

Analyse Numérique

Série d'exercices n° : 8

Exercice 1

Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On considère la formule de quadrature du point milieu :

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + E_M(f)$$

où $E_M(f)$ désigne le terme d'erreur.

1- Montrer qu'il existe $\eta \in [a, b]$ tel que : $E_M(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$

[Indication : On pourra utiliser la formule de Taylor à l'ordre 2 de f au point $\frac{a+b}{2}$].

2- Quel est le degré de la formule de quadrature du point milieu ?

Exercice 2

Soit g une fonction de classe C^4 sur $[-1, 1]$.

1- Déterminer les coefficients α_o , α_1 , α'_o et α'_1 tels que la formule :

$$(1) \quad \int_{-1}^1 g(t) dt = \alpha_o g(-1) + \alpha_1 g(1) + \alpha'_o g'(-1) + \alpha'_1 g'(1) + E(g)$$

soit de degré le plus élevé possible. ($E(g)$ désigne le terme d'erreur)

Dans toute la suite, α_o , α_1 , α'_o et α'_1 désignent les coefficients ainsi trouvés.

2- Montrer qu'il existe $\eta \in [-1, 1]$ tel que : $E(g) = \frac{2}{45} g^{(4)}(\eta)$

(On pourra considérer le polynôme d'interpolation d'Hermite H tel que : $H(-1) = g(-1)$, $H(1) = g(1)$, $H'(-1) = g'(-1)$ et $H'(1) = g'(1)$).

3- Dédurre de la formule (1), une formule de quadrature pour le calcul de $\int_a^b f(x) dx$, où f est une fonction de classe C^4 sur $[a, b]$; ainsi qu'une expression du terme d'erreur correspondant.

4- Utiliser la question 3 pour calculer une valeur approchée de : $I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{4+x}$ ainsi qu'un encadrement de l'erreur commise.

Exercice 3

On considère ici les notations de l'exercice 5 de la série d'exercices n° 7.

On considère la formule d'intégration numérique :

$$(1) \quad \int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{j=0}^n w_j f(t_j) + \sum_{j=0}^n \lambda_j f'(t_j) + E(f)$$

où $E(f)$ est le terme d'erreur.

1- Déterminer l'expression de λ_j et w_j en fonction des polynômes H_j et K_j de telle sorte que la formule (1) soit exacte pour le polynôme d'interpolation d'Hermite P de f aux points $t_0, \dots, t_n$, c'est-à-dire que

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{j=0}^n w_j P(t_j) + \sum_{j=0}^n \lambda_j P'(t_j)$$

2- Montrer qu'il existe $\eta \in [-1, 1]$ tel que l'erreur d'intégration $E(f)$ soit donnée par

$$E(f) = \frac{C}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\eta)$$

où C est une constante réelle donnée par $C = \int_{-1}^1 \prod_{i=0}^n (t - t_i)^2 dt$.

Exercice 4

Adapter la formule de Simpson pour le calcul approché de l'intégrale $I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dx dy$.

En déduire les valeurs de

$$I = \int_0^1 \int_0^1 xy \, dx dy \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) \, dx dy$$