Chapitre 1

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES

1.1 Introduction

La recherche des zéros d'une fonction donnée f réelle ou complexe est un problème classique qui a attiré l'attention des mathématiciens depuis plusieurs siècles. En général, il n'existe pas de formules donnant la valeur exacte de ces zéros, ou bien ces formules sont trop compliquées.
On a alors recours à des méthodes numériques d'approximation des solutions. Ces méthodes sont nombreuses et variées et sont généralement itératives : partant d'une estimation initiale x_0, on construit une suite numérique $x_1, x_2, ...x_n, ...$, où x_i est calculé à partir de x_{i-1}, qui converge vers une solution α de l'équation $f(x) = 0$.
Dans ce chapitre, nous étudierons quelques unes de ces méthodes. Nous tacherons, pour chaque méthode, de :
1/ décrire l'algorithme de construction de la suite (x_n) ;
2/ chercher dans quelles conditions, la suite(x_n) converge vers un zéro α de f, ainsi que la rapidité de cette convergence.
En liaison avec cette notion de rapidité de la convergence, on donne la définition suivante :

Définition 1.1.1
On dira qu'une méthode itérative est d'ordre p, pour la recherche d'un zéro α de f si la suite (x_n) converge vers α et si

$$|x_{n+1} - \alpha| = O(|x_n - \alpha|^p)$$

(i.e. $\dfrac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p}$ reste borné pour n assez grand).

1.2 La méthode des Dichotomies

Cette méthode dérive du théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème 1.2.1
Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si $f(a).f(b) \prec 0$, alors il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Démonstration (dichotomies successives)
Posons $[a_0, b_0] = [a, b]$ et $x_0 = \dfrac{(a_0 + b_0)}{2}$ (x_0 est le milieu du segment $[a_0, b_0]$).
On a nécessairement l'une des conditions suivantes :
* $f(x_0) = 0$ et alors $\alpha = x_0$ est la solution cherchée.
* $f(a_0) \times f(x_0) \prec 0$ et on posera alors $[a_1, b_1] = [a_0, x_0]$
* $f(b_0) \times f(x_0) \prec 0$ et on posera alors $[a_1, b_1] = [x_0, b_0]$
En réitérant le même raisonnement pour $[a_1, b_1]$ ....etc, on aura :
* ou bien : il existe $n \in I\!\!N$ tel que $f(x_n) = 0$, avec $x_n = \dfrac{(a_n + b_n)}{2}$ et alors $\alpha = x_n$ est la solution cherchée .
*ou bien : on construit une suite de segments emboités $[a_n, b_n]$ et une suite (x_n) telle que pour tout $n \in I\!\!N$:
- $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots\ldots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \ldots$

$$x_n = \frac{(a_n + b_n)}{2}$$

$$b_n - a_n = \frac{(b_0 - a_0)}{2^n}$$

$$f(a_n) \times f(b_n) \prec 0 \tag{1.1}$$

Il existe donc α tel que

$$\{\alpha\} = \cap_{n=1}^{n=\infty} [a_n, b_n] \subset]a, b[$$

On a alors :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha$$

Et d'après (4.1) et puisque la fonction f est continue, on aura

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \times f(b_n) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) \times \lim_{n \to +\infty} f(b_n) = f(\alpha)^2 \leq 0$$

soit $f(\alpha) = 0$

Remarque 1.1
L'intervalle initial $[a_0, b_0]$, avec la condition $f(a_0) \times f(b_0) \prec 0$, contient un nombre impair de solutions de l'équation $f(x) = 0$. Ce nombre diminue d'une itération à une autre jusqu'à 1.

L'algorithme de cette méthode s'écrit :

Algorithme 1.1
On choisit deux réels a_0 et b_0 tels que $f(a_0) \times f(b_0) \prec 0$,
un réel $\epsilon \succ 0$ assez petit et un nombre entier $Nmax$.

Faire
Répèter
$x_n = \dfrac{(a_n + b_n)}{2}$
si $f(a_n) \times f(x_n) \prec 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$
sinon $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$
jusqu'à $f(x_n) = 0$ ou $|x_n - a_n| \preceq \epsilon$ ou $n = Nmax$

$Nmax$ est le nombre maximum d'itérations.

Dans cet algorithme :
* f désigne une fonction numérique donnée, définie et continue sur le segment $[a_0, b_0]$
* ϵ désigne l'erreur absolue tolérée sur la valeur approchée de la solution x_n de l'équation $f(x) = 0$.

D'après la démonstration du Théorème 1.1, la méthode des dichotomies est toujours convergente. Mais cette convergence est en général assez lente. En effet, pour être sûr d'obtenir une approximation d'une solution α avec une erreur absolue inférieure à ϵ, le nombre d'itérations nécessaires n vérifie :

$$(n+1)\log 2 \geq \log \frac{b_0 - a_0}{\epsilon}$$

puisque

$$|x_n - \alpha| \preceq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$$

En particulier : si $b_0 - a_0 = 1$ et $\epsilon = 10^{-5}$ on a $n = 5$.

