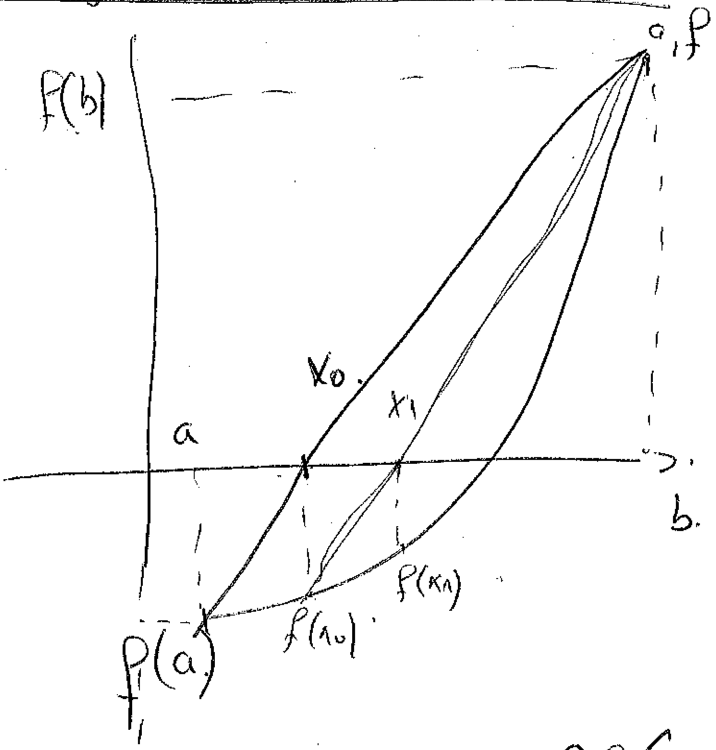
$|a_{11}| > |a_{12}| \Rightarrow a_{11} \neq 0$

~~$a_{22} > a_{21}$.~~ ~~$a_{22} \neq 0$.~~

$|\Delta_1| = a_{11} \neq 0$ donc $\overline{A^t}$ admet une factorisation LU

EX1 (vitesse de convergence de la méthode

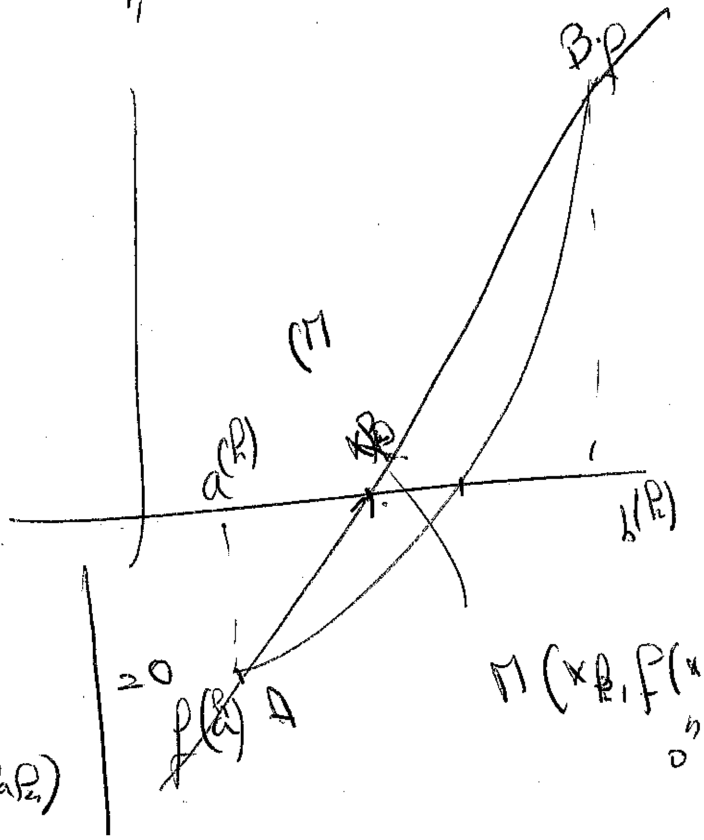
$$\begin{cases} a^0 = a \\ b^0 = b \end{cases}$$



à l'itération ℓ.

$x_\ell \in [a, b] \cap$ (la droite qui passe par les pts

(1)



$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc

$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$

$$\begin{vmatrix} x_\ell - a^{(k)} & b_\ell - a_\ell \\ f(x_\ell) - f(a_\ell) & f(b_\ell) - f(a_\ell) \end{vmatrix} = 0$$

$M(x_\ell, f(x_\ell))$ ($= 0$)

$$(x_\ell - a^{(k)})(f(b_\ell) - f(a_\ell)) - (b_\ell - a_\ell)(f(x_\ell) - f(a_\ell)) = 0$$

($f(x_\ell)$ = 0.)

$$\cancel{x_\ell = \frac{f(a_\ell)\,(b_\ell - a_\ell)}{(f(b_\ell) - f(a_\ell))} + a^{(k)}}$$

(1)

$$(x_k - a_k)\big(f(b_k) - f(a_k)\big) + f(a_k)\,(b_k - a_k) = 0$$

$$\cancel{f(a_k)}$$

$$x_k\big(f(b_k) - f(a_k)\big) = a_k\big(f(b_k) - f(a_k)\big) + f(a_k)(b_k - a_k)$$

$$\boxed{x_k = a_k + \frac{f(a_k)\,(b_k - a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}}$$

(2) <u>But</u> Etudier la vitesse de la convergence

$$\frac{|\xi - x^{(k)}|}{|\xi - x^{k-1}|} = ?$$

(a) On definit

$$\Phi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)(x-b)}(t-a)(t-b).$$

avec $p(x) = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{(b-a)}(x-a)$.

$a \qquad x \qquad b$

$\Phi(x) = \cancel{\Phi}$

$$\Phi(a) = f(a) - p(a) - \frac{f(a) - p(a)}{} \; 0 \times (b-b).$$

$$p(a) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} \cdot 0 = f(a).$$

$\boxed{\Phi(a) = 0}$

$$\Phi(b) = f(b) - p(b) - \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)(x-b)} \times 0 \cdot (b-a).$$

$$= f(b) - p(b) = 0 \qquad \text{avec } p(b) = 0$$

$$\Phi(x) = f(x) - p(x) - \frac{(f(x) - p(x))}{\cancel{(x-a)(x-b)}} \cancel{(x-a)} \cancel{(x-b)}$$

$$= 0.$$

Récap: $\Phi(a) = \Phi(x) = \Phi(b) = 0$
avec $x \in [a, b]$.

$\Phi(a) = \Phi(x) = 0.$

* Φ est dérivable sur $[a, x]$.
alors $\exists\, \alpha \in]a, x[$

$$\Phi'(\alpha) = \frac{\Phi(a) - \Phi(x)}{x - a} = 0.$$

* Φ est dérivable sur $[b, x]$.
alors $\exists\, \beta \in]b, x[$ tq

$$\Phi'(\beta) = \frac{\Phi(b) - \Phi(x)}{b - x} = 0 \quad (3)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\Phi'(\alpha) = \Phi'(\beta) = 0 \\ \Phi'' \text{ st dérivable sur } [\alpha, \beta] \subset [a, b] \\ \text{alors } \exists\ \theta \in]\alpha, \beta[\end{array}\right.$$

$$\text{tq } \boxed{\Phi''(\theta) = \frac{\Phi'(\beta) - \Phi'(\alpha)}{\beta - \alpha} = 0}$$

$t^2 - (a+b)t + ab$

Récap

G_2

$$\Phi''(t) = f''(t) - p''(t) - \left(\frac{f(x) - p(x)}{(x-a)(x-b)} \underbrace{(t-a)(t-b)}_{t^2} \right)''$$

$$\cancel{= f(t) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(b)}{(b-a)} (t-a) \right]} - \left(\frac{f(x) - p(x)}{(x-a)(x-b)} (t-a)(t-b) \right)$$

$p''(t) =$

$$\cancel{\Phi''(t) = f''(t) - p''(t)}$$

$$\cancel{\Phi''(t) = f''(t) - p''(t)}$$

$$\Phi''(t) = f''(t) - \underbrace{\cancel{p''(t)}}_{0} - \left(\frac{f(x) - p(x)}{(x-a)(x-b)} \times 2 \right)$$

$$= f''(t) - \frac{2 f(x)}{(x-a)(x-b)} + \frac{2 p(x)}{(x-a)(x-b)}$$

$$= f''(t) - \frac{2 f(x)}{(x-a)(x-b)} + \frac{2}{(x-a)(x-b)} \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)} (x-a) \right]$$

$$= f''(t) - \frac{2 f(x)}{(x-a)(x-b)} + \frac{2 f(a)}{(x-a)(x-b)} + \frac{2 (f(b) - f(a))}{(x-b)(b-a)} \quad (4)$$

$$t = \theta$$

$$\cancel{\Phi''(\theta) = f''(\theta) - 2}$$

$$\frac{(x-a)(x-b)}{2}\,\Phi''(t) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}\, f''(t) - f(x) + f(a) + \frac{\cancel{2}\,(f(b)-f(a))}{(b-a)}\,(x-a)$$

$$t = \theta$$

$$0 = \frac{(x-a)(x-b)}{2}\, f''(\theta) - f(x) + f(a) + \frac{\cancel{2}\,(f(b)-f(a))}{(b-a)}\,(x-a)$$

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{(f(b)-f(a))}{(b-a)}\,(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)(x-b)\, f''(\theta)}$$

(b) $\xi \in [a^{(P_2)}, b^{(P_2)}]$.

~~xe~~ $x = \xi \in [a^{P}, b^{P}] \subset [a, b]$.

$$P_2 f(\xi) = f(a_{P_2}) + \frac{f(b_{P_2}) - f(a_{P_1})}{(b_{P_2} - a_{P_2})}(\xi - a_{P_2}) + \frac{\xi}{2}$$
$$+ \frac{1}{2}(\xi - a_{P_2})(\xi - b_{P_2}) f''(\theta)$$

$$G_2\ f(a_{P_2}) + \frac{f(b_{P_2}) - f(a_{P})}{b_{P} - a_{P}}(x_{P_2} - a_{P}) = 0$$

$$= f(a_{P}) + \frac{f(b_{P}) - f(a_{P})}{(b_{P} - a_{P})}(\xi - x_{P_2} + x_{P} - a_{P_2})$$
$$+ \frac{1}{2}(\xi - a_{P})(\xi - b_{P}) f''(\theta)$$

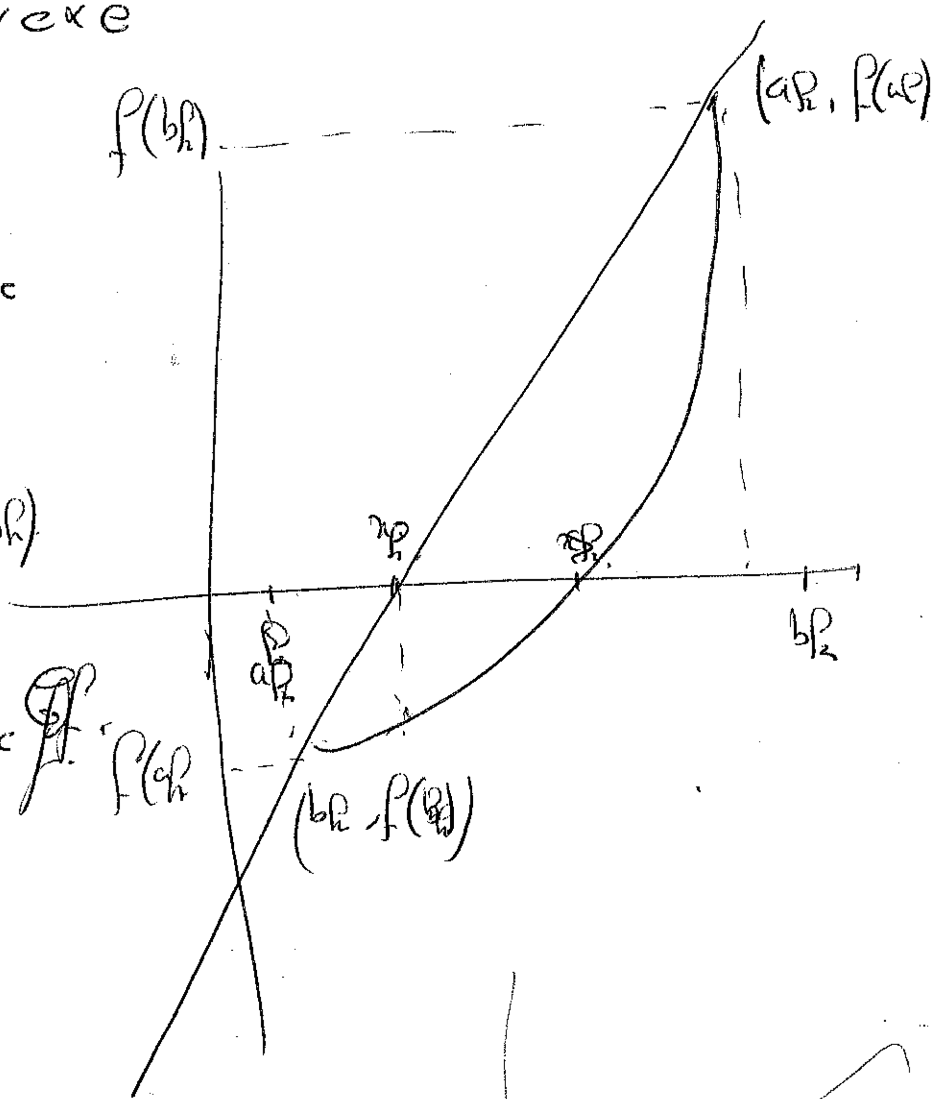
$$= \frac{f(b_{P}) - f(a_{P_2})}{(b_{P} - a_{P_2})}(\xi - x_{P_2}) + -\frac{1}{2}(\xi - a_{P})(\xi - b_{P}) f''(\theta) = 0$$

$f'(x) > 0$ croissante

$f''(x) > 0$ convexe

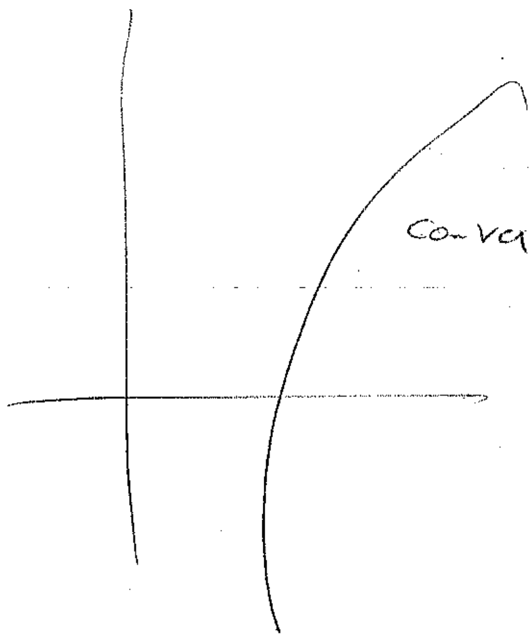
à l'itération k.

Graphiquement, la droite qui passe par les pts $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$ est ~~situ~~ située en dessous de la courbe f.



$f(a_k) \cdot f(x_k) > 0$

et $f(x_k) \cdot f(a_k) < 0$.



à l'itération $(k+1)$

$$\begin{cases} a^{(k+1)} = x_k. \\ b^{(k+1)} = b_k = b. \end{cases}$$

$$\zeta - x^{(k+1)} = -\frac{1}{2}\left(\zeta - a^{(k+1)}\right)\left(\zeta - b^{(k)}\right)\frac{f''\left(\theta^{(k+1)}\right)}{f'\left(\eta^{(k)}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\zeta - x^{(k)}\right)\left(\zeta - b^{(k)}\right)\frac{f''\left(\theta^{k+1}\right)}{f'\left(\eta^{k}\right)}$$

$$\left|\frac{\zeta - x^{(k+1)}}{\zeta - x^{(k)}}\right| = \left|-\frac{1}{2}\left(\zeta - b^{k}\right)\frac{f''\left(\theta^{k+1}\right)}{f'\left(\eta^{k}\right)}\right|$$

$$\lim_{k \to +\infty}\left|\frac{\zeta - x^{k+1}}{\zeta - x^{k}}\right| = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2}\underbrace{|\zeta - b|}_{\text{borne}}\underbrace{\left|\frac{f''(\theta_k)}{f'(\theta_k)}\right|}_{\text{borné}} = \text{cte}$$

La méthode

f 2 fois dérivable sur $[a,b]$

donc elle bornée

le dénominateur $\neq 0$ car

$f'(\theta_k) > 0$

Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2012-2013
Licence de Mathématiques - L3
C. Basdevant - F. Cuvelier

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique
du jeudi 10 janvier 2013

Durée : 3h
Seul document autorisé une feuille manuscrite recto de notes personnelles

Exercice I

1. Trouvez une formule d'intégration numérique sur le segment $[0,1]$ de la forme :

$$\int_0^1 f(t)dt \approx I(f) = \alpha f(0) + \beta f(1) + \gamma f'(0) + \delta f'(1)$$

qui soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à trois.

Corrigé : Ecrivons que la formule est exacte pour les monômes de degré 0 à 3 :

$$\begin{array}{ll} f(x) = 1 & 1 = \alpha + \beta \\ f(x) = x & \frac{1}{2} = \beta + \gamma + \delta \\ f(x) = x^2 & \frac{1}{3} = \beta + 2\delta \\ f(x) = x^3 & \frac{1}{4} = \beta + 3\delta \end{array}$$

ce qui donne $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{12}$, $\delta = -\frac{1}{12}$

2. Soit $P_f(x)$ le polynôme d'interpolation d'Hermite tel que $P_f(0) = f(0)$, $P_f(1) = f(1)$, $P_f'(0) = f'(0)$ et $P_f'(1) = f'(1)$. Démontrez que $I(f) = \int_0^1 P_f(x)dx$.

