Chapitre 4

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

4.1 Introduction

Les équations différentielles constituent l'outil le plus fréquemment utilisé dans la modélisation des problèmes des sciences physiques et ceux de l'ingénieur.
Dans ce chapitre, nous présenterons quelques méthodes (ou schémas) numériques pour la résolution des équations différentielles avec des conditions initiales.
Le problème auquel on s'intéresse, consiste à trouver $y : x \to y(x)$ définie sur $[a, b]$ vérifiant :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) & x \in [a, b] \quad \text{Problème de cauchy} \\ y(a) = y_0 & \quad \text{Condition initiale} \end{cases} \tag{4.1}$$

où $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Théorème 4.1.1 *(existence et unicité)*
On suppose que
i) f est continue sur $D = [a, b] \times \mathbb{R}$;
ii) $\exists L \succ 0; \forall x \in [a, b], \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$
Alors le problème (4.1) admet une solution unique sur $[a, b]$.

Remarques 4.1
1) La condition ii) est appelée condition de Lipschitz par rapport à la deuxième variable.

2) Si $(x,y) \to \dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue et bornée sur $D = [a,b] \times \mathbb{R}$, alors la condition ii) est vérifiée (il suffit de prendre $L = \max\limits_{(x,y)\in D} \left| \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right|$ et d'appliquer la formule des accroissements finis à la fonction $y \to f(x,y)$).

Exemple 4.1
Le problème

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{-y}{xLog(x)} + \dfrac{1}{Log(x)} & x \in [e,5] \\ y(e) = e \end{cases}$$

admet une solution unique, puisque la fonction $f : (x,y) \to \dfrac{-y}{xLog(x)} + \dfrac{1}{Log(x)}$, vérifie
$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left| \dfrac{y_1 - y_2}{xLog(x)} \right| \leq \dfrac{1}{e} |y_1 - y_2|$

Remarques 4.2
Les résultats obtenus pour (4.1) peuvent être généralisés, modulo quelques "adaptations", aux systèmes différentiels et aux équations différentielles d'ordre supérieur.

1) Les systèmes différentiels du premier ordre

$$x \in [a,b]\,; \qquad y(x) \in \mathbb{R}^n$$

$$f \begin{pmatrix} [a,b] \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (x,y) & \to & f(x,y) \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_n \end{pmatrix} \qquad f(x,y) \begin{pmatrix} f_1(x,y_1,....,y_n) \\ f_1(x,y_1,....,y_n) \\ \\ f_1(x,y_1,....,y_n) \end{pmatrix}$$

On cherche y solution de

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) & x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

où encore

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x,y_1,....,y_n) \\ y_2'(x) = f_2(x,y_1,....,y_n) \\ \\ y_n'(x) = f_n(x,y_1,....,y_n) \end{cases}$$

2) Les équations différentielles d'ordre supérieur à 1 :
Il suffit de se ramener au cas des systèmes d'ordre 1. Prenons un exemple :

$$\begin{cases} y''(x) = h(x, y, y') \quad x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \\ y'(a) = y'_0 \end{cases}$$

On pose $u_1 = y$ et $u_2 = y'$. On obtient alors :

$$\begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = h(x, u_1, u_2) \\ u_1(a) = y_0 \\ u_2(a) = y'_0 \end{cases}$$

Cas général :

$$\begin{cases} y^{(m)}(x) = h(x, y, y', ..., y^{(m-1)}) & x \in [a, b] \\ y(a) = y_0, y'(a) = y'_0, ..., y^{(m-1)}(a) = y_0^{(m-1)} \end{cases}$$

On pose $u_1 = y$ et $u_2 = y', ..., u_m = y^{(m-1)}$. On obtient alors :

$$\begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = u_3 \\ u'_m = f(x, u_1, u_2, ..., u_m) \\ u_1(a) = y_0, u_2(a) = y'_0, ..., u_m(a) = y_0^{(m-1)} \end{cases}$$

Notations :
Dans toute la suite, $Y(x)$ désigne la solution exacte du problème (4.1).

Hypothèse :
Dans toute la suite, on supposera que f vérifie les conditions i) et ii) du théorème 4.1.

