Analyse Numérique

Série d'exercices n° : 6

Exercice 1

Illustrer graphiquement la méthode du point fixe pour résoudre l'équation $x = g(x)$, dans les 4 cas suivants : $g'(\alpha) < -1$, $-1 < g'(\alpha) < 0$, $0 \leq g'(\alpha) < 1$ et $g'(\alpha) > 1$, où α est un point fixe de g.

Exercice 2

Soit $A > 0$. Montrer que x_0 donné, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n})$, pour $n \geq 0$, est une méthode de Newton permettant de calculer $\sqrt{A}$. L'utiliser pour $A = 3$ avec $x_0 = 1$ (5itérations). Remarque?

Exercice 3

Soit $g : [a, b] \to [a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$ une fonction de classe C^1 telle que $M \equiv \max_{x \in [a,b]} |g'(x)| < 1$.

1– On considère la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$x_0 \in [a, b], \quad x_{n+1} = g(x_n), \quad n \geq 0$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers l'unique point fixe α de g.

2– Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe ε_n tel que

$$e_{n+1} = (g'(\alpha) + \varepsilon_n)e_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$$

où $e_n = x_n - \alpha$.

3– On considère la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$y_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}, \quad n \geq 0$$

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{y_n - \alpha}{x_n - \alpha} = 0$

4– Comparer la vitesse de convergence des deux suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 4

Soit $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$, où $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ sont des réels donnés.
Soit x_o donné dans $\mathbb{R}$ tel que $x_o > \alpha_n$ et soit $(x_k)_{k \geq 0}$ la suite générée par la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $P(x) = 0$.

1– Montrer que $x_k > \alpha_n$, pour $k \geq 1$, et que la suite $(x_k)_{k \geq 0}$ est décroissante.

2– En déduire que la suite $(x_k)_{k \geq 0}$ est convergente et que sa limite est α_n.

Exercice 5

On suppose que l'équation

$$(1) \qquad f(x) = g(x)$$

admet une unique solution simple α sur $[a, b]$,où f et g sont monotones et dérivables.

1) Démontrer que si $|\frac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}| < 1$, alors la méthode itérative

$$x_0 \text{ donné, } f(x_{n+1}) = g(x_n), \ n \geq 0$$

est convergente.

2) Si la condition précédente n'est pas satisfaite, proposer une méthode itérative convergente.

Exercice 6

On considère l'équation : $f(x) = 0$, où f est une fonction de classe C^3 au voisinage d'une racine double r de f (i.e. $f(r) = f'(r) = 0$ et $f''(r) \neq 0$).

1– Montrer que la méthode de Newton pour la recherche de r est localement convergente et est d'ordre 1.

2– On propose alors de "modifier" la méthode de Newton, en considérant la suite (x_k) définie par :

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Montrer que la méthode de Newton ainsi "modifiée" est localement convergente et est d'ordre 2.

Exercice 7 Accélération de Aitken

Pour résoudre $f(x) = 0$, on dispose d'une méthode d'approximations successives qu'on suppose convergente et d'ordre p.

$$(1) \qquad x_0 \text{ donné; } x_{n+1} = F(x_n) \qquad n \geq 0$$

On considère la suite (y_n) définie par la méthode d'approximations successives

$$(2) \begin{cases} y_0 = x_0 \quad y_{n+1} = \Phi(y_n) \qquad n \geq 0 \\ \text{avec} \qquad \Phi(y) = \frac{yF(F(y))-(F(y))^2}{F(F(y)-2F(y)+y} \end{cases}$$

Démontrer que la méthode (2) est d'ordre $2p - 1$ au moins.