Corrigé : P_f est un polynôme de degré inférieur ou égal à trois, la formule est donc exacte pour P_f, comme f et P_f coïncident aux points de la formule, la propriété est vraie.

3. Démontrez la formule d'erreur pour $f \in C^4([0,1])$:

$$\forall x \in [0,1],\ \exists \zeta \in]0,1[\ f(x) - P_f(x) = \frac{1}{4!}x^2(x-1)^2 f^{(4)}(\zeta)$$

Corrigé : Pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$ posons

$$F(t) = f(t) - P_f(t) - \frac{f(x) - P_f(x)}{x^2(x-1)^2}t^2(t-1)^2$$

F a trois zéros distincts $(0, x, 1)$, par Rolle F' a deux zéros (distincts de $0, x, 1$), d'autre part, par les propriétés d'interpolation, F' s'annule en 0 et 1, donc a quatre zéros distincts. Par applications successives du théorème de Rolle, $F^{(4)}$ s'annule en au moins un point ζ, d'où le résultat.

4. En déduire une majoration de l'erreur $E(f) = |\int_0^1 f(t)dt - I(f)|$ pour $f \in C^4([0,1])$.

   Corrigé :

$$E(f) = |\int_0^1 (f(t) - P_f(t))dt| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| \int_0^1 \frac{1}{4!} t^2(t-1)^2 dt = \frac{1}{720} \sup_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)|$$

5. En déduire une formule d'intégration numérique sur le segment $[a, b]$ de la forme :

$$\int_a^b f(x)dx \approx M(f) = \lambda f(a) + \mu f(b) + \nu f'(a) + \xi f'(b)$$

   qui soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à trois.

   Corrigé : Posons $\phi(t) = f(a + t(b-a))$, alors $(b-a)\int_0^1 \phi(t)dt = \int_a^b f(x)dx$. La transformation affine conservant le degré des polynômes, la formule

$$M(f) = (b-a)I(\phi) = (b-a)\left[\alpha f(a) + \beta f(b) + \gamma(b-a)f'(a) + \delta(b-a)f'(b)\right]$$

   est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à trois. D'où

$$\lambda = \frac{b-a}{2},\ \mu = \frac{b-a}{2},\ \nu = \frac{(b-a)^2}{12},\ \xi = -\frac{(b-a)^2}{12}$$

6. Donnez une majoration de $|\int_a^b f(x)dx - M(f)|$ pour $f \in C^4([a,b])$.

   Corrigé :

$$|\int_a^b f(x)dx - M(f)| = (b-a)E(\phi) \leq \frac{(b-a)}{720} \sup_{x\in[0,1]} |\phi^{(4)}(x)| = \frac{(b-a)^5}{720} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

7. Soit $[A, B]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $x_i = A + ih$ pour $i = 0..N$ avec $h = \frac{B-A}{N}$. Soit $f \in C^4([A,B])$, on pose :

$$U(f) = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) + \frac{f(x_N)}{2}\right) + \frac{h^2}{12}\left(f'(x_0) - f'(x_N)\right)$$

   Montrez que

$$|\int_A^B f(x)dx - U(f)| \leq (B-A)\frac{h^4}{720} \sup_{x\in[A,B]} |f^{(4)}(x)|$$

Corrigé : La formule composée s'obtient en sommant les formules élémentaires sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$. L'erreur est majorée par la somme des erreurs sur chacun des intervalles élémentaires.

8. Comparez la formule d'intégration précédente et son erreur à la formule des trapèzes composée.

   Corrigé : La formule des trapèzes composée est :

$$\int_A^B f(x)dx = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) + \frac{f(x_N)}{2}\right) - (B-A)\frac{h^2}{12}f''(\xi)$$

   Le terme correctif avec la dérivée première fait donc gagner deux ordres sur l'erreur.

Exercice II

Soit $\varepsilon > 0$ et $A(\varepsilon)$ la matrice $n \times n$ définie par :

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 \\ \ldots\ldots & & & & & \\ \ldots\ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & & & & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou plus précisément : ($a_{i,i-1} = 1$, pour $i = 2, \ldots, n$), $a_{1,n} = \varepsilon$, et tous les autres éléments sont nuls.

1. Calculez les vapeurs propres de $A(0)$ et de $A(\varepsilon)$.

   Corrigé : La matrice $A(0)$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle, elle est nilpotente, toutes ses valeurs propres sont nulles.
   Calculons le polynôme caractéristique de $A(\varepsilon)$:

$$P_\varepsilon(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & \varepsilon \\ 1 & -\lambda & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 \\ \ldots\ldots & & & & & \\ \ldots\ldots & 0 & 1 & -\lambda & 0 \ \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & & & & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 & 1 \ \ -\lambda & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & 0 \ \ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

   En développant le déterminant suivant la première ligne on obtient :

$$P_\varepsilon(\lambda) = -\lambda M(\lambda) + (-1)^{n-1}\varepsilon N(\lambda)$$

avec $M(\lambda)$ le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure d'ordre $n-1$ dont les éléments diagonaux sont $-\lambda$ et donc $M(\lambda) = (-\lambda)^n$, et $N(\lambda)$ le déterminant de la matrice triangulaire supérieure d'ordre $n-1$ dont les éléments diagonaux sont 1, donc $N(\lambda) = 1$, d'où la formule :

$$P_\varepsilon(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - \varepsilon)$$

Les valeurs propres de la matrice $A(\varepsilon)$ sont donc les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de ε

2. Les matrices $A(0)$ et $A(\varepsilon)$ sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$?

   Corrigé : $A(0)$ étant nilpotente n'est pas diagonalisable. $A(\varepsilon)$ ayant toutes ses valeurs propres distinctes deux à deux, mais complexes, est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice III

Pour résoudre le système linéaire $Ax = b$, où A est une matrice carrée d'ordre n, on considère la méthode suivante, dite méthode de Richardson. Soit $r > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on définit la suite $x_k \in \mathbb{R}^n$ par la formule de récurrence :

$$x_{k+1} = x_k - r(Ax_k - b)$$

1. Montrez que cette méthode est du type $Mx_{k+1} = Nx_k + b$ avec $A = M - N$, précisez M et N. Puis donnez la matrice d'itération B de la méthode.

   Corrigé : On trouve $M = r^{-1}I$ et $N = r^{-1}I - A$ et $B = I - rA$.

2. Pour A une matrice symétrique définie positive

   (a) Donnez en la démontrant une condition nécessaire et suffisante sur r pour que la méthode converge.

   Corrigé : Pour que la méthode converge il faut et il suffit que le rayon spectral de B soit inférieur strictement à 1. Les valeurs propres de B se déduisant simplement de celles de A (qui sont réelles), cela s'écrit : $-1 < 1 - r\lambda < 1$ pour toute valeur propre λ de A. Ce qui donne, puisque les valeurs propres de A sont strictement positives, la condition $0 < r < \frac{2}{\lambda}$. La condition nécessaire et suffisante de convergence de la méthode est donc $r < \frac{2}{\rho(A)}$.

   (b) Montrez que la valeur optimale de r est $\frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$ où λ_1 et λ_n sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de A.

   Corrigé : La méthode est d'autant plus rapide que le rayon spectral de la matrice d'itération est petit. Or $\rho(B) = \max_i |1 - r\lambda_i|$ avec λ_i les valeurs propres de A que l'on suppose ici ordonnées de la plus petite à la plus grande (elles sont positives). Cette fonction de r s'écrit $f(r) = \max\{1 - r\lambda_1, r\lambda_n - 1\}$, son graphe est tracé sur la Figure 1 et son minimum est atteint à la valeur indiquée dans l'énoncé.

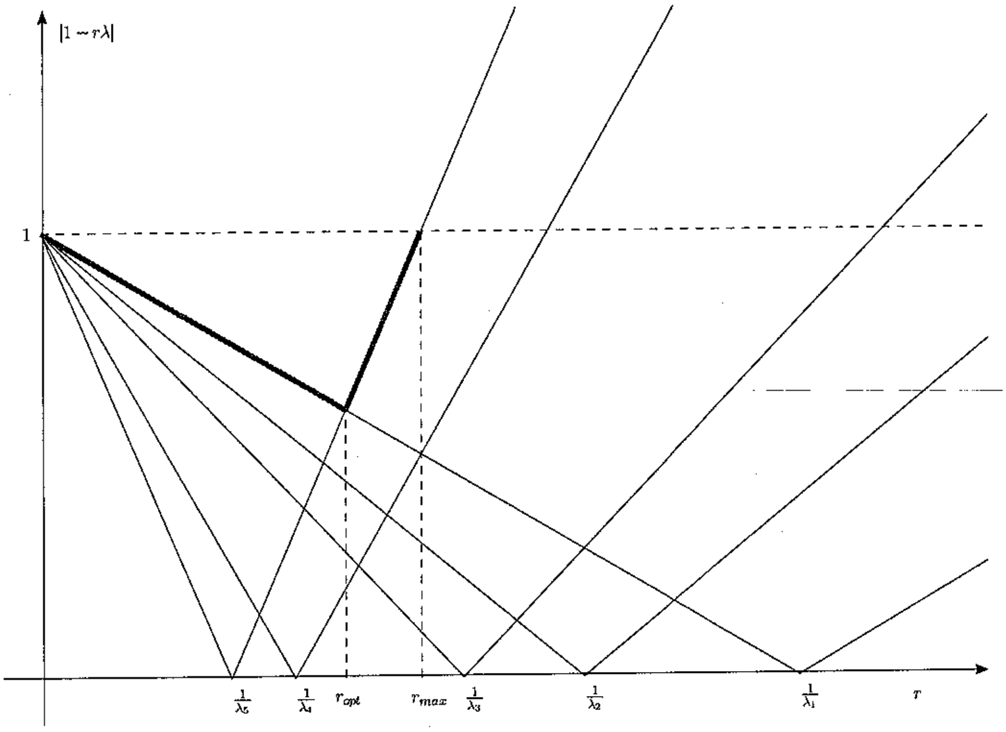


FIG. 1 – $\rho(B)$ en fonction de r

3. On suppose dans cette question que la matrice A est strictement diagonalement dominante avec des éléments diagonaux tous positifs. Montrez que si :

$$0 < r \leq \frac{1}{\max_i a_{i,i}}$$

la méthode de Richardson converge.
Indication : on pourra utiliser la norme $\|A\|_\infty = \max_i(\sum_j |a_{i,j}|)$.

Corrigé : Pour que la méthode soit convergente il suffit de vérifier que $\|B\|_\infty < 1$, soit :

$$|1 - r\, a_{i,i}| + r \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < 1, \quad \forall i$$

mais, compte tenu de la condition sur r on a $1 - r\, a_{i,i} \geq 0$, par ailleurs la stricte diagonale dominance entraîne $r \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < r a_{i,i}$, l'inégalité stricte est donc bien vérifiée pour tout i.

4. Comparez les résultats des questions 2 et 3 pour la matrice tridiagonale d'ordre n, d'éléments diagonaux $a_{i,i} = \alpha > 2$ et d'éléments extra-diagonaux $a_{i,i\pm1} = -1$, dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_k = \alpha - 2\cos(\frac{k\pi}{n+1}) \quad k = 1, \cdots, n$$

Corrigé : La matrice est symétrique, définie positive, en effet toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Ses plus petite et plus grande valeurs propres sont respectivement :

$$\lambda_1 = \alpha - 2\cos(\frac{\pi}{n+1}) \quad \text{et} \quad \lambda_n = \alpha + 2\cos(\frac{\pi}{n+1})$$

La question 2 nous dit que la méthode est convergente si et seulement si

$$r < \frac{2}{\alpha + 2\cos(\frac{\pi}{n+1})}$$

et que le paramètre optimal est $r = 1/\alpha$. La matrice est également strictement diagonalement dominante à diagonale positive, la question 3 nous dit que la méthode est convergente pour $r \leq 1/\alpha$, la valeur limite indiquée de r est en fait la valeur optimale.

La matrice d'itération de ces méthodes à la k-ième étape est

$$\mathrm{R}_{\alpha_k} = \mathrm{I} - \alpha_k \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A},$$

avec $\alpha_k = \alpha$ dans le cas stationnaire. Si P=I, on dit que la méthode est *non préconditionnée*. Les itérations de Jacobi et Gauss-Seidel peuvent être vues comme des méthodes de Richardson stationnaires avec $\alpha = 1$ et respectivement $\mathrm{P} = \mathrm{D}$ et $\mathrm{P} = \mathrm{D} - \mathrm{E}$.

On peut récrire (4.22) et (4.23) sous une forme mieux adaptée aux calculs : en posant $\mathbf{z}^{(k)} = \mathrm{P}^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$ (qu'on appelle *résidu préconditionné*), on obtient $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)}$ et $\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{b} - \mathrm{A}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k \mathrm{A}\mathbf{z}^{(k)}$.
En résumé, une méthode de Richardson instationnaire s'écrit, à l'étape $k+1$:

$$\begin{aligned}
&\text{résoudre le système linéaire}\, \mathrm{P}\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}\\
&\text{calculer le paramètre d'accélération}\, \alpha_k\\
&\text{mettre à jour la solution } \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)}\\
&\text{mettre à jour le résidu } \mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k \mathrm{A}\mathbf{z}^{(k)}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

4.3.1 Analyse de la convergence des méthodes de Richardson

Considérons tout d'abord les méthodes de Richardson stationnaires (*i.e.* pour lesquelles $\alpha_k = \alpha$ pour $k \geq 0$). On a le résultat de convergence suivant :

Théorème 4.8 *Pour toute matrice inversible* P, *la méthode de Richardson stationnaire* (4.22) *est convergente si et seulement si*

$$\frac{2\mathrm{Re}\lambda_i}{\alpha|\lambda_i|^2} > 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{4.25}$$

où les λ_i *sont les valeurs propres de* $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$.

Démonstration. Appliquons le Théorème 4.1 à la matrice d'itération $\mathrm{R}_\alpha = \mathrm{I} - \alpha\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$. La condition $|1 - \alpha\lambda_i| < 1$ pour $i = 1, \ldots, n$ entraîne l'inégalité

$$(1 - \alpha\mathrm{Re}\lambda_i)^2 + \alpha^2(\mathrm{Im}\lambda_i)^2 < 1\,,$$

d'où (4.25) découle immédiatement. $\diamond$

Remarquons que, si le signe des parties réelles des valeurs propres de $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$ n'est pas constant, la méthode stationnaire de Richardson *ne peut pas* converger.

Des résultats plus spécifiques peuvent être obtenus si des hypothèses convenables sont faites sur le spectre de $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$:

Théorème 4.9 *On suppose la matrice* P *inversible et les valeurs propres de* $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$ *strictement positives et telles que* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$. *Alors, la méthode de Richardson stationnaire* (4.22) *est convergente si et seulement si* $0 < \alpha < 2/\lambda_1$. *De plus,*

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}. \tag{4.26}$$

Le rayon spectral de la matrice d'itération R_α *est minimal si* $\alpha = \alpha_{opt}$, *avec*

$$\rho_{opt} = \min_{\alpha} [\rho(\mathrm{R}_\alpha)] = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}. \tag{4.27}$$

Démonstration. Les valeurs propres de R_α sont données par

$$\lambda_i(\mathrm{R}_\alpha) = 1 - \alpha\lambda_i,$$

la suite définie par (4.22) est donc convergente si et seulement si $|\lambda_i(\mathrm{R}_\alpha)| < 1$ pour $i = 1, \ldots, n$, c'est-à-dire si et seulement si $0 < \alpha < 2/\lambda_1$. Par conséquent (voir Figure 4.2), $\rho(\mathrm{R}_\alpha)$ est minimal quand $1 - \alpha\lambda_n = \alpha\lambda_1 - 1$, c'est-à-dire pour $\alpha = 2/(\lambda_1 + \lambda_n)$, ce qui donne la valeur de α_{opt}. Par substitution, on en déduit ρ_{opt}. ◇

Si $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$ est symétrique définie positive, on peut montrer que la convergence de la méthode de Richardson est monotone par rapport à $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\mathrm{A}$. Dans ce cas, on peut aussi relier ρ à $K_2(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A})$. On a en effet

$$\rho_{opt} = \frac{K_2(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}) - 1}{K_2(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}) + 1}, \quad \alpha_{opt} = \frac{2\|\mathrm{A}^{-1}\mathrm{P}\|_2}{K_2(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}) + 1}. \tag{4.28}$$

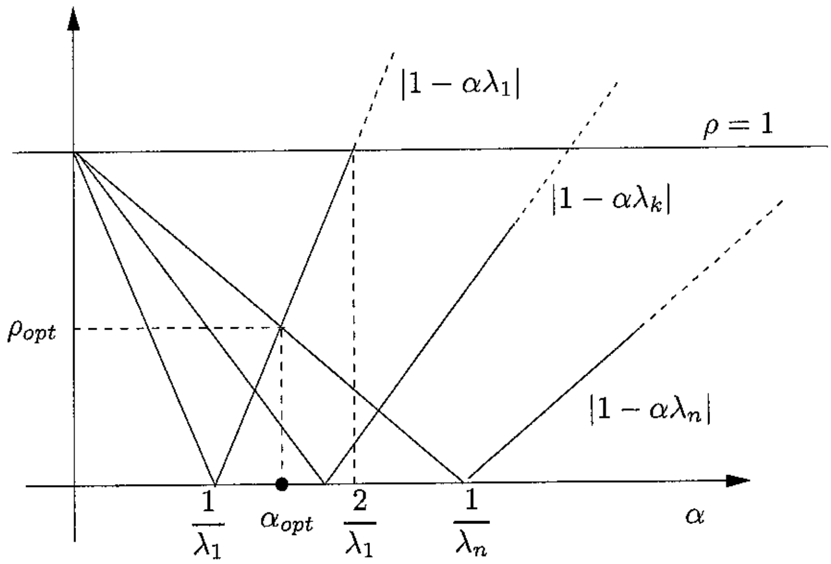


Fig. 4.2. Rayon spectral de R_α en fonction des valeurs propres de $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$

Le choix d'un bon préconditionneur est donc d'une importance capitale pour améliorer la convergence d'une méthode de Richardson. Mais il faut bien sûr faire ce choix en tâchant de conserver un coût de calcul aussi bas que possible. Nous décrirons à la Section 4.3.2 quelques préconditionneurs couramment utilisés dans la pratique.