4.1.1 Principe des méthodes (ou schémas) numériques

On s'intéresse à la détermination d'une approximation de la solution Y du problème (4.1). Pour cela, on procéde à une discrétisation du problème :
on considère une subdivision $a = x_0 \prec x_1 \prec ... \prec x_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$, et on cherche une valeur approchée y_n de $y(x_n)$ pour $n = 0, 1, ..., N$.
On étudiera dans ce chapitre deux types de méthodes :
1) Les méthodes à un pas : Le calcul de y_n ne fait intervenir que les valeurs de x_{n-1} et de y_{n-1} (en plus des données du problème).
2) Les méthodes à plusieurs pas : le calcul de y_n fait intervenir les valeurs de x_{n-1},..., x_{n-k} et de y_{n-1},..., y_{n-k}.
Pour la commodité de l'exposé, on imposera dans toute la suite aux points x_n d'être équidistants (en pratique, dans les codes sur les équations différentielles, ce ne sera pas le cas). On définit le pas de l'approximation $h = \dfrac{b-a}{N}$, alors $x_n = a + nh$, $n = 0, 1..., N$.

4.1.2 La méthode d'Euler

On cherche une approximation de y solution de

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) & x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Soit $x_0 = a < x_1 < ..... < x_N = b$ avec $x_n = a + nh$ pour $0 \leq n \leq N$, $h = \dfrac{b-a}{N}$.
Le schéma d'Euler est donné par :

$$\begin{cases} y_0 = Y_0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad n = 0, 1, ..., N \end{cases} \tag{4.2}$$

Ce schéma peut être interprété de trois manières différentes :

4.1.2.1 1) Interprétation graphique

Si on considère la courbe (C) de la fonction $Y(x)$ et la tangente (T) à la courbe au point d'abscisse x_n, on approche sur $[x_n, x_{n+1}]$, (C) par (T).
D'où
$\dfrac{T(x_{n+1}) - T(x_n)}{h} = Y'(x_n) = f(x_n, Y(x_n))$
$Y(x_{n+1}) - Y(x_n) \simeq T(x_{n+1}) - T(x_n) = hY'(x_n) = hf(x_n, Y(x_n))$
$\Longrightarrow \quad y_{n+1} \simeq Y(x_{n+1})$ et $y_n \simeq Y(x_n)$, vérifient

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

4.1.2.2 2) Utilisation de la formule des accroissements finies.

Dans l'intervalle $[x_n, x_{n+1}]$, on a

$$Y(x_{n+1}) - Y(x_n) = hY'(c_n) = hf(c_n, Y(c_n) \qquad où \quad x_n \prec c_n \prec x_{n+1}$$

En fait, on ne connait pas la valeur de c_n. La méthode d'Euler consiste à faire l'approximation suivante :

$$remplacer\ c_n\ par\ x_n\ et\ Y(c_n)\ par\ y_n$$

On obtient alors

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

4.1.2.3 3) Utilisation d'une formule d'intégration numérique

En intégrant $y'(x) = f(x, y)$ sur $[x_n, x_{n+1}]$, on obtient

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} Y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, Y(x))dx$$

En utilisant la formule d'intégration du rectangle à gauche, on obtient :

$$Y(x_{n+1}) - Y(x_n) = hf(x_n, Y(x_n)) + erreur$$

d'où

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

4.2 Etude générale des méthodes à un pas

Dans les méthodes à un pas, le calcul de y_{n+1} se fait à partir de x_n, y_n et h. Nous écrivons ceci sous la forme :

$$\begin{cases} y_0 = Y_0 \\ y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h) \quad n = 0, 1, ..., N \end{cases} \tag{4.3}$$

où Φ est une fonction continue sur $[a, b] \times \mathbb{R} \times [0, h^*]$, avec $h^* \succ 0$ donné. Choisir une méthode, c'est choisir Φ.
Par exemple, si $\Phi(x, y, h) = f(x, y)$, alors il s'agit de la méthode d'Euler.
Nous allons étudier les conditions qu'il faut imposer à Φ et le lien entre Φ et f pour que la méthode soit jugée "bonne".

Dans ce paragraphe, nous ferons d'abord une théorie générale des méthodes à un pas en vue de l'étude de l'erreur de discrétisation $e_n = Y(x_n) - y_n$. Ceci nous amène à introduire les notions de consistance, de stabilité, d'ordre et de convergence.

