Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis **2008-2009**

Analyse Numérique

Série d'exercices n° : 9

Exercice 1

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad \begin{cases} y' = f(x,y), & x \in [a,b] \\ y(a) = Y_0 \end{cases}$$

où $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $Y_0 \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $[a,b] \times \mathbb{R}$ et Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, i.e.

$$\exists\, L > 0 \text{ tel que } \forall\, x \in [a,b],\ \forall\, y,z \in \mathbb{R}, \quad |f(x,y) - f(x,z)| \leq L|y - z|.$$

On notera $Y(x)$ la solution exacte de (E).

Pour résoudre numériquement (E), on propose le schéma numérique suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} y_0 = Y_0 \\ y_{n+1} = y_n + \alpha h f(x_n, y_n) + \beta h f\left(x_n + \lambda h, y_n + \lambda h f(x_n, y_n)\right), \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

où $\lambda \in]0,1]$ est fixé, α, β sont des réels à choisir au mieux, $h = (b-a)/N$ et $x_n = a + nh$, $0 \leq n \leq N$ ($N \in \mathbb{N}$ fixé), y_n étant une approximation de $Y(x_n)$.

1– Montrer que le schéma (S) est stable pour tout choix de α et β.

2– Déterminer une condition sur α et β pour que le schéma (S) soit consistant avec l'équation différentielle (E).

3– En déduire une condition sur α et β pour que le schéma (S) converge.

4– Déterminer α et β en fonction de λ, pour que le schéma (S) soit d'ordre 2 (au moins).

5– En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - Y(x_n)| \leq K h^2$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} y' = f(x,y), & x \in [0,r] \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

où f est une fonction continue sur $[0,r] \times \mathbb{R}$ et lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c'est à dire

$$\exists\, L > 0;\ \forall\, (x,y,z) \in [0,r] \times \mathbb{R}^2, \quad |f(x,y) - f(x,z)| \leq L|y - z|.$$

Pour approcher le problème (E), on considère le schéma numérique suivant :

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} y_0 = \alpha \\ y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

avec $\Phi(x,y,h) = aV_1 + bV_3$, où

$$\begin{aligned} V_1 &= f(x,y) \\ V_2 &= f(x + \tfrac{h}{3}, y + \tfrac{h}{3}V_1) \\ V_3 &= f(x + \tfrac{2h}{3}, y + \tfrac{2h}{3}V_2) \end{aligned}$$

où a et b sont deux constantes qu'il faudra déterminer.

1– Quelle relation lie a et b pour que le schéma (S) soit consistant ?

2– Ce schéma est-il stable quelque soit a et b dans $\mathbb{R}$?

3– Déterminer a et b pour que ce schéma soit au moins d'ordre 2.

4– Montrer alors que ce schéma est en fait d'ordre 3.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{y(x)}, & x \in [0, b] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

qui admet comme solution non triviale $Y(x) = (\frac{x}{2})^2$. Calculer les approximations y_i de $Y(x_i)$ par la méthode d'Euler, où $x_i = i\frac{b}{n}$. Expliquer le résultat obtenu.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'(x) = f(x, y(x)).$$

Étant donné un schéma numérique à un pas (pour approcher (E)) associé à une fonction $\Phi_1(x, y, h)$, on construit un autre schéma numérique à un pas associé à la fonction Φ définie par :

$$\Phi(x, y, h) = \frac{1}{4} f(x, y) + \frac{3}{4} f\left(x + \frac{2}{3}h, y + \frac{2}{3}h\Phi_1(x, y, \frac{2}{3}h)\right)$$

1– Montrer que si le schéma numérique associé à Φ_1 est d'ordre 2, alors le schéma numérique associé à Φ est d'ordre 3.

2– Choisir la fonction Φ_1 pour que le schéma numérique associé à Φ donnée par

$$\Phi(x, y, h) = \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3)$$

soit d'ordre 3, où

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x, y) \\ k_2 &= f(x + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{3}k_1) \\ k_3 &= f(x + \frac{2h}{3}, y + \frac{2h}{3}k_2) \end{aligned}$$

Exercice 5

Soit le problème :

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} x''(t) = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x(0) = 4, \quad x'(0) = 0 \\ y''(t) = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Ecrire les méthodes d'Euler et de Rugne-Kutta (classique) pour la résolution du problème (P) sur $[0, T]$, $T > 0$.