Corollaire 4.1 *Si* A *est une matrice symétrique définie positive, de valeurs propres* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. *Alors, si* $0 < \alpha < 2/\lambda_1$, *la méthode de Richardson stationnaire non préconditionnée est convergente et*

$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\|_{\mathrm{A}} \leq \rho(\mathrm{R}_\alpha)\|\mathbf{e}^{(k)}\|_{\mathrm{A}}, \quad k \geq 0. \tag{4.29}$$

On a le même résultat pour la méthode de Richardson préconditionnée, à condition que les matrices P, A *et* $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$ *soient symétriques définies positives.*

Démonstration. La convergence est une conséquence du Théorème 4.8. On remarque de plus que

$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\|_{\mathrm{A}} = \|\mathrm{R}_\alpha\mathbf{e}^{(k)}\|_{\mathrm{A}} = \|\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{R}_\alpha\mathbf{e}^{(k)}\|_2 \leq \|\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{R}_\alpha\mathrm{A}^{-1/2}\|_2\|\mathrm{A}^{1/2}\mathbf{e}^{(k)}\|_2.$$

La matrice R_α est symétrique définie positive et semblable à $\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{R}_\alpha\mathrm{A}^{-1/2}$. Par conséquent

$$\|\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{R}_\alpha\mathrm{A}^{-1/2}\|_2 = \rho(\mathrm{R}_\alpha).$$

On en déduit (4.29) en notant que $\|\mathrm{A}^{1/2}\mathbf{e}^{(k)}\|_2 = \|\mathbf{e}^{(k)}\|_{\mathrm{A}}$. On peut faire une preuve analogue dans le cas préconditionné en remplaçant A par $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$. ◇

Notons enfin que l'inégalité (4.29) reste vraie même quand seules P et A sont symétriques définies positives (pour la preuve, voir p. ex. [QV94], Chapitre 2).

4.3.2 Matrices de préconditionnement

Toutes les méthodes de la section précédente peuvent être écrites sous la forme (4.2). On peut donc les voir comme des méthodes pour résoudre le système

$$(\mathrm{I} - \mathrm{B})\mathbf{x} = \mathbf{f} = \mathrm{P}^{-1}\mathbf{b}.$$

D'autre part, puisque $\mathrm{B}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{N}$, le système (3.2) peut s'écrire

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathrm{P}^{-1}\mathbf{b}. \tag{4.30}$$

Ce dernier système s'appelle *système préconditionné*, et P est la *matrice de préconditionnement* ou *préconditionneur à gauche.* On peut définir de même des préconditionneurs *à droite* et des préconditionneurs *centrés*, si le système (3.2) est transformé respectivement en

$$\mathrm{A}\mathrm{P}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{y} = \mathrm{P}\mathbf{x},$$

Le choix d'un bon préconditionneur est donc d'une importance capitale pour améliorer la convergence d'une méthode de Richardson. Mais il faut bien sûr faire ce choix en tâchant de conserver un coût de calcul aussi bas que possible. Nous décrirons à la Section 4.3.2 quelques préconditionneurs couramment utilisés dans la pratique.

Corollaire 4.1 *Si* A *est une matrice symétrique définie positive, de valeurs propres* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. *Alors, si* $0 < \alpha < 2/\lambda_1$, *la méthode de Richardson stationnaire non préconditionnée est convergente et*

$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\|_{\mathrm{A}} \leq \rho(\mathrm{R}_\alpha)\|\mathbf{e}^{(k)}\|_{\mathrm{A}}, \quad k \geq 0. \tag{4.29}$$

On a le même résultat pour la méthode de Richardson préconditionnée, à condition que les matrices P, A *et* $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$ *soient symétriques définies positives.*

Démonstration. La convergence est une conséquence du Théorème 4.8. On remarque de plus que

$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\|_{\mathrm{A}} = \|\mathrm{R}_\alpha \mathbf{e}^{(k)}\|_{\mathrm{A}} = \|\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{R}_\alpha \mathbf{e}^{(k)}\|_2 \leq \|\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{R}_\alpha \mathrm{A}^{-1/2}\|_2 \|\mathrm{A}^{1/2}\mathbf{e}^{(k)}\|_2.$$

La matrice R_α est symétrique définie positive et semblable à $\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{R}_\alpha\mathrm{A}^{-1/2}$. Par conséquent

$$\|\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{R}_\alpha\mathrm{A}^{-1/2}\|_2 = \rho(\mathrm{R}_\alpha).$$

On en déduit (4.29) en notant que $\|\mathrm{A}^{1/2}\mathbf{e}^{(k)}\|_2 = \|\mathbf{e}^{(k)}\|_{\mathrm{A}}$. On peut faire une preuve analogue dans le cas préconditionné en remplaçant A par $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$. ◇

Notons enfin que l'inégalité (4.29) reste vraie même quand seules P et A sont symétriques définies positives (pour la preuve, voir p. ex. [QV94], Chapitre 2).

4.3.2 Matrices de préconditionnement

Toutes les méthodes de la section précédente peuvent être écrites sous la forme (4.2). On peut donc les voir comme des méthodes pour résoudre le système

$$(\mathrm{I} - \mathrm{B})\mathbf{x} = \mathbf{f} = \mathrm{P}^{-1}\mathbf{b}.$$

D'autre part, puisque $\mathrm{B}{=}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{N}$, le système (3.2) peut s'écrire

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathrm{P}^{-1}\mathbf{b}. \tag{4.30}$$

Ce dernier système s'appelle *système préconditionné*, et P est la *matrice de préconditionnement* ou *préconditionneur à gauche*. On peut définir de même des préconditionneurs *à droite* et des préconditionneurs *centrés*, si le système (3.2) est transformé respectivement en

$$\mathrm{A}\mathrm{P}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{y} = \mathrm{P}\mathbf{x},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det D_1 = 2.$

$D_2 \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\det D_2 \neq 0$

$$L_1 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \boxed{0} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ \boxed{4} & -1 & 5 & 1 \\ \boxed{-2} & 2 & -2 & 3 \\ \boxed{0} & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

pivot de Gauss.

$$A^{(2)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ & 1 & -3 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L_1

$L_2 \leftarrow$

$\ell^{(2)}_{21} \leftarrow \dfrac{a^{(1)}_{21}}{a_{11}}$

$\ell^{(2)}_{31} = \dfrac{a^{(1)}_{31}}{a_{11}}$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\ell_{32} \leftarrow \dfrac{a^{(2)}_{32}}{a^{(2)}_{22}}$

$\ell_{34} \leftarrow \dfrac{a^{(2)}_{34}}{a^{(2)}_{22}}.$

$U \qquad\qquad L.$

$$\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$$

$$= \int_a^b (x-a)\left(x-b+\frac{-a+b}{2}\right)dx$$

$$= \int_a I_2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)\int_a^b (x-a)\,dx$$

$$= I_2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^b = I_2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)\frac{(b-a)^2}{2}$$

$$= I_2 - \frac{(b-a)^3}{2} = -\frac{(b-a)^3}{6} - \frac{(b-a)^3}{4}$$

$$= -\frac{2(b-a)^3 + 6(b-a)^3}{12} =$$

$$= I_2 + -\frac{(b-a)^3}{4} = -\frac{(b-a)^3}{6} - \frac{(b-a)^3}{4}$$

$$= \frac{-2(b-a)^3 - 3(b-a)^3}{12}.$$

$f(x) =$

Soit $p(t)$ une application telle que $p'(t) = F(t)$.

$$\int_{-t}^{t} F(u)\,du = \int_{-t}^{t} p'(u)\,du$$

$$= \left[p(u) \right]_{-t}^{t} = p(t) - p(-t)$$

$$\left(\int_{-t}^{t} F(u)\,du\right)' = \left[p(t) - p(-t)\right]'$$

$$= p'(t) - (-p'(-t))$$

$$= F(t) + F'(-t)$$

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{(b-a)^3}{6}$$

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx = \int_a^b \left((x-a) + \frac{a-b}{2}\right)(x-b)\,dx$$

$$= \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx + \left(\frac{a-b}{2}\right)\int_a^b (x-b)\,dx$$

$$= I_2 + \frac{a-b}{2}\left[\frac{(x-b)^2}{2}\right]_a^b$$

$$= I_2 + \cancel{\frac{a-b}{2}} - \frac{(a-b)^3}{4} = -\frac{(b-a)^3}{6} + \frac{(b-a)^3}{4}$$

$$= \frac{-2(b-a)^3 + 3(b-a)^3}{12} = \frac{(b-a)^3}{12}$$

$$\cancel{\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx - 12\int_a^b (x-a}$$

$(D-E)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{24}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 4\,L_1 \cdot \frac{1}{4} \quad \boxed{\frac{1}{8} < \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 4 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ & 4 & 0 \\ & & \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ +\frac{1}{4} & & \\ & & \end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 4 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{matrix}\right)$$

$$\frac{1}{8} \qquad 0 + \frac{1}{4}\frac{1}{16}$$

$$x^{(k+1)} = B x^{(k)} + c \quad k \geq 0$$

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

① Convergence par Gauss Seidel.

A à diagonale strictement dominante par ligne. (Théo du cours).

$$\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2, \qquad M = D, \quad N = E + F$$

$$B_J = D^{-1}(E+F).$$

avec D matrice diagonale dont les coeffici sont les coeffici diagonaux de A.

$$A = D - E - F$$

$$A = D - (E+F)$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D & -F \\ -E & \end{pmatrix}$$

$$-\lambda^3 + \lambda/8$$

$$-\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{8}\right)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\rho(B_J) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & \frac{1}{4} \\ 0 & 1/4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left|\lambda^2 - \frac{1}{16}\right| + \frac{\lambda}{4 \times 4}$$

$$= -\lambda^3 + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4 \times 4}$$

$$= -\lambda^3 + \frac{5\lambda}{16}$$

Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2012/2013

feuille de travaux dirigés

Méthodes de résolution d'équations non linéaires

Le symbole $\diamond$ indique un exercice optionnel et/ou difficile.

Exercice 1 (vitesse de convergence de la méthode de la fausse position). Soit $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a)f(b) < 0$. La méthode de la fausse position appliquée à la recherche d'un zéro de f est obtenue en remplaçant dans l'algorithme de la méthode de dichotomie le point milieu $x^{(k)} = \frac{1}{2}(a^{(k)} + b^{(k)})$ par l'abscisse du point d'intersection de la droite passant par les points $(a^{(k)}, f(a^{(k)}))$ et $(b^{(k)}, f(b^{(k)}))$ avec l'axe des abscisses.

1. Déterminer $x^{(k)}$ en fonction de $a^{(k)}$, $f(a^{(k)})$, $b^{(k)}$ et $f(b^{(k)})$.
2. Pour étudier la vitesse de convergence de cette méthode, on fait les hypothèses additionnelles que f est deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et que les dérivées f' et f'' ne s'annulent pas sur cet intervalle, de telle sorte que ξ soit une racine simple de $f(x) = 0$. Dans ces conditions, la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode converge vers ξ.

   a. Montrer qu'il existe $\theta \in [a, b]$ tel que

   $$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + \frac{1}{2}(x - a)(x - b)f''(\theta).$$

   Indication : on pourra poser, pour tout $x \in]a, b[$ fixé et tout $t \in [a, b]$,

   $$\phi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{(x - a)(x - b)}(t - a)(t - b), \text{ avec } p(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

   et utiliser le théorème de Rolle.

   b. En appliquant le résultat précédent au point ξ et à l'intervalle $[a^{(k)}, b^{(k)}]$, montrer qu'il existe $\theta^{(k)} \in [a^{(k)}, b^{(k)}]$ tel que

   $$\frac{f(b^{(k)}) - f(a^{(k)})}{b^{(k)} - a^{(k)}}(\xi - x^{(k)}) = -\frac{1}{2}(\xi - a^{(k)})(\xi - b^{(k)})f''(\theta^{(k)}).$$

   c. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\eta^{(k)} \in [a^{(k)}, b^{(k)}]$ tel que

   $$\xi - x^{(k)} = -\frac{1}{2}(\xi - a^{(k)})(\xi - b^{(k)})\frac{f''(\theta^{(k)})}{f'(\eta^{(k)})}.$$

   d. On suppose à présent que $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$, montrer que $b^{(k+1)} = b$ et $a^{(k+1)} = x^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Étudier alors le comportement de la suite $\left(\frac{|\xi - x^{(k+1)}|}{|\xi - x^{(k)}|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque k tend vers l'infini.

Exercice 2 (étude de convergence de la méthode de point fixe). Soit $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et g une application continue de $[a, b]$ dans lui-même.

1. Montrer que g possède au moins un point fixe ξ dans l'intervalle $[a, b]$.

2. On suppose à présent que la fonction g est continûment dérivable dans un voisinage $I = [\xi - h, \xi + h]$ de ξ et que, **uniquement dans cette question,** $|g'(\xi)| < 1$. On va montrer que la suite définie par
$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$
converge vers ξ dès que l'initialisation $x^{(0)}$ est suffisamment proche de ξ. On dit alors que ξ est un point fixe stable de g.
   a. Montrer qu'il existe $0 < \delta \leq h$ tel que
   $$|g'(x) - g'(\xi)| \leq \frac{1}{2}\left(1 - |g'(\xi)|\right), \ \forall x \in I_\delta = [\xi - \delta, \xi + \delta].$$
   b. En déduire qu'il existe une constante $0 < L < 1$ telle que $|g'(x)| \leq L$, $\forall x \in I_\delta$.
   c. En déduire que si $x^{(k)} \in I_\delta$, alors
   $$|x^{(k+1)} - \xi| \leq L\,|x^{(k)} - \xi|,$$
   et que, si $x^{(0)} \in I_\delta$, alors
   $$x^{(k)} \in I_\delta \text{ et } |x^{(k)} - \xi| \leq L^k\,|x^{(0)} - \xi|, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$
   d. En conclure que la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers ξ.
3. On suppose dans cette question que $|g'(\xi)| > 1$. En s'inspirant des étapes de la question précédente, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour k suffisamment grand, $x^{(k)}$ n'appartient pas à I_δ. En déduire que la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ne peut *a priori* converger vers ξ, quelle que soit l'initialisation $x^{(0)} \neq \xi$. On dit alors que ξ est un point fixe[1] instable de g.
4. **Application.** Étudier les méthodes de point fixe associées aux fonctions suivantes :
$$g_1(x) = \ln(1 + x) + 0{,}2,\ g_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 + c), \text{ avec } 0 \leq c < 1, \text{ et } g_3(x) = -\ln(x).$$

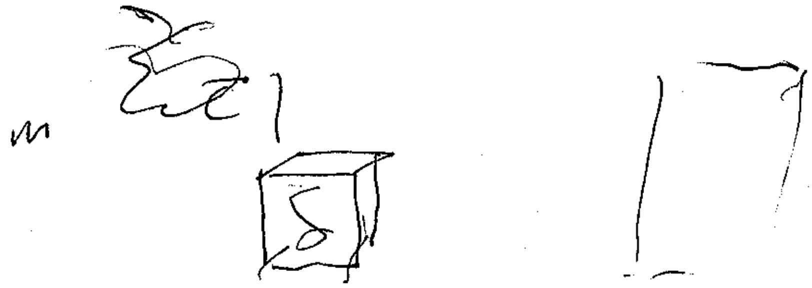
Exercice 3. On souhaite calculer le zéro de la fonction $f(x) = x^3 - 2$ par une méthode de point fixe utilisant la fonction
$$g(x) = \left(1 - \frac{\omega}{3}\right)x + (1 - \omega)\,x^3 + \frac{2\omega}{3\,x^2} + 2(\omega - 1),$$
ω étant un paramètre réel.

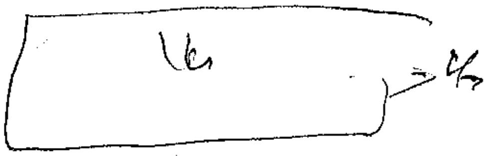
1. Pour quelles valeurs du paramètre ω le zéro de la fonction f est-il un point fixe de la méthode proposée ?
2. Pour quelles valeurs du paramètre ω la méthode proposée est-elle au moins d'ordre deux ?
3. Existe-t-il une valeur du paramètre ω telle que l'ordre de la méthode de point fixe est supérieur à deux ?

Exercice 4 (étude de convergence de la méthode de Newton–Raphson vers un zéro simple). Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et ξ un zéro simple de f, c'est-à-dire tel que $f(\xi) = 0$ et $f'(\xi) \neq 0$, contenu dans $[a, b]$.