L'erreur dans une méthode est due à deux causes :
l'erreur de discrétisation due au procédé de calcul : par exemple, dans la méthode d'Euler, on a approché la courbe par sa tangente,
les erreurs d'arrondi dues aux pertes de chiffres dans les opérations arithmétiques effectuées par l'ordinateur.
Que doit-on exiger d'une méthode ?
Que l'erreur de discrétisation diminue lorsque h diminue et à la limite y doit tendre vers $Y(x)$ quand h tend vers zéro : c'est la convergence.
Pouvoir évaluer l'erreur de discrétisation en fonction de h, ceci nous permettra d'obtenir l'ordre de la méthode.
Savoir la répercussion des erreurs globales sur les calculs ultérieurs. C'est la stabilité.
Que la méthode approche l'équation différentielle. C'est la consistance.

Définition 4.2.1 (consistance)
La méthode $y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$ est dite consistante avec l'équation différentielle (4.1) : $y'(x) = f(x, y)$ si

$$\lim_{h\to 0} \max_{0\leq n\leq N-1} \left| \frac{Y(x_{n+1}) - Y(x_n)}{h} - \Phi(x_n, Y(x_n), h) \right| = 0$$

pour toute solution $Y(x)$ de l'équation différentielle (4.1).

Remarque 4.3
La quantité $\epsilon_{n+1} = \dfrac{Y(x_{n+1}) - Y(x_n)}{h} - \Phi(x_n, Y(x_n), h)$ représente dans un certain sens l'erreur que l'on fait au $n^{ième}$ pas, en remplaçant l'équation différentielle (4.1) par le schéma (4.3).

Définition 4.2.2 (stabilité)
Soient $(y_n, 0 \leq n \leq N)$ et $(z_n, 0 \leq n \leq N)$ les solutions des systèmes

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h) \\ y_0 \qquad fix\acute{e} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + h(\Phi(x_n, y_n, h) + \xi_n) \\ z_0 \qquad fix\acute{e} \end{cases}$$

où ξ_n est quelconque.
La méthode est dite stable s'il existe une constante C indépendante de h, telle que

$$\max_{0\leq n\leq N} |y_n - z_n| \leq C \max_{0\leq n\leq N} |\xi_n|$$

Remarque 4.4
Cette notion de stabilité implique qu'une petite perturbation sur les données n'entraine qu'une petite perturbation sur la solution (approchée) et ceci indépendemment de h, ce qui, du fait de l'existence des erreurs d'arrondi, est absolument nécessaire pour le traitement numérique du problème. Un schéma "instable" ne présente aucun intérêt pratique. Notons que la notion de stabilité précédente est intrinséque au schéma de résolution numérique.

Définition 4.2.3 (convergence)
La méthode (4.3) est dite convergente si :

$$\lim_{h\to 0} \max_{0\leq n\leq N-1} |Y(x_n) - y_n| = 0$$

Remarque 4.5
Cette notion de convergence indique que l'erreur de discrétisation $e_n = Y(x_n) - y_n$ tend vers zéro lorsque h tend vers zéro.

En fait, les trois notions précédentes : consistance, stabilité et convergence, ne sont pas indépendantes. Nous allons le voir au théorème suivant.

Théorème 4.2.1
Si la méthode à 1 pas donnée par (4.3) : $y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$ *est consistante et stable, alors elle est convergente.*

Démonstration
Posons $\xi_n = \dfrac{Y(x_{n+1}) - Y(x_n)}{h} - \Phi(x_n, Y(x_n), h)$ avec $\xi_0 = 0$
On a $Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + h(\Phi(x_n, Y(x_n), h) + \xi_{n+1})$
et $Y(x_0) = Y_0 = y_0 + \xi_0$
Puisque la méthode (4.3) est consistante alors on a

$$\lim_{h\to 0} \max_{0\le n\le N} |\xi_n| = 0 \tag{4.4}$$

Par ailleurs, d'après la stabilité de la méthode , en remplacant z_n par $Y(x_n)$), on sait qu'il existe $C \succ 0$ indépendant de h telle que

$$\max_{0\le n\le N} |y_n - Y(x_n)| \le C \max_{0\le n\le N} |\xi_n| \tag{4.5}$$

En faisant tendre $h \to 0$ dans (4.5), on obtient grâce à (4.4) :

$$\lim_{h\to 0} \max_{0\le n\le N} |y_n - Y(x_n)| = 0 \tag{4.6}$$

ce qui prouve que la méthode (4.3) est convergente et achève la démonstration.