On se propose de déterminer le zéro ξ par la méthode de Newton–Raphson, c'est-à-dire en tant que limite de la suite récurrente définie par
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = g(x^{(k)}),\ k \geq 0,$$
l'initialisation $x^{(0)}$ étant donnée. Le réel ξ étant aussi un point fixe de la fonction ϕ, on rappelle que l'ordre de convergence d'une méthode itérative de la forme $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ est égal à r, avec $r \geq 1$, s'il existe, pour k suffisamment grand, une constante $C > 0$ telle que
$$|x^{(k+1)} - \xi| \leq C|x^{(k)} - \xi|^r.$$

1. En effet, si $x^{(0)} = \xi$, alors la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est constante et vaut ξ.





g dérivable $[\min(x_k, \xi), \max(x_k, \xi)]$

$\exists\, \theta_k \in \,]\min(x_k, \xi), \max[$

$\exists\, \theta$

$$\left|\frac{g(\max(x_k, \xi)) - g(\min(x_k, \xi))}{\max(x_k, \xi) - \min(x_k, \xi)}\right| = |g'(\theta_k)|$$

$$|g(\max(x_k, \xi)) - g(\min(x_k, \xi))| = |g'(\theta_k)|\,|\max - \min|$$

$$|g(x_k) - g(\xi)| = |g'(\underline{\theta_k})|\,|x_k - \xi|$$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta + 1$

$\forall x \in]-\eta+\xi, \eta+\xi[$

On a $\left| \left| \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \right| - |g'(\xi)| \right|$

$< \varepsilon$

$h(x) \longrightarrow c$

$\boxed{\xi}$

$< \varepsilon$

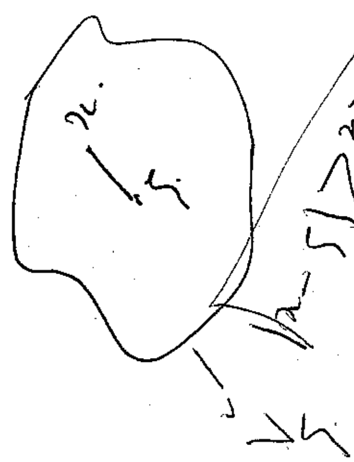
$\frac{|g(x) - g(\xi)|}{|x - \xi|} - |g'(\xi)| > -\varepsilon$

$\frac{|\;|}{|\;|} > -\varepsilon + |g'(\xi)|$

$\varepsilon = |g'(\xi)| - 1 > 0$

> 1

$\frac{|x^{(n+1)} - \xi|}{|x^{(n)} - \xi|} > 1$



$|g'(u_n)| < 1$

$|g'(u_n)| = \frac{1}{1+x}$

$\frac{1}{1+\alpha_1}$

$\alpha_1 \geq$

$\frac{1}{1+\alpha_2}$

$1 + \alpha_2 \geq 1$

< 1

$1 + \alpha_2 > 1$

$|x_n - \xi| > \eta > 0$

$$\|\nabla z\|_{L^2(\Omega_0)} \le C_1\sqrt{\varepsilon} + C_2\,\varepsilon^{3/2} \le C\varepsilon$$

2

$$\cancel{f(x) = \varepsilon}$$

$$\varepsilon^2 \quad \varepsilon^{3/2} \quad \varepsilon \quad \varepsilon^{1/4} \quad \sqrt{\varepsilon}$$

$$2\varepsilon\sqrt{ab} \le \varepsilon\left(\frac{a}{\sqrt{\varepsilon}} + b\sqrt{\varepsilon}\right)$$

$$f(x) = \frac{a}{x} + bx$$

$$C_1\varepsilon^2 + C_2\varepsilon \le C\varepsilon^{3/2}$$

$$\cancel{f'(x) = -\frac{a}{x^2} + b}$$

$$\min_x f(x) = 2\sqrt{ab}$$

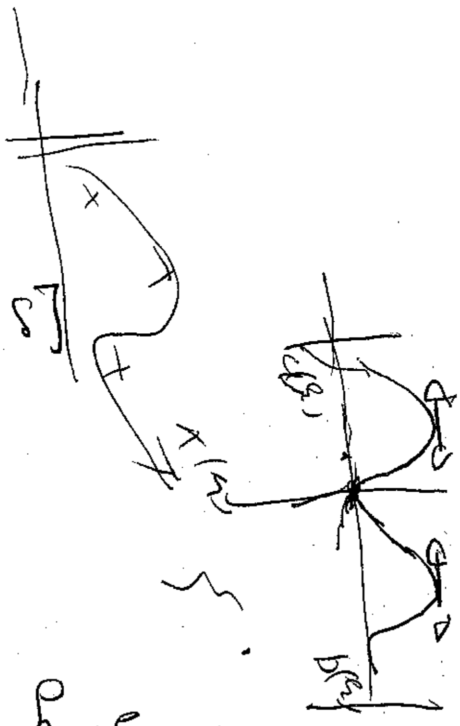
$$2\sqrt{C_1C_2}\,\varepsilon \le C_1\sqrt{\varepsilon} < C_1\sqrt{\varepsilon} + C_2\varepsilon^{3/2} < C\sqrt{\varepsilon}$$

$x \in [\xi - h, \xi + h]$.

Soit ~~$x \in]\xi - \delta, \xi + \delta$~~

$x \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$

$[\xi - h, \xi + h] \supset [\xi - \delta, \xi + \delta]$



$\cancel{\xi} - h \leq \cancel{\xi} - \delta \leq \cancel{\xi} + h$

$-h \leq \delta \leq h$

$\xi - h$ $\qquad \xi \qquad$ $h + \xi$

$\cancel{\xi} - \delta \leq \cancel{\xi} - h \leq \cancel{\xi} + \delta$

$-\delta \leq h \leq \delta$

$h \geq h_0$

$h_0 - \delta$

$|x^{(h-1)} - \xi| > |x^{(h)} - \xi| = <$

$]\cdot \xi [$

$> |x^{(h)} - \xi|$

$\delta = |x^{(h_0)} - \xi| > 0$

$h \geq h_0 + 1, \ |x^{(h+1)} - \xi| > \delta$

$\neg (\cdot)$

$$|x_{k+1} - \xi| \leq L\, |x_k - \xi|$$

$$g(x_k) - g(\xi) \leq L\, |x_k - \xi|$$

$$g'(\theta_k) < L \qquad \forall \theta_k \in \mathcal{S}$$

g fonction dérivable sur $[a, b]$

$$\exists\, c \in \left]a, b\right[\quad \text{tq}$$

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

$a = x_k$

$b = \xi$

$$[\min(x_k, \xi), \quad \max(x_k, \xi)]$$

$$|g(x_k) - g(\xi)|$$

ou

$$|g(\xi) - g(x_k)|$$

$$\left(1-\frac{w}{3}\right)\xi + \cancel{(1-w)}2 + \frac{w\xi}{3} - 2\cancel{(1-w)}$$

$$\left(1-\frac{w}{3}\right)\xi + \frac{w\xi}{3} = \xi .$$

$$\boxed{\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad \Phi(\xi) = \xi .}$$

$$x^{(k)} \longrightarrow \xi .$$

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{k}) .$$

$$x^{(k+1)} - \xi = \Phi(x^{k}) - \Phi(\xi)$$

$$\cancel{= \left(1-\frac{w}{3}\right)\left(x^{k}-\xi\right) + (1-w)\left(x^{k}-\xi\right)^3 + 2w}$$

$$\left(1-\frac{w}{3}\right)\left(x^{k}-\xi\right) + (1-w)\left[(x_k)^3-\xi^3\right] .$$

$$+ \frac{2w}{3}\left[\frac{1}{(x_k)^2} - \frac{1}{\xi^2}\right] .$$

$$= \left(x^{k}-\xi\right)\left[\left(1-\frac{w}{3}\right) + (1-w)\left[x_k^2 + x_k\xi + \xi^2\right] .\right.$$

$$+$$

La suite $x^{(k)}$ ~~converge~~ est convergente d'ordre p, avec une constante asymptotique

La constante asymptotique

à l'infini la suite se comporte asymptotiquement

zéro de f $\Leftrightarrow$ $\exists \xi$ tq $f(\xi) = 0$.

$\xi^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow \xi^2 = \frac{2}{\xi}$

$\frac{1}{\xi^2} = \frac{\xi}{2}$

$\xi \neq 0$

car $\cancel{f(0)}$

$\boxed{f(0) = -2 \neq 0}$

il faut que ξ

ξ pas un zéro de f

ξ un point $g(\xi) = \xi$.

$$\left(1 - \frac{w}{2}\right)\xi + (1-w)\xi^3 + \frac{2w}{3\xi^2} + 2(w-1) = \xi.$$

$$\left(1 - \frac{w}{2}\right)\xi + \cancel{(1-w)2} + \frac{2w}{3} \cdot \frac{\xi}{\cancel{2}} + \cancel{2(w-1)} = \xi.$$

$$\xi\left(1 - \frac{w}{2}\right)\xi + \frac{w\xi}{3} - \xi = 0$$

$$\xi - \frac{w}{2}$$

② g continuement dérivable dans $I = [\varsigma - h, \varsigma + h]$ (voisinage de ς)
$h > 0$

$\frac{\text{But}}{\text{Si}}$ $|g'(\varsigma)| < 1 \Rightarrow$

But: Montrons $\begin{cases} x^{(k+1)} = g(x^{k}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \varsigma \\ x^{(0)} \simeq \varsigma \text{ (Pe} \end{cases}$

g continue dérivable sur $\bar{I} = \bar{I}$:
donc $\forall \varepsilon > 0$, $\boxed{\exists \eta > 0}$ tq $|x - \varsigma| < \eta$
alors $|g'(x) - g'(\varsigma)| \leq \varepsilon$

* $|x - \varsigma| < \eta \iff \varsigma - \eta < x < \eta + \varsigma$
$x \in [\varsigma - \eta, \eta + \varsigma]$

~~Si on prend~~

* Si on pose $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - g'(\varsigma))$, il faut montrer $1 > \varepsilon > 0$

$-1 < g'(\varsigma) < 1$
$-1 < -g'(\varsigma) < 1$
$0 < (1 - g'(\varsigma))\frac{1}{2} < 1$

$\boxed{0 < \varepsilon < 1}$

* ~~$\delta < h$~~ $x \in [\varsigma - \eta, \eta + \delta] \subset \bar{I} =$
et ~~$x \in [\varsigma - h, \varsigma$~~ $\Rightarrow \delta < h$

g continue

$$g : [a,b] \longrightarrow [\min(g), \max(g)] \subset [a,b].$$

Rq

si la fonction est croissante $[\min g(g) = g(a)$

$\Phi(x) =$ Montrons g possède point fixe c'est

$$g(\xi) = \xi.$$

$g : [a,b] \longrightarrow [a,b].$

$g(a) \in [a,b].$

$a \leq g(a) \leq b.$

$a \leq g(b) \leq b.$

On pose : $\Phi(x) = g(x) - x.$

$$\Phi : [a,b] \longrightarrow \cancel{[a,b]}\ \mathbb{R}.$$

Φ continue.

$$\begin{cases} \Phi(a) = g(a) - a \geq 0 \\ \Phi(b) = g(b) - b \leq 0 \end{cases}$$

donc $\Phi(a) \cdot \Phi(b) \leq 0$ d'après le corollaire du Théorème Val. inter.

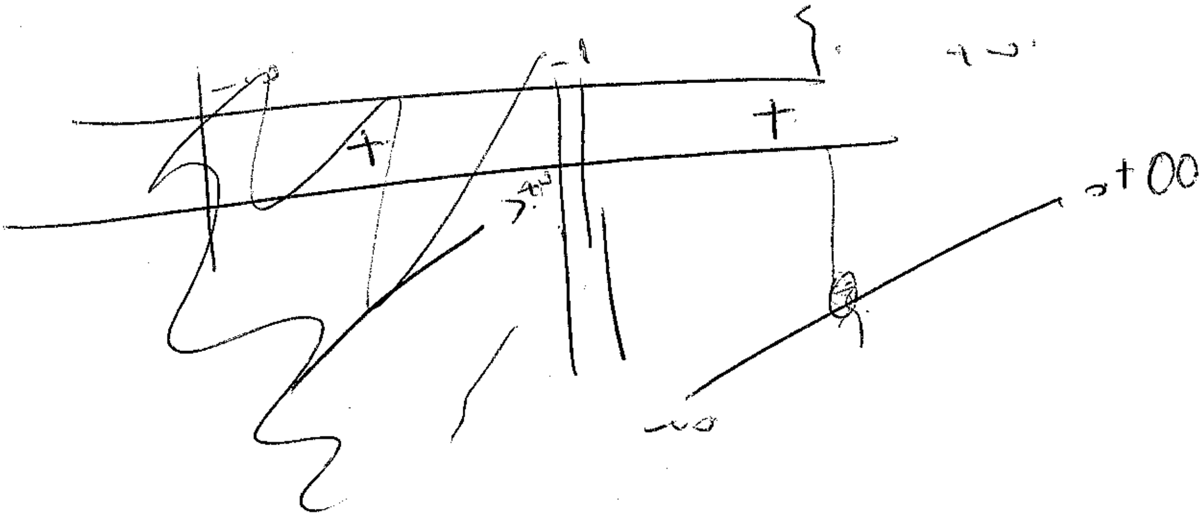
$\exists\ \xi \in [a,b]$ tq $\Phi(\xi) = 0$

ou $g(\xi) = \xi.$

$g(x) = \ln(1+x) + 0{,}2$

$x \geqslant -1$

$g'(x) = \dfrac{1}{|1+x|}$



$|x| < |\rho + \delta|$

x_0

g est continue sur I_δ.

d'après le Théo accroissement fini

~~$\exists\ \theta_k \in]\rho - \delta, \rho + \delta[$~~ tq

soit $x_k \in I_\delta$.

$\rho \in I_\delta$.

g est conte sur $[x_k, \rho]$ $\exists\ \theta_k \in]x_k, \rho[$

tq $|g'(\theta_k)| = \left|\dfrac{g(x_k) - g(\rho)}{x_k - \rho}\right|$

$|g(x_k) - g(\rho)| = |x_k - \rho|\ |g'(\theta_k)|$

$|x_{k+1} - \rho| = |x_k - \rho|\ |g'(\theta_k)|$

$\leq L\ |x_k - \rho|$

Cr $x_k < \theta_k < \rho$

b). ~~Jmi~~

Montrons $\exists\, 0 < L < 1$ $\quad |g'(x)| \leq L$

$\forall x \in I_S$.

<u>Rappel</u> inégalité triangl..

$\underbrace{|a| - |b|}$ $\leq \Big| \underbrace{|a| - |b|}_{X} \Big| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$.

ou.

~~$|b| - |a| \leq \big| |a| - |b| \big| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$~~

$X \leq |X|$

~~$X \leq |X|$~~

$$\big|g'(x)\big| - |g'(s)| \leq \big|g'(x) - g'(s)\big| \leq \frac{1}{2}\big(1 - |g'(s)|\big)$$

$$\Rightarrow \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}\big(1 - |g'(s)|\big) + |g'(s)|$$

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|g'(s)|$$

$$= L = \frac{1}{2}\big(1 + |g'(s)|\big) > 0.$$

Trivial.

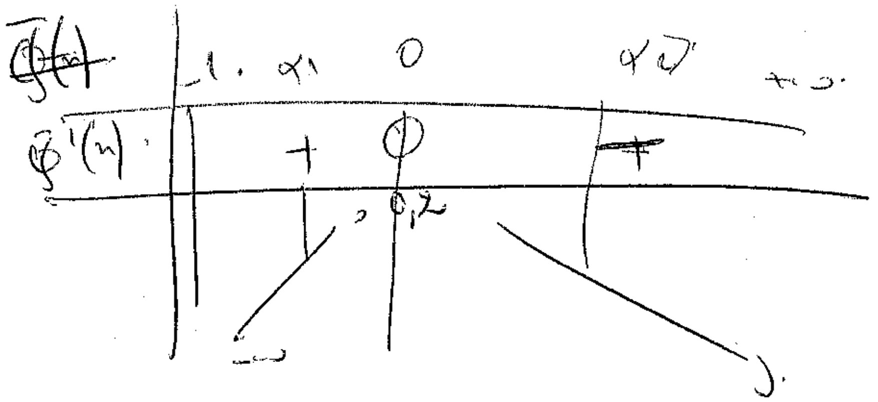
Montrons ~~$0 \leq$~~ $L \leq 1$

$-1 \leq |g'(s)| < 1$

$+1 \qquad < \frac{2}{2}$.

$$\frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1+x-x}{1+x}$$

$$\frac{\cancel{1} - \cancel{1} - x}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$$



$$\ln(1+x) - x + 0{,}2$$

$$x\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right) + 0{,}2$$

$+\infty$

$$g'(\alpha_2) = \left|\frac{1}{1+\alpha_2}\right| < 1$$

$$g'(\alpha_1) = \left|\frac{1}{1+\alpha_1}\right| > 1$$

g ve fonction conte sur $[\min(x_k, \zeta), \max(x_k, \zeta)]$

$\theta_k \in]\min(x_k, \zeta), \max(x_k, \zeta)[$

On suppose $\min(x_k, \zeta) = x_k$
$\max(x_k, \zeta) = \zeta$

$$\left| \frac{g(\max(x_k, \zeta)) - g(\min(x_k, \zeta))}{\max(x_k, \zeta) - \min(x_k, \zeta)} \right| = |g'(\theta_k)|$$

$$|g(\max(x_k, \zeta)) - g(\min(x_k, \zeta))| = |g'(\theta_k)| \, |\max(x_k, \zeta) - \min|$$

$$|g(x_k) - g(\zeta)| = |g'(\theta_k)| = |x_k - \zeta|$$

On $\theta_k \in]\min(x_k, \zeta), \max(x_k, \zeta)[$

donc $\min(x_k, \zeta) < \theta_k < \max(x_k, \zeta)$

$\min(x_k, \zeta) - \zeta < \theta_k - \zeta < \max(x_k, \zeta) - \zeta$

$g(\zeta)$ ~~$= g(x_k)$~~

~~$\min(f, g) = \frac{1}{2}(f +$~~

$$\boxed{\begin{aligned} \min(f, g) &= \tfrac{1}{2}(f + g - |f - g|) \\ \max(f, g) &= \tfrac{1}{2}(f + g) + |f - g| \end{aligned}}$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$ pour évaluer une intégrale définie de la forme

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x)$$

P_0 , P_1

I_{ap} est exacte pour P_0 , P_1

Corollaire :

Si I_n est exacte pour une fonction f.

$$\Pi_1 f = \sum_{i=0}^{1} y_i \, \ell_i(x).$$

$$= y_0 \, \ell_0(x) + y_1 \, \ell_1(x).$$

$$= f(x_0) \, \ell_0(x) + f(x_1) \, \ell_1(x).$$

$$\ell_0 = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^{1} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j}.$$

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad j = 1.$$

$$\ell_0(x) = \prod_{j} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 1}{-1 - 1} = \frac{x - 1}{-2}.$$

$$\ell_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x + 1}{2}.$$

M

G st de C^2 sur $[-1,1]$.

(car f de C^2 sur $[-1,1]$).

~~$G(x)$~~

$$G(x) = E(x) - \cancel{w(x)} \frac{E(x)}{\cancel{w(x)}} = 0.$$

$$G(-1) = E(-1) + w(-1) \frac{E(x)}{w(x)}.$$

$$w(-1) = 0.$$

$$G(-1) = f(-1) - \Pi_1 f(-1)$$

$$= \cancel{f(-1)} - (\cancel{f(-1)}\ (1)) = 0$$

$$G(1) = E(1) + \cancel{w(1)}^{=0} \frac{E(x)}{w(x)}$$

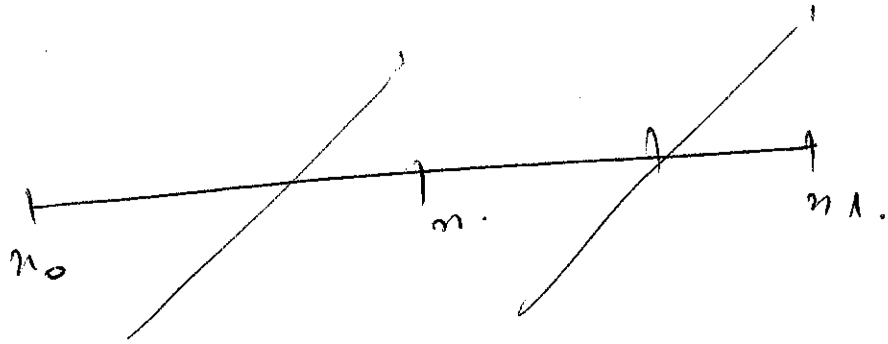
$=$

G la fonction 3 zéros c-à-d.

~~$\forall x \in [-1,1]$. $G(x)$~~

$\exists$

d'après le théo des valeurs inter.



$\exists\, \alpha \in]x, 1[$ tq. $G'(\alpha) = 0$

$\exists\, \beta \in]-1, x[$ tq $G'(\beta) = 0$

donc la fonction G' admet

2 zéros ensuite

de ici $\gamma \in]\alpha, \beta[$

$$G''(\gamma) = 0.$$

G' admet un seul zéro.

$$\boxed{\begin{aligned}\Pi_1 f(x) &= f(-1)\, \ell_0(x) + f(1)\, \ell_1(x) \\ &= f(-1)\left(\frac{x-1}{-2}\right) + \frac{x+1}{2}\, f(1).\end{aligned}}$$

Montrer :

$$|f(x) - \Pi_1 f(x)| \leq \frac{M_2}{2}(1-x^2) \leq \frac{M_2}{2}$$

$$\forall x \in [-1,1].$$

Indication : Posons $E(x) = f(x) - \Pi_1 f(x)$

On définit la fonction

$\cancel{E(x) = f(x)}$

$$G(t) = E(t) - w(t)\frac{E(x)}{w(x)}$$

$$\text{avec } w(t) = (t - x_0)(t - x_1). \\ = (t-1)(t+1) \\ = (t^2 - 1)$$

En suite utiliser le Théo. de R.I.

$$\int_{-1}^{1} \frac{q(x)\, w_3(x)\, p(x)\, w_2(x)\, (x-1)(x-1)}{VP}\, dx = 0$$

u

si la fonction est égale à q =

$$\boxed{p(x)\ w_3(x)}$$

$$(\cancel{ax^2+bx+c}).(x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)$$

$\cancel{ax^5}$ +

$$-(x^2+x+1)(x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma).$$

$\cancel{(x^2+1+x)}(x$

$$=(x^2-x+1)(-x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma).$$

$$=-(x^5+\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x$$
$$+x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)$$

$$=-x^5+\alpha x^2$$


20

$$[x_0, \dots x_n] y = \frac{\dfrac{[x_1, \dots x_n] y - [x_0, \dots x_{n-1}] y}{x_n - x_0}}{}$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{W'_{n+1}(x)} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i}{W'_{n+1}(x)}}{x_n - x_0}$$

$$[x_0, \dots x_n] y = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{W'_{n+1}(x_i)}.$$

$=$

$$W_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

$$W_{n+1}(x)$$

$$\sum_{i=0,\ i \neq k}^{n} \left[\prod_{j=0,\ j \neq i}^{n} (x_k - x_j) \right].$$

$n = 2,$

$$\sum_{i=0,\ i \neq k}^{2} \prod_{j=0,\ j \neq 0}^{2} (x_k - x_j). = (x_k - x_1)(x_k - x_2)$$

$0 \neq k.$

$\forall k \in \{1, 2\}$

$$\sum_{i=0} \prod^{n} \qquad \left[(x - x_0)(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot\right]$$

$$\cancel{x - x_1}$$

$$(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_2)$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)$$

$$\sum_{i=0}^{m} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m}$$

$$\Pi_1 f(x) = f(x_0) \sum_{i=0}^{1} y_i \, l_i(x)$$

$$= y_0 \, l_0(x) + y_1 \, l_1(x)$$

$$= f(x_0) \, l_0(x) + f(x_1) \, l_1(x)$$

$x_0 = -1$.

$x_1 = 1$.

$$l_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^{1} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$= \frac{x - 1}{-1 - 1}$$

G_n $E(x) = f(x) - \Pi_1 f(x)$ $\forall x \in]-1, 1[$

$$G(t) = E(t) - w(t) \frac{E(x)}{w(x)}$$

$$w(t) = (t+1)(t-1) = t^2 - 1$$

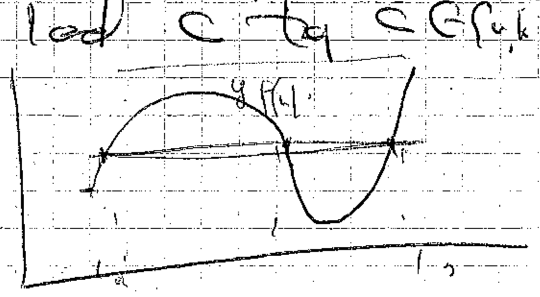
$$\begin{cases} G(x_0) = E(x_0) + w(x_0) \longrightarrow 0 \\ G(x_1) = \qquad = 0 \\ G(x) = \end{cases}$$

La fonction G admet au moins 3 zéros

Thé V.I. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ appl. conte, alors $\forall u \in E_a$ $u \in f(a)$ d $f(c)$ $f(b)$

$\exists$ au moins un réel c tq $c \in [a,b]$

$f(c) = u$



G' admet au moins

2 zéros

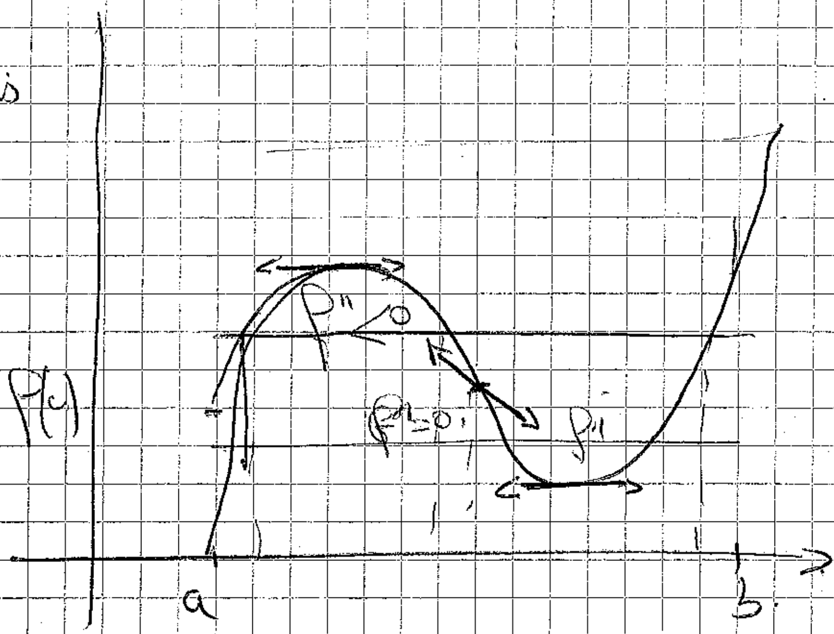
G'' admet au moin

1 zéro.

$\exists\, c$ tel que

$G''(c) = 0$.

$\exists$ au moins



$$G''(t) = E''(t) - w''(t)\,\frac{E(x)}{w(x)}$$

$$= P''(t) - 2\,\frac{E(x)}{w(x)}$$

$$G''(c) = 0 \implies P''(c) = 2$$

$$\boxed{E(x) = \frac{P''(c)\,w(x)}{2}}$$

donc $|E(x)| \leq \frac{|P''(c)|}{2}\,|w(x)|$

$\leq$ Max

Ex4 :

1

$$\Pi_n(x) = \Pi_{n-1}(x) + q_n(x).$$

Montrons : $\boxed{q_n(x) = a_n\, w_n(x)}$?

Π_n est un polynôme d'ordre n.
Π_{n-1} " " " $n-1$.

$\boxed{q_n \text{ polynôme d'ordre } n}$

$$q_n(x_i) = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots n-1\}.$$

$\Pi_n(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{0, \dots n\}.$
$\Pi_{n-1}(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{0, \dots n-1\}.$

par suite $q_n(x_i) = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots n-1\}.$

Récap : q_n est un polynôme d'ordre n.
tq $q_n(x_i) = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots n-1\}$

$$q_n(x) = \underbrace{a_n}_{\text{constante}} . \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i).$$

$$w_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) \qquad (x - x_0)(x - x_1)$$

y_n

$$\Pi_m(x) = \Pi_{m-1}(x) + a_n w_n(x).$$

$$\cancel{a_n} = y_n = \Pi_n(x_n) = \Pi_{m-1}(x_n) + a_n w_n(x_n)$$

$$\cancel{a_n = y_n - a_n w_n(x_n)}$$

$$a_n = \frac{y_n - \cancel{\Pi_{n-1}(x_n)}}{w_n(x_n)} = \frac{y_n}{w_n(x_n)}$$

---

(2) ~~Posons~~ Dans la suite Notons,

$a_n = [x_0, \dots x_n]y$ différence de Newton

Posons $[x_0]y = a_0\ y_0.$

$[w_0 \equiv 1.$

Montrons $\Pi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} [x_0, \dots x_k]y\ w_k(x)$?

Par récurrence

pour $n = 0.$

$$\cancel{\sum_{k=0}^{0} [x_0]}.\ [x_0]y\ w_0(x) = y_0 \cdot 1 = y_0 = \Pi_0(x).$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_i}{(x_i - x_0)(x_i - x_n) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (x_i - x_j)}$$

$$- \frac{y_0}{(x_0 - x_n) \prod_{j=1}^{n-1} (x_0 - x_j)} + \frac{y_n}{(x_n - x_0) \prod_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j)}$$

$$= \frac{1}{(x_n - x_0)} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \right.$$

On suppose la propriété est vraie à l'ordre $n-1$.

càd. $$\Pi_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} [x_0, \ldots x_k]\, y\, w_k(x).$$

Montrons à l'ordre n.

$$\Pi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} [x_0, \ldots x_k]\, y\, w_k(x)$$

$$\Pi_n(x) = \Pi_{n-1}(x) + q_n(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} [x_0, \ldots x_k]\, y\, w_k(x) + a_n w_n(x).$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} [x_0, \ldots x_k]\, y\, w_k(x) + [x_0, \ldots x_n]\, y \cdot w_n(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [x_0, \ldots x_k]\, y \cdot w_k(x).$$

<u>CL</u>: $$\Pi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \underline{[x_0, \ldots x_k]\, y\, w_k}.$$

forme de Newton
du polynôme d'interpolation.

Ex3: Notons: Π polynome interpolateur de Lagrange d'ordre n

associé à l'ensemble ~~càd~~ $\Pi(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{0, \dots n\}$.

q: polynome interpolateur de Lagrange d'ordre $(n+1)$

associé à càd $q(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{1, \dots n+1\}$

Montrons $p(x) = \dfrac{(x - x_0)\, q(x) - (x - x_{n+1})\, \Pi(x)}{x_{n+1} - x_0}$

d'ordre $(n+1)$ interpolateur de Lagr.

càd

$p(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{0, \dots n+1\}$.

$$p(x_0) = \frac{\cancel{(x_0 - x_0)\, q(x_0)} - (x_0 - x_{n+1})\, \Pi(x_0)}{(x_{n+1} - x_0)} = y_0.$$

0

$$p(x_{n+1}) = \frac{(x_{n+1} - x_0)}{(x_{n+1} - x_0)}\, q(x_{n+1}) = y_{n+1}.$$

$\forall i \in \{1, \dots n\}$.

$$p(x_i) = \frac{(x_i - x_0)\, q(x_i) - (x_i - x_{n+1})\, \Pi(x_i)}{x_{n+1} - x_0}$$

$$= \frac{(x_i - x_0)\, y_i - (x_i - x_{n+1})\, y_i}{x_{n+1} - x_0} = \frac{(\cancel{x_{n+1}} - x_0)\, y_i}{(\cancel{x_{n+1}} - x_0)} = y_i$$

p ... de polynome de Lagr...

$$y[x_0, \dots x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{w'_{n+1}(x_i)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)} + \frac{y_0}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{n} (x_i - x_j)} + \frac{y_n}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq n}}^{n} (x_i - x_j)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)} + \frac{y_0}{\prod_{j=1}^{n} (x_0 - x_j)} + \frac{y_n}{\prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)}$$

$q_n(x_i) = 0 \quad \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

q

$$\begin{cases} \Pi_n(x_i) = y_i & \forall i \in \{0, \ldots, n-1, n\} \\ \Pi_n(x_0) = y_0 \\ \Pi_{n-1}(x_{n-1}) = y_{n-1} \\ \Pi_n(x_n) = y_n \end{cases}$$

$\sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)$

β

Π_{n-1}

$\Pi_{n-1}(x_0) = y_0$

$\Pi_{n-1}(x_1) = y_1 \quad \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)$

$\vdots$

$\Pi_n(x_{n-1}) = y_{n-1}$ $\quad y_k$

$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i \\ j \neq k}}^{n} \quad \Pi_n(x_n) = y_n = q_n(x_n) +$

$\Pi_n(x_i) = y_i = \Pi_{n-1}(x_i) + q_n(x_i)$

$y_i \quad \forall i \in \{0, \ldots, n\}$.

$j=0, \; i \neq k \neq j$ $\quad \forall i \in \{0, \ldots, n\} \quad q_n(x_i) = 0$

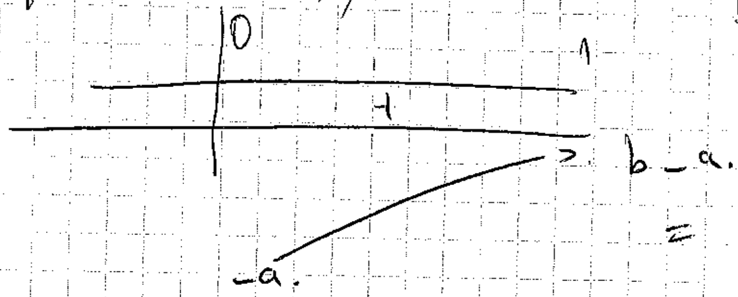
$k = 1, \; j = 2, \; k = 2$

$$\sqrt{\varepsilon}(b\varepsilon - a) = b\varepsilon^{3/2} - a\sqrt{\varepsilon} \leq a\sqrt{\varepsilon} + b\varepsilon^{3/2}$$

$f(x) = bx - a$

$f'(x) = b.$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq p}}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}$$



$= \sum$

Ref.

$$q_n(x_i) = \cancel{a_n} \, a_n \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i).$$

Exemple. $n = 2$.

$$q_2(x_i) = \prod_{i=0}^{1} (x - x_i)$$

$$= (x - x_0)(x - x_1) \text{ ordre } 2$$

2

q_n connu

$$q_n(x) = a_n \prod \quad \underline{a_n} \, W_n(x).$$

$$W_n(x) = \prod_{i=0} (x - x_i)$$

Rq. $x = x_i$

f une fonction deux dérivable sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

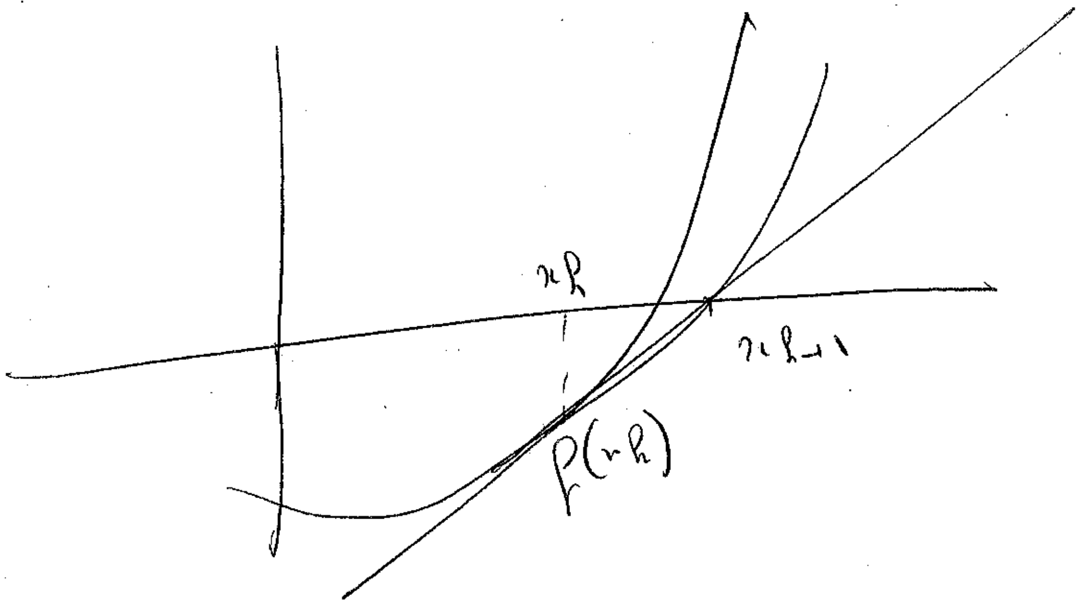
$f(\xi) = 0$ et $f'(\xi) \neq 0$ (ξ zéro simple).

si $f(\xi) = 0$ et $f''(\xi) = 0$ (ξ zéro double)

$$\begin{cases} x_{k+1} = \underbrace{x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{} = g(x_k). \\ \\ x_{k+1} = g(x_k). \end{cases}$$

$$f'(x_k)\, x_{k+1} - x_k f'(x_k) + f(x_k) = 0$$

$$(x_{k+1} - x_k)\, f'(x_k) + f(x_k) = 0.$$



c'est l'équation de la tg passant par les $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$.