Théorème 4.2.2 (condition nécessaire de consistance)
La méthode (4.3) est consistante si et seulement si on a

$$\forall x \in [a, b], \forall y \in \mathbb{R}, \Phi(x, y, 0) = f(x, y)$$

Démonstration
Posons

$$\epsilon_{n+1} = \frac{Y(x_{n+1}) - Y(x_n)}{h} - \Phi(x_n, Y(x_n), h)$$

Utilisant la formule des accroissements finis, on obtient :

$$\exists c_n \in [a, b], \epsilon_{n+1} = f(c_n, Y(c_n)) - \Phi(x_n, Y(x_n), h)$$

Posons

$$\alpha_n = f(c_n, Y(c_n)) - \Phi(c_n, Y(c_n), 0)$$

$$\beta_n = \Phi(c_n, Y(c_n), 0) - \Phi(x_n, Y(x_n), h)$$

On a alors :

$$\epsilon_{n+1} = \alpha_n + \beta_n$$

Remarquons que

$$|\beta_n| \leq \max_{0 \leq n \leq N} \left|\Phi(x, Y(x), h) - \Phi(x', Y(x'), 0)\right| = \beta(h)$$

et que, d'après la continuité uniforme de la fonction $(x, h) \to \Phi(x, Y(x), h)$ sur le compact $[a, b] \times [0, h^*]$, $\lim_{h \to 0} |\beta(h)| = 0$. Et, par suite, on a :

$$\lim_{h \to 0} \max_{0 \leq n \leq N} |\beta_n| = 0 \tag{4.7}$$

1) condition suffisante : supposons que $\Phi(x, y, 0) = f(x, y)$. Alors on a $\alpha_n = 0$ et donc $\epsilon_n = \beta_n$. Il s'en suit, d'après (4.7), que $\lim_{h \to 0} \max_{0 \leq n \leq N} |\epsilon_{n+1}| = 0$. Ainsi, la méthode (4.3) est consistante.

2) condition nécessaire : supposons que la méthode (4.3) est consistante, i. e. $\lim_{h \to 0} \max_{0 \leq n \leq N} |\epsilon_{n+1}| = 0$. Et, par suite, d'après (4.7), on a :

$$\lim_{h \to 0} \max_{0 \leq n \leq N} |\alpha_n| = 0 \tag{4.8}$$

(puisque $|\alpha_n| \leq |\epsilon_{n+1}| + |\beta_n|$)

Par ailleurs, la fonction $t \to |f(t, Y(t)) - \Phi(t, Y(t), 0)|$ est continue et donc intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, d'où l'on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} h \sum_{n=0}^{N-1} |\alpha_n| &= \lim_{h \to 0} \frac{b-a}{N} |f(c_n, Y(c_n)) - \Phi(c_n, Y(c_n), 0)| \\ &= \int_a^b |f(x, Y(x)) - \Phi(x, Y(x), 0)|\, dx\end{aligned}$$

or

$$h \sum_{n=0}^{N-1} |\alpha_n| = \frac{b-a}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\alpha_n| \leq (b-a) \max_{0 \leq n \leq N} |\alpha_n|$$

Il s'en suit, grâce à (4.8), que

$$\int_a^b |f(x, Y(x)) - \Phi(x, Y(x), 0)|\, dx = 0$$

D'où $f(x, Y(x)) = \Phi(x, Y(x), 0), \forall x \in [a, b]$ et pour toute solution $Y(x)$ de (4.1). Soit maintenant $(x^*, y^*) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. D'après le théorème 4.1, il existe une solution unique $Y(x)$ de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) & x \in [x^*, b] \\ y(x^*) = y^* \end{cases}$$

On a alors $f(x^*, y^*) = \Phi(x^*, y^*, 0)$

Ainsi, on a $\forall (x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R},\ f(x, y) = \Phi(x, y, 0)$.

Ce qui achève la démonstration.

Théorème 4.2.3 (condition suffisante de stabilité)

Si la fonction Φ vérifie une condition de Lipschitz par rapport à la deuxième variable, i.e.

$\exists M \succ 0, \forall x \in [a, b], \forall y, \overline{y} \in \mathbb{R}, \forall h \in [0, h^*]$

$|\Phi(x, y, h) - \Phi(x, \overline{y}, h)| \leq M\, |y - \overline{y}|$

alors la méthode (4.3) est stable.