Le réel ρ $\quad x_{k+1} = g(x_k)$

convergence à l'ordre 2 si $\exists c > 0$ tq

$$\frac{|x_{k+1} - \rho|}{|x_k - \rho|^2} \leq c.$$

c constante asymptotique

Formule Taylor Lagrange

Thés:

si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qq fois dér. $n+1$.

$$f(b) ~~= f(a) +~~ f'(a)(b-a) + \frac{\cancel{f^{(n+1)}(\xi)}}{(\cancel{n}+1)}$$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(b-a)^2$$

$\exists\, c \in \left]\min(\xi, x_k), \max(\xi, x_k)\right[$

On suppose : $\begin{cases} \max\ \xi \\ \min\ x_k \end{cases}$ $\quad \lim_{k \to +\infty} x_k = \xi.$

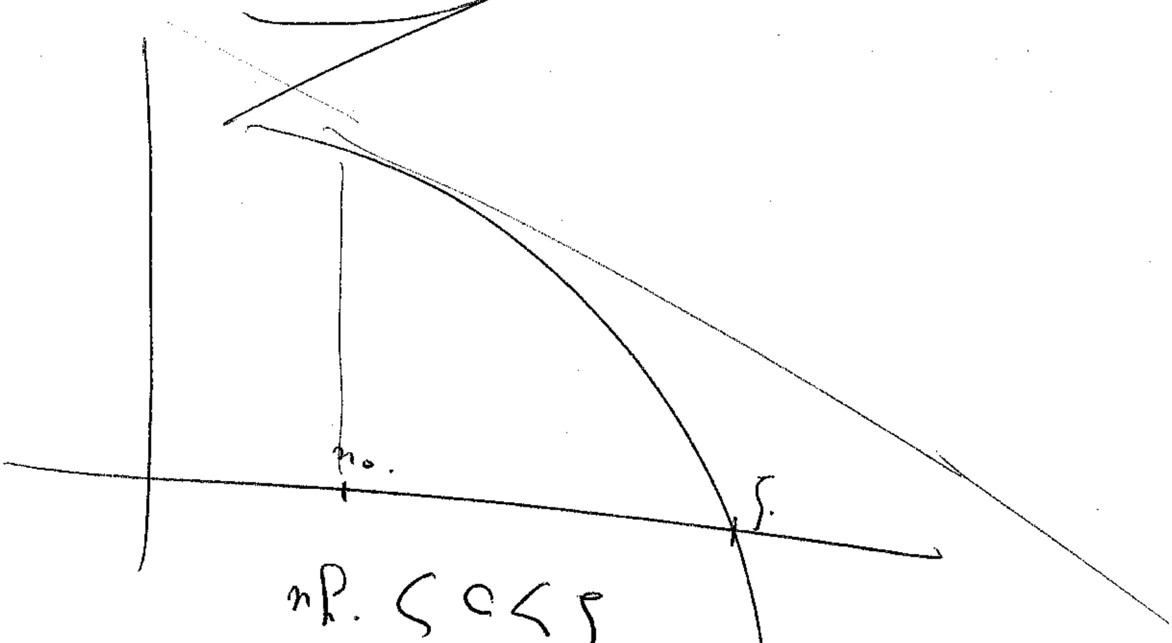
$f(\xi) =$

$$f(\xi) = f(x_k) + f'(x_k)(\xi - x_k) + \frac{f''(c)}{2!}(\xi - x_k)^2$$

avec $\quad x_k < c < \xi.$

On prend $\quad c = x_k + \theta(\xi - x_k) \qquad 0 < \theta < 1$

à condition ~~Montrer~~ $\quad x_k < c < \xi$



$$x_k < c < \xi$$

$$x_k < x_k + \theta(\xi - x_k) < \xi$$

$$0 < \theta(\xi - x_k) < \xi - x_k$$

$$\boxed{0 < \theta < 1}$$

si $x_k \simeq \zeta$ alors

$f'(x_k) \neq 0$ de $f'(x$ car $f(\zeta)=0$

$$0 = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + (\zeta - x_k) + \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x_k)}(\zeta - x_k)^2$$

a

$$\underline{x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} - \zeta = \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x_k)}(\zeta - x_k)^2$$

$$\boxed{x_{k+1} - \zeta = \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x_k)}(\zeta - x_k)^2}$$

f fondim contin in $[a, b]$.
doi aceld cu me de m.

Si no notăm $m_1 = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|$

$|f'(x)| > m_1$

$\frac{1}{|f'(x_1)|} < \frac{1}{m_1}$ $M_1 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x_k)|$

$$|x_{k+1} - r| \leq \frac{M_2}{2m_1} |\cancel{f''(c)}| \cdot |r - x_k|^2$$

$$\left| \frac{x_{k+1} - r}{r - x_k} \right|_2 \leq c \qquad c > 0.$$

f'ord co cond st c.

$w_0(x)\ y[x_0] = y_0 = \pi_0(x_0)$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_k - x_j)$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{2} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} (x_k - x_j) = \Sigma$$

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0 \\ k \neq 0}}^{2} (x_k - x_j) + \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1 \\ k \neq 1}}^{2} (x_k - x_j) + \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2 \\ k \neq 2}}^{2} (x_k - x_j)$$

$k \in \{1, 2\}$.

$(x_k - x_1)(x_k - x_2)$.

$(x_k - x_0)(x_k - x_2)$.

$k \in \{0, 2\}$.

$(x_k - x_1)(x_k - x_0)$

$k \in \{0, 1\}$.

π_n est un polynôme de degré n dont le coefficient $\sum_{i=0} \frac{y_i}{w'_{n+1}(x_i)}$ le nom. le

$$L|x_{k+1}-\rho| \leq (L|x_k-\rho|)^2$$

$$L|x_{k}-\rho| \leq (L|x_{k-1}-\rho|)^2$$

$$L|x_{k-1}-\rho| \leq (L|x_{k-2}-\rho|)^2$$

$$\vdots$$

$$L|x_{k+1}-\rho| \leq \left(\cancel{L|x_{k-0}-\rho|}^2\right)^n$$

$$\boxed{L|x_{k+1}-\rho| \leq \left(L|x_0-\rho|^2\right)^n}$$

$$|x_{k+1}-\rho| \leq \frac{1}{L}\left(L|x_0-\rho|^2\right)^n$$

Soit $K>0$ tq $LK<1$.

si $|x_0-\rho| \leq K$ alors

$$L|x_0-\rho| \leq \underbrace{(LK)}^{2^n}$$

$$\lim_{k \to \infty} L|x_0-\rho|| \longrightarrow 0$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1}-\rho \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Si on note:

Notons $L = \frac{2M_1}{2m_1}$

$$\cancel{|x_{k+1} - \xi| \le \frac{1}{L}\left(L|x_k - \xi|\right)^2}$$

$$\cancel{|x_k - \xi| < L\,|x}$$

$L|x_{k+1}$

$$|x_{k+1} - \xi| \le \frac{1}{L}\left(L|x_k - \xi|\right)^2$$

$$L|x_k - \xi| < \frac{1}{L}\left(L|x_{k-1} - \xi|\right)^2$$

$$L|x_{k-1} - \xi| < \frac{1}{L}\left(L|x_{k-2} - \xi|\right)^2$$

$$|x_{k+1} - \xi| < \frac{1}{L}\left(\left(L|x_{k-1} - \xi|\right)^2\right)^2$$

$f(x) \geq f(\xi) - (x-\xi) f'(\xi)$.

$x = a$.

$f(a) \geq f(\xi) - (a-\xi) f'(\xi)$.

$f'(\xi) \geq 0 \quad \dfrac{f(\xi) - f(a)}{\boxed{a - \xi}} \neq 0 \qquad f(c) > 0 \quad \boxed{> 0}$

$f'(\xi) \geq 0$

$f'(\xi) \geq \dfrac{f(\xi) - f(b)}{b - \xi} = \dfrac{f(b)}{\xi - b}$.

$f(\xi) - f(b)$.

$(a-\xi) f'(\xi) \geq f(\xi) - f(a)$.

$f'(\xi) \geq f(\xi)$

$f'(\xi) \geq$

$-f(x) \leq -f(\xi) + (x-\xi) f'(\xi)$

$f(\xi) - f(a) \leq f'(\xi) \cdot (a-\xi)$.

$f'(\xi) \geq \dfrac{f(\xi) - f(a)}{a - \xi}$

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

$$f(x) \simeq \Pi_n f(x).$$

polynôme de Lagrange

$$I_n(f) = \int_a^b \Pi_n f(x)\,dx.$$

$$= \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x) \right) dx$$

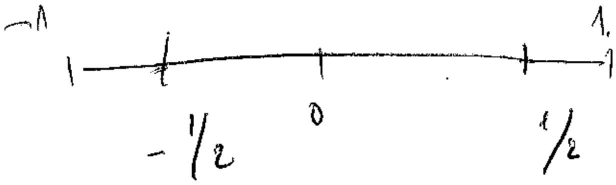
$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)\,dx.$$

$$\boxed{\alpha_i = \int_a^b l_i(x)\,dx.}$$

$$I_{op}(f) = \alpha_0 f\left(-\frac{1}{2}\right) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \forall f \in$$

$$= \sum_{i=0}^{2} \alpha_i f(x_i) \qquad \text{avec } x_i \in [-1,1].$$

avec ~~α~~ choisi $\begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$



But. Déterminer les poids tel que $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ ~~tels~~

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i f(x_i) \quad \text{~~quelq~~}$$

l'expression suivante

soit exacte $\forall f$ fonction polynomiale de degré ≤ 2.

choix. On prend.

~~En parti~~ ~~Cas particulier~~ : On choisit

$\cancel{f_0} = f_0(x) = 1 \in \mathbb{P}_2[X]$. Cas particulier.

$f_1(x) = x \in \mathbb{P}_2[X]$.

$f_2(x) = x^2 \in \mathbb{P}_2[X]$.

α_0

$$\begin{cases} \alpha_0 f_0\left(\frac{-1}{2}\right) + \alpha_1 f_0(0) + \alpha_2 f_0\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-1}^{1} f_0(x)\,dx \\ \alpha_0 f_1\left(\frac{-1}{2}\right) + \alpha_1 f_1(0) + \alpha_2 f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-1}^{1} f_1(x)\,dx \\ \alpha_0 f_2\left(\frac{-1}{2}\right) + \alpha_1 f_2(0) + \alpha_2 f_2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-1}^{1} f_2(x)\,dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 \times 1 + \alpha_1 \times 1 + \alpha_2 \times 1 = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \\ \alpha_0 \times \left(\frac{-1}{2}\right) + \alpha_1 \times 0 + \alpha_2 \cdot \frac{1}{2} = \int_{-1}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0 \\ \alpha_0 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \alpha_1 \times 0 + \alpha_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2\int_{0}^{1} x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2 & (1) \\ \cancel{-\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_2}{2}} \Rightarrow -\alpha_0 + \alpha_2 = 0 & (2) \\ \frac{\alpha_0}{4} + \frac{\alpha_2}{4} = \frac{2}{3} & (3) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow \alpha_2 = +\alpha_0$

$(3) \quad \frac{\cancel{2}\alpha_2}{4} = \frac{\cancel{2}}{3} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{4}{3}$ $\qquad \alpha_0 = \frac{4}{3}$

$(1) \Rightarrow \alpha_1 = 2 - \alpha_0 - \alpha_2 = 2 - \frac{8}{\ldots} = \boxed{-2}$

Généralisation pour $\alpha_0 = \frac{4}{3} = \alpha_2$, $\alpha_1 =$

$f \longmapsto I_{ap}(f)$ application linéaire.

$f \longmapsto \int_{-1}^{1} f(x)\,dx =$ application linéaire

qui coïncident pour $f = 1, x, x_2$.
(les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}_2$)

Elles coïncident sur $\langle 1, x, x_2 \rangle = \mathrm{Vect}(1, x, x_2)$

---

③ D'après la question précédente, le degré d'exactitude de la formule est au moins égal à 2.

~~On~~ Testons pour $\underline{n=3}$. On prend $f(x) = x^3$.

$$\alpha_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \alpha_1 (0)^3 + \alpha_2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.$$

$$\alpha_0 = \alpha_2 = 0. \quad \textcircled{}\ \text{l'expression d'exactitude est vérifiée pour } \underline{n=3}$$

~~Testons pour.~~

Testons pour $\underline{n=4}$. On prend $f(x) = x^4$

$$\alpha_0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \int_{-1}^{1} x^4\,dx = 2\int_0^1 x^4\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{5}$$

$$\underline{8} \qquad \frac{\alpha_0}{16} + \frac{\alpha_2}{16} = \frac{2}{5}.$$

$$\begin{cases} x_0 x_1 = -\frac{1}{\varepsilon} \\ x_0 + x_1 = 0 \end{cases}$$

$x_0 < x_2$

$-x_1^2 = -\frac{1}{\varepsilon}$

$x_1^2 = \frac{1}{\varepsilon}$

$x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ $\quad$ $x_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$

$x_0 = -\sqrt{\frac{1}{\cancel{\varepsilon}}} \in [-1, 1]$

$x_1 = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \in [-1, 1]$

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = 1 \end{cases}$$

$\frac{8}{3 \times 16} = \frac{2}{5}$

$\frac{1}{6} = \frac{2}{5}$ absurde donc l'expression d'exactitude n'est pas vérifiée pour $n=4$

Cl: le degré d'exactitude est 3

Ex2: $x_0, x_1 \in [-1,1]$

$-1 \quad x_0 \quad x_1 \quad 1$

$x_0 < x_1$

$$I_{ap}(f) = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1)$$

But: déterminer $x_0, x_1, \alpha_0, \alpha_1$ tq.

$$I_{ap}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \ ?$$

(1) ~~polynôme de Lagrange~~

Rq: d'après polynôme d'interpolation de Lagrange.

$$f(x) = \Pi_n f = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, f(x_i)$$

Nous cherchons I_{ap} à l'ordre (n)

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \Pi_n f(x) = \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, f(x_i)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_{-1}^{1} l_i(x)\,dx$$

$$\boxed{\alpha_i = \int_{-1}^{1} l_i(x)\,dx}$$

$\left\{\begin{array}{l} I_{ap}(f) \quad \text{linéaire} \\ \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \quad \text{linéaire} \end{array}\right.$

sont égaux sur la base $< P_0, P_1 >$.

$= \mathbb{P}_1[x]$.

par suite est exacte $\forall f$ de degré ≤ 1.

③. Relation en x_0 et x_1 tq.

$$I_{ap}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \quad \forall f \in \mathbb{P}_2[x]$$

a plu...

On prend $f(x) = x^2$:

$$I_{ap}(x^2) = \alpha_0 \cdot x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx$$

$$= 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

$$\alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 = \frac{2}{3}.$$

$$\left(-\frac{2x_1 x_0^2}{x_0 - x_1}\right) + \left(\frac{-2x_0}{x_1 - x_0}\right) \cdot x_1^2 = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{\cancel{2}x_1 x_0^2 - \cancel{2}x_0 x_1^2}{x_0 - x_1} = \frac{\cancel{2}}{3}$$

$$\frac{x_1 x_0 \cancel{(x_0 - x_1)}}{\cancel{x_0 - x_1}} = \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{x_0 x_1 = \frac{1}{3}.}$$

ou ~~$3x_0 x_1 = 1$~~

(1) nbre des noeuds − 1 ~~nbre point de~~ degré − 1.

$$\cancel{\ell_0 = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{1} \frac{x - x_j}{x_i}} \qquad \ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$\ell_0(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{1} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} =$$

$$\ell_1(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{1} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

$$\alpha_0 = \int_{-1}^{1} \ell_0(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) dx$$

$$\cancel{= \frac{1}{x_1 - x_0}}\ \frac{1}{(x_0 - x_1)} \int_{-1}^{1} (x - x_1)\, dx.$$

$$\cancel{= \frac{1}{(x_0 - x_1)} \times \left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} - 2x_1 \right)}$$

$$= \cancel{\frac{1}{(x_0 - x_1)}} \left(\frac{1}{(x_0 - x_1)} \left[\cancel{\int_{-1}^{1} x\, dx} - \int_{-1}^{1} x_1\, dx \right] \right.$$

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{-2x_1}{x_0 - x_1}}$$

$$\alpha_1 = \int_{-1}^{1} \ell_1(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_0} \times -2x_0 = \boxed{\frac{-2x_0}{x_1 - x_0} = \alpha_1}$$

$$-\frac{\cancel{2}x_1 x_0 \left(\cancel{x_0 - x_1}\right)}{\cancel{x_0 - x_1}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}.$$

$$\boxed{x_1 x_0 = \frac{-1}{3}.}$$

④ $I_{ap}(x^3) = \int_{-1}^{1} x^3 \, dx = 0.$

$$\alpha_0 . x_0^3 + \alpha_1 x_1^3 = 0.$$

$$\left(\frac{-2x_1}{x_0 - x_1}\right) . x_0^3 + \left(\frac{-2x_0}{x_1 - x_0}\right) . x_1^3 = 0$$

$$\frac{-2x_1 x_0^3 + 2x_0 x_1^3}{x_0 - x_1} = 0.$$

$$-2 x_1 x_0 \left(x_0^2 - x_1^2\right) = 0.$$

$$\underbrace{x_1 x_0}_{-1/3.} \frac{(x_0 + x_1)\cancel{(x_0 - x_1)}}{\cancel{(x_0 - x_1)}} = 0$$

$$\boxed{x_0 + x_1 = 0}$$

⑤

(5) Montrons que le degré d'exactitude est au plus égal à trois
(d'après la question préc.)

<u>On raisonne par l'absurde</u> : Supposons que le degré d'exactitude est ≥ 4.

On particulier I_{ap} est exacte pour
$$w(x) = ((x - x_0)(x - x_1))^2.$$

$$I_{ap}(w) = \alpha_0 w(x_0) + \alpha_1 w(x_1) = 0.$$

<u>Or</u> $\underline{w(x) \geq 0}$ (~~en effet~~ $w(x) \geq 0$ & $[-1, 1]$.
~~et~~ $\cancel{w(x)} \neq 0$
~~$w(x) =$~~ x_0

$$I = \int_{-1}^{1} w(x)\,dx = 2\int_0^1 w(x)\,dx > 0.$$
car $w(x) \geq 0$ non nulle.

d'une autre $I_{ap} \neq \int^1 w(x)\,dx$.
$\Rightarrow$ le degré d'exactitude est donc au plus 3.

(6)

Cours

Formule d'interpolation de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(n+1)$ points distincts $x_0, \ldots, x_n$ et $(n+1)$ valeurs $y_0, \ldots, y_n$

Le polynôme d'interpolation $\Pi_n \in \mathbb{R}_n$ tel que

$$\Pi_n(x_i) = y_i \quad ; \quad i = 0, \ldots, n.$$

est donnée par :

$$\boxed{\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, L_i(x) \quad \text{avec} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}$$

en utilisant cette formule est la valeur exacte du polynôme d'interpolation au point x pour un jeu de données légèrement perturbées, les perturbations relatives n'étant pas d'amplitude plus grande que $5nu$, où u est la précision machine. En revanche, la formule (6.20) n'est pas stable au sens inverse mais vérifie une estimation de stabilité au sens direct plus restrictive. mais différence ne sera visible que pour un "mauvais" choix de nœuds d'interpolation et/ou un jeu de données issu d'une fonction particulière.

Mentionnons enfin que, pour toute distribution de $n+1$ nœuds d'interpolation, on a l'inégalité (voir [BM97] pour une preuve)

$$\Lambda_n \geq \frac{1}{2n^2} \frac{\max\limits_{0\leq i\leq n} |w_i|}{\min\limits_{0\leq i\leq n} |w_i|},$$

ce qui permet de calculer très facilement, une fois les poids barycentriques connus, une borne inférieure pour la constante de Lebesgue Λ_n de l'opérateur d'interpolation de Lagrange associé à ces nœuds.

Algorithme de Neville

Si l'on ne cherche pas à contruire le polynôme d'interpolation de Lagrange, mais simplement à connaître sa valeur en un point donné et distinct des nœuds d'interpolation, on peut envisager d'employer une méthode itérative basée sur des interpolations linéaires successives entre polynômes. Ce procédé particulier repose sur le résultat suivant.

Lemme 6.13 *Soient x_{i_k}, $k=0,\dots,n$, $n+1$ nœuds distincts et y_{i_k}, $k=0,\dots,n$, $n+1$ valeurs. On note $\Pi_{x_{i_0},x_{i_1},\dots,x_{i_n}}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n tel que*

$$\Pi_{x_{i_0},x_{i_1},\dots,x_{i_n}}(x_{i_k}) = y_{i_k},\ k=0,\dots,n.$$

Étant donné x_i, x_j, x_{i_k}, $k=0,\dots,n$, $n+3$ nœuds distincts et y_i, y_j, y_{i_k}, $k=0,\dots,n$, $n+3$ valeurs, on a

$$\Pi_{x_{i_0},\dots,x_{i_n},x_i,x_j}(z) = \frac{(z-x_j)\,\Pi_{x_{i_0},\dots,x_{i_n},x_i}(z) - (z-x_i)\,\Pi_{x_{i_0},\dots,x_{i_n},x_j}(z)}{x_i - x_j},\ \forall z \in \mathbb{R}. \tag{6.21}$$

$q(z)$

DÉMONSTRATION. Soit $q(z)$ le membre de droite de l'égalité (6.21). Les polynômes $\Pi_{x_{i_0},\dots,x_{i_n},x_i}$ et $\Pi_{x_{i_0},\dots,x_{i_n},x_j}$ étant tous deux de degré $n+1$, le polynôme q est de degré inférieur ou égal à $n+2$. On vérifie ensuite que

$$q(x_{i_k}) = \frac{(x_{i_k}-x_j)\,\Pi_{x_{i_0},\dots,x_{i_n},x_i}(x_{i_k}) - (x_{i_k}-x_i)\,\Pi_{x_{i_0},\dots,x_{i_n},x_j}(x_{i_k})}{x_i - x_j} = y_{i_k},\ k=0,\dots,n,$$

et

$$q(x_i) = \frac{(x_i-x_j)\,\Pi_{x_{i_0},\dots,x_{i_n},x_i}(x_i)}{x_i-x_j} = y_i,\ q(x_j) = -\frac{(x_j-x_i)\,\Pi_{x_{i_0},\dots,x_{i_n},x_j}(x_j)}{x_i-x_j} = y_j.$$

On en déduit que $q = \Pi_{x_{i_0},\dots,x_{i_n},x_i,x_j}$ par unicité du polynôme d'interpolation. □

Dans la classe de méthodes faisant usage de l'identité (6.21), l'une des plus connues est l'*algorithme de Neville*[22] [Nev34], qui consiste à calculer de proche en proche les valeurs au point z considéré de polynômes d'interpolation de degré croissant, associés à des sous-ensembles des points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0,\dots,n}$. À la manière de ce que l'on a fait pour le calcul des différences divisées, cette construction peut s'organiser dans un tableau synthétique :

$$\begin{array}{c|lllll}
x_0 & \Pi_{x_0}(z) = y_0 & & & & \\
x_1 & \Pi_{x_1}(z) = y_1 & \Pi_{x_0,x_1}(z) & & & \\
x_2 & \Pi_{x_2}(z) = y_2 & \Pi_{x_1,x_2}(z) & \Pi_{x_0,x_1,x_2}(z) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
x_n & \Pi_{x_n}(z) = y_n & \Pi_{x_{n-1},x_n}(z) & \Pi_{x_{n-2},x_{n-1},x_n}(z) & \cdots & \Pi_{x_0,\dots,x_n}(z)
\end{array} \tag{6.22}$$

Le point z étant fixé, les éléments de la deuxième colonne du tableau sont les valeurs prescrites y_i associées aux nœuds d'interpolation x_i, $i=0,\dots,n$. À partir de la troisième colonne, tout élément est

22. Eric Harold Neville (1er janvier 1889 - 22 août 1961) était un mathématicien britannique. Ses travaux les plus notables concernent la géométrie différentielle et les fonction elliptiques de Jacobi. Il joua, à la demande de son collègue Godfrey Harold Hardy, un rôle prépondérant dans la venue en Angleterre en 1914 du mathématicien indien Srinivasa Ramanujan.

Il est important d'observer que les poids barycentriques ne dépendent ni du point x, ni des valeurs y_i, $i = 0, \ldots, n$, représentant les données à interpoler. Leur calcul demande $\frac{1}{2}n(n-1)$ soustractions, $(n+1)(n-1)$ multiplications et $n+1$ divisions. Une fois cette tâche accomplie, l'évaluation du polynôme d'interpolation Π_n sous la forme barycentrique (6.18) en tout point ne coïncidant pas avec un un nœud d'interpolation requiert n additions, $n+1$ soustractions, $2n+1$ multiplications et $n+1$ divisions. De même, la prise en compte d'un nœud d'interpolation x_{n+1} et d'une valeur y_{n+1} supplémentaires pour construire le polynôme Π_{n+1} à partir de Π_n se fait en divisant respectivement chacun des poids w_i, $i = 0, \ldots, n$, associés à Π_n par $x_i - x_{n+1}$ et en calculant w_{n+1} via la formule (6.19), pour un total de $n+1$ soustractions, n multiplications et $n+2$ divisions. Le coût de ces opérations est donc de l'ordre de grandeur de celui obtenu avec la forme de Newton du polynôme d'interpolation.

La formule (6.18) peut cependant être rendue encore plus « élégante ». Il suffit en effet de remarquer que, si les valeurs y_i, $i = 0, \ldots, n$, sont celles prises par la fonction constante égale à 1 aux nœuds d'interpolation, il vient

$$1 = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{x - x_i}.$$

En divisant alors l'égalité (6.18) par cette dernière identité, on arrive à la *seconde (ou vraie) forme de la formule d'interpolation barycentrique* suivante

$$\Pi_n(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x - x_i} y_i}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x - x_i}}, \tag{6.20}$$

qui est généralement celle implémentée en pratique, car elle permet des réductions lors du calcul des poids. En effet, les quantités w_i, $i = 0, \ldots, n$, intervenant de manière identique (à un facteur multiplicatif près) au numérateur et au dénominateur du membre de droite de l'égalité (6.20), tout facteur commun à chacun des poids peut, à profit, être simplifié sans que la valeur du polynôme d'interpolation s'en trouve affectée. Nous allons illustrer ce principe sur quelques exemples de distributions de nœuds d'interpolation pour lesquelles on connaît une formule explicite pour les poids barycentriques. Dans le cas de nœuds équidistribués sur un intervalle $[a, b]$ borné de $\mathbb{R}$, on a

$$w_i = \frac{(-1)^{n-i} n^n}{n!(b-a)^n} \binom{n}{i},\ i = 0, \ldots, n,$$

où $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ désigne le *coefficient binomial* donnant le nombre de sous-ensembles distincts à i éléments que l'on peut former à partir d'un ensemble contenant n éléments. Les poids « réduits » correspondants sont alors $\widetilde{w}_i = (-1)^i \binom{n}{i}$, $i = 0, \ldots, n$. Pour les familles de points de Chebyshev sur l'intervalle $[-1, 1]$ respectivement donnés par les racines des polynômes de Chebyshev de première espèce ($x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$, $i = 0, \ldots, n$) et de deuxième espèce ($x_i = \cos\left(\frac{i}{n}\pi\right)$, $i = 0, \ldots, n$), on a les poids réduits

$$\widetilde{w}_i = (-1)^i \sin\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right),\ i = 0, \ldots, n,$$

et[21] (voir [Sal72])

$$\widetilde{w}_0 = \frac{1}{2},\ \widetilde{w}_i = (-1)^i,\ 1 \leq i \leq n-1 \text{ et } \widetilde{w}_n = \frac{(-1)^n}{2}.$$

Sous la forme (6.20), l'évaluation du polynôme d'interpolation en un point autre que l'un des nœuds d'interpolation ne nécessite plus que $2n$ additions, $n+1$ soustractions, $n+1$ multiplications et $n+2$ divisions.

STABILITE NUMERIQUE : [Hig04] la formule (6.18) est stable au sens inverse, c'est-à-dire que, sous le hypothèses habituelles sur l'arithmétique à virgule flottante, la valeur calculée $\mathrm{fl}(\Pi_n(x_i))$ obtenue

21. Pour ces derniers points, on a en effet $w_0 = \frac{2^{n-2}}{n}$, $w_i = (-1)^i \frac{2^{n-1}}{n}$, $1 \leq i \leq n-1$, et $w_n = (-1)^n \frac{2^{n-2}}{n}$ (voir [Rie16]).

Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2013/2014

Formules de quadrature adaptatives

Le but du travail proposé est de mettre en œuvre et de tester des méthodes « automatiques » d'évaluation numérique précise d'intégrales sur un intervalle borné au moyen de formules de quadrature composées.

1 Principe

Soit $[a,b]$ un intervalle non vide et borné de $\mathbb{R}$, et f une fonction réelle intégrable. Pour calculer une approximation précise de l'intégrale

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

par une formule de quadrature adaptative, on procède généralement selon l'algorithme suivant.

— Tout d'abord, on réalise le calcul d'une approximation numérique $I_n(f)$ de $I(f)$ en utilisant une formule de quadrature choisie.
— On effectue ensuite une estimation de l'erreur de quadrature $|I_n(f)-I(f)|$ commise.
— Si cette dernière est plus petite qu'une certaine tolérance fixée par l'utilisateur, on accepte $I_n(f)$ comme la valeur de l'intégrale. Sinon, on subdivise $[a,b]$ en, par exemple, deux sous-intervalles de longueurs égales $[a,m]$ et $[m,b]$ et l'on ramène le calcul à ceux d'intégrales posées chacune sur l'un de ces sous-intervalles,

$$I(f)=\int_a^m f(x)\,\mathrm{d}x+\int_m^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pour chacun desquels on applique indépendamment et récursivement le procédé ci-dessus.

Il est bien connu qu'on ne peut produire un algorithme permettant d'intégrer correctement toute fonction (on peut en effet toujours construire une fonction pour laquelle un programme donné ne pourra calculer une approximation correcte). Le but de ce projet est de mettre en œuvre deux formules de quadrature adaptatives distinctes, l'une étant basée sur une formule de Newton–Cotes fermée composée, l'autre sur une formule de Gauss–Lobatto, fournissant de bons résultats pour un large nombre d'intégrands, ce que l'on vérifiera à l'aide de tests numériques.

2 Estimateur d'erreur et critère d'arrêt

Pour estimer l'erreur de l'approximation (sans bien évidemment connaître la valeur exacte de l'intégrale que l'on souhaite évaluer), on utilise la différence de deux approximations distinctes de l'intégrale. Ces dernières peuvent être basées sur

— la même formule de quadrature composée, mais utiliser un nombre de sous-intervalles différents,
— des formules de quadrature composées différentes possédant chacune un degré d'exactitude différent.

Si l'on désigne par I_1 et I_2 les deux approximations en question (I_1 étant *a priori* la plus précise des deux), respectivement stockées dans des variables `i1` et `i2`, un critère d'arrêt classique est donné par le test

`abs(i2-i1)<tol*abs(i1)` (1)

où la variable `tol` contient un réel strictement positif repr{esentant une tolérance fixée par l'utilisateur.

Ce critère est cependant insuffisant en pratique, car il ne permet pas dans certains cas de limiter efficacement le nombre d'appels récursifs de la formule de quadrature sur des sous-intervalles de plus en plus petits. Imposer arbitrairement une limite sur ce nombre d'appel ne permettra en revanche pas d'atteindre la meilleure précision dans certains autres cas. Une approche plus adéquate consiste alors à mettre fin aux subdivisions lorsque l'une des approximations courantes est devenue négligeable par rapport à la valeur de l'intégrale à calculer, ce qui revient à vérifier une condition du type

$$|I_1| < \eta \left|\hat{I}(f)\right|$$

où $\hat{I}(f)$ est une estimation grossière de l'intégrale à calculer, avec $\hat{I}(f) \neq 0$, et η est une (autre) tolérance fixée. On peut obtenir à partir de cette condition un test s'affranchissant du choix d'un tolérance (celle-ci dépendant de manière non évidente de l'intégrale à évaluer et de la machine sur laquelle le programme est exécuté) un test indépendant de la machine, donné par

```
if is+i1==is
```
(2)

où `is` est une variable contenant la valeur de $\left|\hat{I}(f)\right|$. De la même façon, on peut remplacer le test (1) par

```
if is+(i1-i2)==is
```
(3)

Ce dernier test étant en général satisfait avant celui qui le précède, c'est celui que l'on utilisera.

Malgré cette amélioration de la robustesse du critère d'arrêt, il se peut, (lorsque l'intégrand présente une singularité par exemple) que le processus de subdivision se poursuive néanmoins et l'on complète alors le test en interdisant que tout sous-intervalle obtenu par subdivision ne contienne pas de nombre représentable en machine, ce qui conduit à

```
if (is+(i1-i2)==is) | (m<=a) | (b<=m)
```
(4)

avec `a`, `b` et `m` des variables contenant les valeurs des bornes et du milieu de l'intervalle d'intégration courant. Muni de ce test, on peut alors envisager d'approcher l'intégrale $I(f)$ à la précision machine près. Si l'on souhaite utiliser une précision moindre, il suffit de modifier la valeur de l'estimation grossière de l'intégrale,

```
is=is*tol/eps
```

où `eps` est l'epsilon machine.