Démonstration

Soient $y_n,\ 0 \le n \le N$, et $z_n,\ 0 \le n \le N$, vérifiant respectivement

$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$

$z_{n+1} = z_n + h\left[\Phi(x_n, z_n, h) + \epsilon_n\right]$

$z_0 = y_0 + \epsilon_0$

ϵ_n quelconque, $0 \le n \le N$

On a

$$\begin{aligned} |y_{n+1} - z_{n+1}| &\le |y_n - z_n| + h\left|\Phi(x_n, y_n, h) - \Phi(x_n, z_n, h)\right| + h|\epsilon_n| \\ &\le |y_n - z_n| + hM|y_n - z_n| + h|\epsilon_n| \\ &\le (1 + hM)|y_n - z_n| + h|\epsilon_n| \end{aligned}$$

Nous allons en déduire par récurrence que

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| \le (1 + hM)^{n+1}|y_0 - z_0| + \frac{(1 + hM)^{n+1} - 1}{M} \max_{k \le n} |\epsilon_k| \tag{4.9}$$

C'est vrai pour $n = 0$

Supposons que c'est vrai pour n. On a

$$\begin{aligned} |y_{n+1} - z_{n+1}| &\le (1 + hM)|y_n - z_n| + h|\epsilon_n| \\ &\le (1 + hM)\left[(1 + hM)^n|y_0 - z_0| + \frac{(1 + hM)^n - 1}{M} \max_{k \le n-1} |\epsilon_k|\right] + h|\epsilon_n| \\ &(1 + hM)^{n+1}|y_0 - z_0| + \frac{(1 + hM)^{n+1} - 1}{M} \max_{k \le n} |\epsilon_k| \end{aligned}$$

Ainsi, l'inéquation (4.9) est vérifiée $\forall n$.

Par ailleurs, pour $k \succ 0$, on a $1 + k \le e^k$, d'où

$|y_{n+1} - z_{n+1}| \le e^{(n+1)hM}|y_0 - z_0| + \dfrac{e^{(n+1)hM} - 1}{M} \max\limits_{k \le n} |\epsilon_k|$

Or $(n + 1)h \le (b - a); (n \le N - 1)$, d'où

$|y_{n+1} - z_{n+1}| \le e^{(b-a)M}|y_0 - z_0| + \dfrac{e^{(b-a)M} - 1}{M} \max\limits_{k \le n} |\epsilon_k|$

D'où en posant $C = \max(e^{(b-a)M}, \dfrac{e^{(b-a)M} - 1}{M})$, on obtient

$\max\limits_{0 \le n \le N} |y_n - z_n| \le C \max\limits_{k \le n-1} |\epsilon_k|$

Ce qui prouve que la méthode est stable et achève la démonstration.

Corollaire 4.2.1 (condition suffisante de convergence)

Si la fonction Φ vérifie :

1) $\Phi(x, y, 0) = f(x, y) \quad \forall(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$

2)$\exists M \succ 0$ *tel que* $|\Phi(x, y, h) - \Phi(x, \overline{y}, h)| \le M|y - \overline{y}| \ \ \forall x \in [a, b], \forall y, \overline{y} \in \mathbb{R}$,

alors la méthode (4.3) est convergente.

Démonstration

La propriété 1) entraine , d'après le théorème 4.3, que la méthode est consistante.

La propriètè 2) entraine que la méthode est stable, d'après le théorème 4.4. Le résultat découle alors du théorème 4.2.

Définition 4.2.4 (ordre de convergence)
La méthode (4.3) est dite d'ordre p, si pour toute solution Y de $y' = f(x,y)$, on a

$$\max_{0\le n\le N-1}\left|\frac{Y(x_{n+1})-Y(x_n)}{h} - \Phi(x_n, Y(x_n), h)\right| \le Kh^p$$

où K est une constante indépendante de h.
(ou encore si $\max_{0\le n\le N-1}\left|\dfrac{Y(x_{n+1})-Y(x_n)}{h} - \Phi(x_n, Y(x_n), h)\right| = \theta(h^p)$).

Théorème 4.2.4
Si la méthode (4.3) est stable et d'ordre p, alors on a

$$\exists K \succ 0 \qquad \max_{0\le n\le N}|y_n - Y(x_n)| \le Kh^p$$

Démonstration :
On a
$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$
Posons
$\epsilon_n = \dfrac{Y(x_{n+1})-Y(x_n)}{h} - \Phi(x_n, Y(x_n), h)$.
Alors, on a
$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) - h\left[\Phi(x_n, Y(x_n), h) + \epsilon_n\right]$
La méthode étant stable, on a alors
$\max_{0\le n\le N}|y_n - Y(x_n)| \le C \max_{k\le n-1}|\epsilon_n|$
où C est une constante indépendante de h. Or $\max_{0\le n\le N}|\epsilon_n| \le Kh^p$, car la méthode est d'ordre p.
Il s'en suit qu'il existe une constante $\widetilde{K} = CK$ telle que
$\max_{0\le n\le N}|y_n - Y(x_n)| \le C \max_{k\le n-1}|\epsilon_n| \le CKh^p = \widetilde{K}h^p$
Ce qui prouve le résultat énoncé et achève la démonstration.

Théorème 4.2.5 (condition nécessaire et suffisante pour que la méthode soit d'ordre $\ge p$)
On suppose que f est de classe C^p sur $[a,b]\times\mathbb{R}$ et que la fonction $\Phi, \dfrac{\partial\Phi}{\partial h}, \ldots\ldots, \dfrac{\partial^p\Phi}{\partial h^p}$ existent et sont continues sur $[a,b]\times\mathbb{R}\times[0,h^*]$. Alors la méthode (4.3) est d'ordre p, si et seulement si, pour tout $(x,y)\in[a,b]\times\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} \Phi(x,y,0) = f(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial h}(x,y,0) = \dfrac{1}{2}f^{(1)}(x,y) \\ \\ \\ \dfrac{\partial^{p-1}\Phi}{\partial h^{p-1}}(x,y,0) = \dfrac{1}{p}f^{(p-1)}(x,y) \end{cases} \tag{4.10}$$

où les fonctions $f^{(k)}$ sont définies par la relation de récurrence

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ f^{(k+1)} = \dfrac{\partial f^{(k)}}{\partial x} + f\dfrac{\partial f^{(k)}}{\partial y} \end{cases}$$

Démonstration

Posons

$$\epsilon_{n+1} = \frac{Y(x_{n+1}) - Y(x_n)}{h} - \Phi(x_n, Y(x_n), h)$$

et

$$\Psi_k(x,y) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k)}(x,y) - \frac{1}{k!}\frac{\partial^k \Phi}{\partial h^k}(x,y,0)$$

Les conditions (4.10) s'écrivent encore

$\Psi_k(x,y) = 0 \;\; \forall (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}, \;\; \forall k \in \{0,1,.....,p-1\}$

Il s'agit donc de montrer que

$\max\limits_{0 \le n \le N-1} |\epsilon_n| = \theta(h^p) \Longleftrightarrow \Psi_k(x,y) = 0 \;\; \forall (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}, \;\; \forall k \in \{0,1,.....,p-1\}$

On a, en utilisant la formule de Taylor :

$\exists \; c_n \in]x_n, x_{n+1}[$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{Y(x_{n+1}) - Y(x_n)}{h} &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{h^k}{(k+1)!} Y^{(k+1)}(x_n) + \frac{h^p}{(p+1)!} Y^{(p+1)}(c_n) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{h^k}{(k+1)!} f^{(k)}(x_n, Y(x_n)) + \frac{h^p}{(p+1)!} Y^{(p+1)}(c_n) \end{aligned}$$

(f étant de classe C^p alors Y est de classe C^{p+1})

$\exists \, \lambda \in]0, h[$ tel que

$$\Phi(x_n, Y(x_n), h) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{h^k}{k!} \frac{\partial^k \Phi}{\partial h^k}(x_n, Y(x_n), 0) + \frac{h^p}{p!} \frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}(x_n, Y(x_n), \lambda)$$

D'où

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1} &= \sum_{k=0}^{p-1} h^k \Psi_k(x_n, Y(x_n)) + \\ & h^p \left(\frac{1}{(p+1)!} Y^{(p+1)}(c_n) - \frac{1}{p!} \frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}(x_n, Y(x_n), \lambda) \right) \end{aligned} \tag{4.11}$$

a) Condition suffisante : supposons que les conditions (4.10) sont vérifiées, alors $\Psi_k(x_n, Y(x_n)) = 0$, pour $k = 0, 1, ..., p-1$ et donc

$$\max_{0 \le n \le N-1} |\epsilon_n| \le h^p \left[\max_{a \le x \le b} \left| \frac{1}{(p+1)!} Y^{(p+1)}(x) \right| + \max_{\substack{a \le x \le b \\ y \in \mathbb{R} \\ \alpha \in [0, h^*]}} \left| \frac{1}{p!} \frac{\partial^p \Phi}{\partial \alpha^p}(x, y, \alpha) \right| \right]$$

Utilisant le fait que Y est de classe C^{p+1} sur $[a,b]$ et que $\dfrac{\partial^p \Phi}{\partial \alpha^p}$ est continue sur $[a,b] \times \mathbb{R} \times [0,h^*]$, on obtient :

$\exists K \succ 0 \qquad \max\limits_{0 \le n \le N-1} |\epsilon_{n+1}| \le \, Kh^p$

Et par suite, la méthode (4.3) est d'ordre p.

b) Condition nécessaire : supposons que la méthode (4.3) est d'ordre p, et montrons que les conditions (4.10) sont vérifiées.