3 Règle de Simpson adaptative

Cette méthode utilise la règle de Simpson composée associée à l'intervalle courant et à sa subdivisions en deux sous-intervalles, c'est-à-dire que l'on fait les choix $I_1 = I_{2,2}(f)$ et $I_2 = I_{1,2}(f)$. On peut cependant observer que l'on peut obtenir un estimateur plus précis pour un nombre d'évaluations de l'int{egrand identique et remplaçant I_1 par l'extrapolation de Romberg obtenue Ãă partir de I_1 et I_2, valant

$$\frac{16\, I_2 - I_1}{15},$$

qui correspond à l'approximation fournie par la formule de Newton–Cotes fermée à cinq points sur l'intervalle d'intégration courant. Si l'estimateur ainsi obtenu ne satisfait pas le test mis au point dans la précédente section, on subdivise en deux parties égales l'intervalle courant, de façon à pouvoir de nouveau utiliser toutes les évaluations de l'intégrand déjà effectuées.

Par ailleurs, l'estimation grossière $\hat{I}(f)$ de $I(f)$ sera obtenue par une approche de type Monte-Carlo,

$$\hat{I}(f) = \frac{b-a}{8}\left(f(a) + f(m) + f(b) + \sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\right),$$

où $m = \frac{a+b}{2}$ et $\xi_i = a + (b-a)\, u_i$, les réels u_i étant tirés aléatoirement selon une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ (si la valeur effectivement calculée est nulle, on pose $\hat{I}(f) = b - a$).

Tâche 1. Écrire une fonction calculant une approximation de l'intégrale $I(f)$ avec une tolérance fixée à partir de l'algorithme basé sur la règle de Simpson décrit ci-dessus. La mise en œuvre cherchera à réutiliser au maximum toutes les évaluations de l'intégrand aux nœuds de quadrature précédemment effectuées.

4 Formule de Gauss–Lobatto adaptative

La seconde approche envisagée se base sur une formule de Gauss–Lobatto à deux nœuds intérieurs (en plus des deux extrémités), symétriques par rapport à l'origine sur l'intervalle canonique $[-1,1]$. Ceux-ci sont définis comme les zéros d'un polynôme du second degré ω_2 satisfaisant

$$\int_{-1}^{1} p(x)\omega_2(x)(x-1)(x+1)\,\mathrm{d}x = 0,\ \forall p \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}).$$

Il apparaît que, à une constante multiplicative près, le polynôme ω_2 correspond au polynôme de Jacobi de degré deux $P_2^{(\alpha,\beta)}$ associé aux valeurs des paramètres (définissant cette famille de polynômes) $\alpha = \beta = 1$.

Tâche 2. En utilisant l'expression analytique des polynômes de Jacobi et le degré d'exactitude des formules de Gauss–Lobatto, déterminer les nœuds et poids de la formule de quadrature que l'on souhaite utiliser.

Pour l'estimation d'erreur de cette formule, on choisit d'employer son extension de Kronrod à sept points, obtenue en ajoutant trois nœuds de manière à atteindre un degré d'exactitude maximal. Ces nœuds sont les zéros du polynôme unitaire de degré trois ω_3 tel que

$$\int_{-1}^{1} p(x)\omega_3(x)\omega_2(x)(x-1)(x+1)\,\mathrm{d}x = 0,\ \forall p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}),$$

où ω_2 désigne le polynôme de degré deux précédemment utilisé.

Tâche 3. Montrer que, par symétrie, on a $\omega_3(x) = x(x^2 + c)$ et déterminer, en utilisant le degré d'exactitude de la formule ainsi étendue, les nœuds à ajouter à la formule de Gauss–Lobatto et les poids associés à l'ensemble des nœuds de l'extension.

La mise en œuvre sous une forme composée adaptative de cette formule de quadrature suit les lignes de celle de la règle de Simpson de la précédente section, à la différence que I_2 est donnée par la formule de Gauss–Lobatto choisie, I_1 par son extension de Kronrod à sept points et que la subdivision en cas de non satisfaction du critère divise l'intervalle d'intégration courant en six sous-intervalles délimités par les nœuds de l'extension de Kronrod, ce qui permet là encore de réutiliser l'ensemble des évaluations de l'intégrand déjà effectuées.

Tâche 4. Écrire une fonction calculant une approximation de l'intégrale $I(f)$ avec une tolérance fixée à partir de d'un algorithme basé sur la formule de Gauss–Lobatto à quatre points introduite plus haut. Comme précédemment, la mise en œuvre cherchera à réutiliser au maximum toutes les évaluations de l'intégrand aux nœuds de quadrature précédemment effectuées.

5 Tests numériques

Pour tester les fonctions écrites, on considère tout d'abord les trois « familles » d'intégrales suivantes, inspirées de celles suggérées par Lyness et Kaganove,

$$\int_0^1 |x-\lambda|^\alpha\,\mathrm{d}x,\ \lambda \in [0,1],\ \alpha[-\frac{1}{2},0],$$

$$\int_0^1 H(x-\lambda)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x,\ \lambda \in [0,1],\ \alpha[0,1],$$

où $H(\cdot)$ est la fonction de Heaviside,

$$\int_0^1 \exp(-\alpha\,|x-\lambda|)\,\mathrm{d}x,\ \lambda \in [0,1],\ \alpha[0,4].$$

Tâche 5. Utiliser les fonctions pour le calcul de ces familles d'intégrales avec une tolérance pour la précision égale à 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9} et 1000 tirages aléatoires des paramètres λ and α dans les intervalles donnés. Indiquer pour chacune le nombre de valeurs obtenues correctes et incorrectes.

On considère enfin les intégrales suivantes.

$$I(f_1) = \int_0^1 \exp(x)\,\mathrm{d}x$$

$$I(f_2) = \int_0^1 H(x - 0,3)\,\mathrm{d}x$$

$$I(f_3) = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

$$I(f_4) = \int_{-1}^1 \left(\frac{23}{25}\cosh(x) - \cos(x)\right)\,\mathrm{d}x$$

$$I(f_5) = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^4 + x^2 + 0,9}\,\mathrm{d}x$$

$$I(f_6) = \int_0^1 x^{3/2}\,\mathrm{d}x$$

$$I(f_7) = \int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$$

$$I(f_8) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

$$I(f_9) = \int_0^1 \frac{2}{2+\sin(10\pi x)}\,\mathrm{d}x$$

$$I(f_{10}) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$I(f_{11}) = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$

$$I(f_{12}) = \int_{\frac{1}{10}}^1 \frac{\sin(100\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{d}x$$

$$I(f_{13}) = \int_0^{10} 25\,e^{-25x}\,\mathrm{d}x$$

$$I(f_{14}) = \int_0^3 \lfloor e^x \rfloor\,\mathrm{d}x$$

$$I(f_{15}) = \int_0^5 ((x+1)H(1-x) + (3-x)H(x-1)H(3-x) + 2H(x-3))\,\mathrm{d}x$$

Tâche 6. Tester en batterie les fonctions écrites pour le calcul de ces intégrales avec une tolérance pour la précision égale à 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}. Indiquer à chaque fois si la valeur obtenue est correcte et le nombre d'évaluations de l'intégrand requises.

Ex3 :

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Notation

$x_0 = a$

$x_1 = \frac{a+b}{2}$

$x_2 = b$

$$\begin{array}{ccc} x_0 & x_1 & x_2 \\ \vdash & + & \dashv \\ a & \frac{a+b}{2} & b. \end{array}$$

Formule de simpson (quadrature). obtenue si

$f(x) = \Pi_2 f(x)$. avec Π_2 polynome d'interpolation d'ordre 2.

(1). $I_2(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \Pi_2 f(x)\,dx$.

Or $\Pi_2 f(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\, P_i(x)$.

$= f(x_0)\, P_0(x) + f(x_1)\, P_1(x) + f(x_2)\, P_2(x)$.

$= f(a) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} +$

$f(b) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

$= f(a) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \left[\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}\right]$

$+ f(b) \cdot \left[\frac{(x - x_1)(x - x_0)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}\right]$. (*)

$$f(a)\left[\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}\right]$$

$$+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}\right]$$

$$+f(b)\left[\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-a)}{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}\right],$$

$$=f(a)\left[\frac{2f(a)}{(a-b)^2}+\frac{4}{(a-b)^2}\right.$$

$$=\frac{2f(a)}{(a-b)^2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)$$

$$+\frac{4}{(a-b)^2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)(x-a)(x-b)$$

$$+\frac{2f(b)}{(a-b)^2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-a).$$

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)=-\left(\frac{b-a}{4}\right)^2$$

$$\int_a^b \frac{2f(a)}{(a-b)^2}\int_a^b \overbrace{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx}^{I_1}$$

$$+\frac{4}{(a-b)^2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\underbrace{\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx}_{I_2}$$

$$+\frac{2f(b)}{(a-b)^2}\underbrace{\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-a)\,dx}_{I_3}$$

$$I_1=\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx.$$

$$U=\left(x-\frac{a+b}{2}\right) \longrightarrow U'=1.$$

$$V'=(x-b) \longrightarrow V=\frac{(x-b)^2}{2}.$$

$$I_1=\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\frac{(x-b)^2}{2}\right]_a^b-\int_a^b \frac{(x-b)^2}{2}\,dx.$$

$$=\left\{-\frac{(a-b)^3}{4}-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-b)^3}{3}\right]_a^b\right.$$

$$=\left\{-\frac{(a-b)^3}{4}+\frac{(a-b)^3}{6}\right.$$

$$=\frac{-3+2}{12}=\frac{-1}{12}(a-b)^3.$$

(3)

$$I_2(f) = \frac{(b-a)}{6} f(a)$$

$$+ \frac{4}{6}(b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$+ \cancel{2}\,\frac{(b-a)}{6} f(b)$$

$$= \sum_{i=0}^{2} \alpha_i f(x_i)$$

$$\alpha_0 = \frac{(b-a)}{6}, \quad \alpha_1 = \frac{4(b-a)}{6}.$$

$$\alpha_2 = \frac{(b-a)}{6}.$$

$$\left(\left(\int_{-t}^{0} F(u)\,du\right) + \int_0^t F(u)\,du\right)'$$

$$[F(u)]_{-t}^{0} + [F(u)]_0^t$$

$$F(0) - F(-t) + F(t) - F(0)$$

$$\int_{-t}^{0} F(u)\,du + \int_0^t F(u)\,du. \qquad \cancel{u} = \quad x = -u.$$

$$\int_{t}^{0} F(-x)(-dx) + \int_0^t F(u)\,du.$$

$$F(t) - F(0)$$

$$I_2 = \frac{(b-a)^3}{6}. \qquad \left(a - \frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{a-b}{2}\right)(a-b)$$

$$-\frac{(a-b)^3}{4} + \frac{1}{2}\left[-\frac{(a-b)^3}{3}\right]$$

$$-\frac{(a-b)^3}{4} + \frac{(a-b)^3}{6} = \frac{-3+2}{} = \frac{-1}{12}(a-b)^3$$

$$I_2 = \; = \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx.$$

$$u = (x-a) \longrightarrow u' = 1$$

$$v' = (x-b) \longrightarrow v = \frac{(x-b)^2}{2}.$$

$$I_2 = \left[(x-a)\frac{(x-b)^2}{2}\right]_a^b - \int_a^b \frac{(x-b)^2}{2}\,dx.$$

$$= +\left[\frac{(x-b)^3}{6}\right]_a^b = +\frac{(a-b)^3}{6} = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}$$

Posons $\begin{cases} x = \left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right)u. \\ \text{avec} \quad u \in [-1, 1]. \end{cases}$

$$F(u) = f(x) = f\left(\frac{a+b}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right)u\right).$$

$$G(t) = \int_{-t}^{t} F(u)\,du - \frac{t}{3}\left\{F(-t) + 4F(0) + F(t)\right\}.$$

(a) Montrons $E_2(f) = \frac{1}{2}(b-a)\,G(1)$?

$$G(1) = \int_{-1}^{1} F(u)\,du - \frac{1}{3}\left\{F(-1) + 4F(0) + F(1)\right].$$

$$G_1 \int_{-1}^{1} F(u)\,du = \int_{-1}^{1} f(x)\,du = \int_{-1}^{1} f\left(\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)}{2}u\right)du$$

Posons $\cancel{y=}$ $y = \left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right)u.$

$$dy = \frac{(b-a)}{2}\,du.$$

$$\int_a^b f(y)\,\frac{2\,dy}{(b-a)}$$

$u = -1.$

$y = \frac{a + \cancel{b} - \cancel{b} + a}{2} = a.$

$u = 1$

$y = \frac{\cancel{a} + b + b - \cancel{a}}{2} = b.$

$$= \frac{2}{(b-a)} \int_a^b f(y)\,dy.$$

$$F(0) = f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

$F(-1) = f\left(\frac{\cancel{a-b}}{\cancel{2}}\right.$ $f(a)$

$F(1) = f(b)$

$$\int_{-t}^{0} F(u)\,du.$$

$x = u + t.$

$dx = du.$

$$\int_0^t F\cancel{(u+t)\ d}$$
$$F(x-t)\,dx.$$

$$\left[-F(x-t)\right]_0^t$$

$\cancel{= F(0) - F(-t)}$

$F(0) - F(-t)$

$$\int_{-t}^{0} F(u)\,du$$

$F(t) - F(0).$

$$= -\int_0^{-t} F(u)\,du.$$

$v = -u.$ $\quad dv = -du.$

$$= -\int_0^t F(-v)\ -(dv)$$

$$= \int_0^t F(-v)\,dv \quad = F(-t) - F(0).$$

$$= \left[-F(-v)\right]_0^t.$$

$-F(-t) + F(0)$

$$G(1) = \frac{2}{(b-a)}\int_a^b f(y)\,dy - \frac{1}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

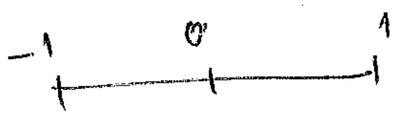
$$= \frac{2}{(b-a)}\int_a^b f(y)\,dy. - \frac{2}{(b-a)}\int_a^b \Pi_2 f(x)\,dx.$$

$$= \frac{2}{(b-a)}\left[\int_a^b f(y)\,dy - \frac{2}{(b-a)}\int_a^b \Pi_2 f(x)\,dy\right].$$

$$= \frac{2}{(b-a)}\left[\int_a^b f(x)\,dy. - \frac{2}{(b-a)}\int_a^b \Pi_2 f(x)\,dy\right]$$

$$= \frac{2}{(b-a)}\, E_2(f).$$

$$E_2(f) = \frac{(b-a)}{2}\, G(1).$$



(b). $H(t) = G(t) - t^5 G(1)$.

Montrons $\eta \in]-1,1[$ tq $H'''(\eta) = 0$

$$\begin{cases} H(1) = G(1) - 1.G(1) = 0. \\ H(0) = G(0) - 0.G(1) = G(0) = \int_0^0 F(u)\,du - 0 . = 0. \end{cases}$$

H fonction continue dérivable sur $[-1,1]$. (car f de C^4 sur $[-1,1]$.

Théo de Rolle $\exists\, \alpha \in]0,1[$ tq

$$H'(\alpha) = 0.$$

$$H'(t) = G'(t) - 5t^4 G(1).$$

$$\cancel{H'(1) = 0}.$$

$$\cancel{H'(0) = G'(0)}$$

$$= \int \cancel{F(t) + F(-t)}$$

$$= \left(\int_{-t}^{t} F(u)\,du\right)' - \frac{1}{3}\left[F(-t) + 4F(0) + F(t)\right]$$

$$- \frac{t}{3}\left[-F'(-t) + F'(t)\right] - 5t^4 G(1).$$

$$F(t) - \qquad - \left[F(-x)\right]_t^0$$

$$-\int \left[-F(-x)\right]_t^0 \qquad - \left[F(0) - F(-t)\right].$$

$$= \left(F(t) + F(-t)\right) - \frac{1}{3}\left[F(-t) + 4F(0) + F(t)\right]$$

$$- \frac{t}{3}\left[-F'(-t) + F'(t)\right] - 5t^4 G(1)$$

$$H'(0) = F(0) + F(0) - \frac{1}{3}\left[F(0) + 4F(0) + F(0)\right]$$

$$- 0 - 0.$$

$$= 2F(0) - 2F(0) = 0.$$

d'après le théo de Rolle $\exists\, \beta \in]0, \alpha[$ tq $\subset]-1,1[$

α $$H''(\beta) = 0$$

$$H''(t) = F'(t) - F'(-t) - \frac{1}{3}\left[-F'(-t) + F'(t)\right]$$

$$\cancel{-\frac{1}{3}\left[-F''(-t) + F''(t)\right]}$$

$$-\frac{1}{3}\left[-F'(-t) + F'(t)\right] - \frac{t}{3}\left[-F''(-t) + F''(t)\right]$$

$$-20t^3 G(1)$$

$$H''(0) = \cancel{F'}(0) - \cancel{F'}(0) - \frac{1}{3}\left[F'\cancel{(0)} - F'\cancel{(0)}\right]$$

$$-\frac{1}{3}\left[F'\cancel{(0)} - F'\cancel{(0)}\right] - 0 - 0 = 0$$

$$H''(\beta) = 0 \qquad -F(-t) + F(0)$$

H'' est donc dérivable sur

$$\exists\, \eta \in]0, \beta[\subset]-1, 1[\qquad F(t) - F(0)$$

$$H'''(\beta) = 0 \qquad \int_0^t$$

$$\int_t^{-t} F(-u)(du) \qquad \int_t^0 F(u)\,du + \int_0^t F(u)\,du$$

$$-\left[-F(-u)\right] \qquad \int_t^0 F(-x)(-dx) \qquad \int_0^t F(-x)(-dx)$$

$$\left(\int_{-t}^{t} f(u)\,du\right)' = f(t) + f(-t).$$

$$\int_{-t}^{t} f(u)\,du = \left[K(u)\right]_{-t}^{t}$$

$$= K(t) - K(-t).$$

tq $K'(u) = f(u)$.

$$\left(\int_{-t}^{t} f(u)\,du\right)' = \left(K(t) - K(-t)\right)'$$

$$= K'(t) - (-1)\,K'(-t).$$

$$= f(t) + f(-t)$$