Raisonnons par l'absurde : supposons que les conditions (4.10) ne sont pas vérifiées. Soit k_0 le plus petit entier $\in \{0,1,...,p-1\}$ tel que $\Psi_{k_0}(x,y) \neq 0$. On a alors, d'après (4.11)

$$\epsilon_{n+1} = \sum_{k=k_0}^{p-1} h^k \Psi_k(x_n, Y(x_n)) + h^p \left(\frac{1}{(p+1)!} Y^{(p+1)}(c_n) - \frac{1}{p!} \frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}(x_n, Y(x_n), \lambda) \right)$$

D'où

$$\epsilon_{n+1} = h^{k_0} \Psi_{k_0}(x_n, Y(x_n)) + \theta(h^{k_0+1}) \tag{4.12}$$

Or la méthode étant d'ordre $\ge p$, alors on a

$$\max_{0 \le n \le N-1} |\epsilon_{n+1}| \le \, Kh^p$$

d'où

$$\max_{0 \le n \le N-1} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{h^{k_0}} \le \, Kh^{p-k_0}$$

et par suite

$$\lim_{h \to 0} \; \max_{0 \le n \le N-1} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{h^{k_0}} = 0 \tag{4.13}$$

Par ailleurs, on a

$$h \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{h^{k_0}} = \frac{b-a}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{h^{k_0}} \le (b-a) \max_{0 \le n \le N-1} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{h^{k_0}} \tag{4.14}$$

Or, on a d'après (4.12)

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} h \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{h^{k_0}} &= \lim_{h \to 0} h \sum_{n=0}^{N-1} |\Psi_{k_0}(x_n, Y(x_n)) + \theta(h)| \\ &= \lim_{N \to +\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\Psi_{k_0}(x_n, Y(x_n))| \quad (\textit{puisque} \lim_{h \to 0} h\theta(h) = 0) \\ &= \int_a^b |\Psi_{k_0}(t, Y(t))| \, dt \end{aligned}$$

car la fonction $t \to |\Psi_{k_0}(t, Y(t))|$ est continue, alors elle est Riemann intégrable. Il s'en suit, grâce à (4.13) et (4.14) que $\displaystyle\int_a^b |\Psi_{k_0}(t, Y(t))| \, dt = 0$. Et par suite, on obtient :

$$\Psi_{k_0}(t, Y(t)) = 0 \; \forall t \in [a,b] \, , \forall Y \;\; \textit{solution de } (4.1)$$

Soit $(x^*, y^*) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ quelconque. Alors, d'après le théorème 4.1, il existe une solution unique $Y(x)$ de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) & x \in [x^*, b] \\ y(x^*) = y^* \end{cases}$$

D'où

$$\Psi_{k_0}(x^*, Y(x^*)) = \Psi_{k_0}(x^*, y^*) = 0$$

Ainsi, on a

$$\forall x \in [a,b], \forall y \in \mathbb{R}, \Psi_{k_0}(x,y) = 0$$

Ce qui contredit le fait que $\Psi_{k_0}(x,y) \neq 0$. Ainsi les conditions (4.10) sont nécessairement vérifiées.

4.3 Exemples de schémas à un pas

4.3.1 Méthodes du développement à un pas

L'idée la plus simple pour construire une méthode d'ordre p est de choisir, d'après le théorème 4.6 :

$$\Phi(x,y,h) = f(x,y) + \frac{h}{2} f^{(1)}(x,y) + \frac{h^2}{3!} f^{(2)}(x,y) + ... + \frac{h^{p-1}}{p!} f^{(p-1)}(x,y)$$

Les relations (4.10) sont trivialement vérifiées.
Pour $p = 1$, on retrouve le schéma d'Euler.
Si les fonctions $f^{(k)}(x,y)$, $k = 0, 1, ..., p-1$, vérifient la condition de Lipschitz par rapport à la deuxième variable :
$\exists L_k \succ 0; \forall x \in [a,b], \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2,$

$$\left| f^{(k)}(x,y) - f^{(k)}(x,z) \right| \leq L_k |y - z| ; \quad 0 \leq k \leq p-1$$

Alors la fonction Φ vérifie aussi la condition de Lipschitz par rapport à la deuxième variable :
$\exists L \succ 0; \forall x \in [a,b], \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2,$

$$|\Phi(x,y,h) - \Phi(x,z,h)| \leq L |y - z|$$

avec
$L = L_0 + \dfrac{(b-a)}{2} L_0 + \dfrac{(b-a)^2}{3!} L_1 + ... + \dfrac{(b-a)^{p-1}}{p!} L_p.$
Et par suite, d'après le théorème 4.4, la méthode à un pas,

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$$

est stable.

Les méthodes du développement de Taylor présentent de graves inconvénients du point de vue pratique. En effet, elles utilisent les p fonctions f, $f^{(1)}, ...,$ $f^{(p-1)}$, ce qui mobilise un nombre excessif de mémoire. De plus, pour k assez grand, la complexité des expressions analytiques des fonctions $f^{(k)}$ augmente énormément.

4.3.2 Méthodes de Runge et Kutta (RK)

Elles consistent à choisir , pour p≥ 1

$\Phi(x,y,h) = \sum_{k=1}^{p} a_k V_k(x,y,h)$

où

$V_1(x,y,h) = f(x,y)$

$V_k(x,y,h) = f\left(x + \alpha_k h, y + h\sum_{j=1}^{k-1} \beta_{kj} V_j(x,y,h)\right) \qquad k \geq 2$

Les coefficients $a_k, 1 \leq k \leq p, \alpha_k$ et β_{kj} , k=1,....,p , 1$\leq j \leq k-1$, sont choisis de telle sorte que les relations (4.10) du théorème 4.6 soient vérifiées.

Exemples

1) Cas où $p = 1$

$$\Phi(x,y,h) = a_1 V_1(x,y,h) = a_1 f(x,y)$$

La condition (4.10) du théorème 4.6 s'écrit alors dans ce cas

$$\Phi(x,y,0) = a_1 f(x,y) = f(x,y)$$

D'où $a_1 = 1$ et $\Phi(x,y,h) = f(x,y)$

On retrouve la méthode d'Euler, qui est d'ordre 1.

2) Cas où $p = 2$

$$\Phi(x,y,h) = a_1 V_1(x,y,h) + a_2 V_2(x,y,h) = a_1 f(x,y) + a_2 f(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} f(x,y))$$

Les conditions (4.10) du théorème 6 s'écrivent alors dans ce cas :

$\begin{cases} \Phi(x,y,0) = (a_1 + a_2) f(x,y) = f(x,y) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial h}(x,y,0) = a_2\alpha_2 \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + a_2\beta_{21} f(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{2} f^{(1)}(x,y) \end{cases}$

$\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial h}(x,y,h) = a_2\left[\alpha_2 \dfrac{\partial f}{\partial x}(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} f(x,y)) + \beta_{21} f(x,y) \dfrac{\partial f}{\partial y}(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} f(x,y))\right]\right)$

Ainsi, la méthode est d'ordre 2, si et seulement si :

$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2\alpha_2 = a_2\beta_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$

En posant $\beta = \beta_{21} (\neq 0)$, on doit donc avoir

$\alpha_2 = \beta$, $a_2 = \frac{1}{2\beta}$, $\ a_1 = \frac{2\beta - 1}{2\beta}$

Pour $\beta = \frac{1}{2}$, cette méthode s'appelle la méthode d'Euler modifiée :
$y_{n+1} = y_n + h(f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n))$
$(\alpha_2 = \frac{1}{2}, a_2 = 1, a_1 = 0)$

Pour $\beta = 1$, cette méthode s'appelle la méthode de Heur
$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))$
$(\alpha_2 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2})$

3) Cas où $p = 4$
La méthode de Runge et Kutta classique est donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left[V_1 + 2V_2 + 2V_3 + V_4\right]$$

où
$V_1 = f(x_n, y_n)$
$V_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hV_1)$
$V_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hV_2)$
$V_4 = f(x_n + h, y_n + hV_3)$
Cette méthode est d'ordre 4 (à vérifier en exercice)

Exercice
Montrer que sous les hypothèes du théorème 4.1, les méthodes de Runge et Kutta sont stables.

Fin du chapitre 4.