1.3 La méthode Regula-Falsi ou fausse position

Cette méthode ne diffère de la précédente que par le choix de x_n à chaque itération. Au lieu de prendre le milieu du segment $[a_n, b_n]$, on choisit l'abscisse du point d'intersection avec l'axe des abscisses, de la corde joignant les deux points de la courbe f d'abscisses respectives a_n et b_n. Sachant que l'équation de la droite qui passe par les deux points $(a_n, f(a_n))$,$(b_n, f(b_n)$ est

$$y - f(a_n) = \frac{(x - a_n)(f(b_n) - f(a_n))}{b_n - a_n}$$

et en prenant $y = 0$, on obtient :

$$x_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} \tag{1.2}$$

$$\frac{(x_n - a_n)}{b_n - a_n} = \frac{f(a_n)}{f(a_n) - f(b_n)} \tag{1.3}$$

$$f(a_n) + \frac{(x_n - a_n)(f(b_n) - f(a_n))}{b_n - a_n} = 0 \tag{1.4}$$

$$f(a_n) \times f(b_n) \prec 0 \tag{1.5}$$

et $x_n \in]a_n, b_n[$
En effet : comme $f(a_n) \times f(b_n) \prec 0$, on peut avoir $f(a_n) \prec 0$ et donc $f(b_n) \succ 0$ ou bien $f(a_n) \succ 0$ et $f(b_n) \prec 0$.
Choisissons par exemple $f(a_n) \prec 0$ et donc $f(b_n) \succ 0$ d'où $f(a_n)$ et $f(a_n) - f(b_n)$ sont de même signe et donc $\dfrac{f(a_n)}{f(a_n) - f(b_n)} \geq 0$ et par suite puisqe $b_n - a_n \geq 0$ de (4.3) on tire que $x_n \geq a_n$. De même $f(a_n) \leq f(a_n) - f(b_n)$ et donc $0 \leq \dfrac{f(a_n)}{f(a_n) - f(b_n)} \leq 1$ et de (4.3) on tire que $0 \leq \dfrac{x_n - a_n}{b_n - a_n} \leq 1$ et donc $x_n \leq b_n$
L'algorithme s'écrit alors :

Algorithme 1.2
On choisit deux réels a_0 et b_0 tels que $f(a_0) \times f(b_0) \prec 0$,
un réel $\epsilon \succ 0$ assez petit et un nombre entier $Nmax$
Faire
$n = 0$
Répèter
$x_n = \dfrac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$
si $f(a_n) \times f(x_n) \prec 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$
sinon $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$
$n := n + 1$
jusqu'à $f(x_{n-1}) = 0$ ou $|b_{n-1} - a_{n-1}| \preceq \epsilon$ ou $n - 1 = N\max$

Remarque 1.2
Dans le but d'étudier la convergence de la méthode, remarquons d'abord que, d'après la construction des suites (a_n), (b_n) et (x_n), on a :
1/ La suite (a_n) est croissante et majorée par b_0 et la suite (b_n) est décroissante minorée par a_0 et on a :
$\forall n \in I\!N$, $a_0 \leq ...... \leq a_n \leq x_n \leq b_n \leq ......b_0$
Les suites (a_n) et (b_n) sont donc convergentes. Posons $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ et $b = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$
2/ Il existe
*- ou bien : une sous-suite de la suite (x_n) et une sous-suite de la suite (a_n) qui coincident.
*- ou bien : une sous-suite de la suite (x_n) et une sous-suite de la suite (b_n) qui coincident.
Puisque $\forall n \in I\!N$, $x_n = a_{n+1}$ ou bien $x_n = b_{n+1}$

ceci entraine que, dans le cas où la suite (x_n) converge vers L, on a nécessairement $L = a$ ou $L = b$.

Théorème 1.3.1

Soit $f : [a_0, b_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue telle que $f(a_0) \times f(b_0) \prec 0$ et supposons que f admet un zéro unique α dans $[a_0, b_0]$ ($f(\alpha) = 0$).
Alors la suite (x_n) définie dans l'algorithme 1.2 converge vers α.

Démonstration

D'après la remarque 1.2, les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et convergent respectivement vers a et b. D'après (4.7) et la continuité de f, on obtient :

$$f(a) \times f(b) \leq 0 \tag{1.6}$$

Deux cas peuvent se présenter :
1er cas : $f(a) = f(b)$ et d'après (4.8) $f(a)^2 = f(b)^2 \leq 0$ et donc $f(a) = f(b) = 0$. Donc les réels a, b sont des zéros de la fonction f, et comme par hypothèse la fonction f admet une seule racine α dans $[a_0, b_0]$, alors $a = b = \alpha$. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes et puisque elles encadrent la suite (x_n) celle-ci converge vers la même limite α.
2ème cas :$f(a) \neq f(b)$. D'après (4.2) la suite (x_n) converge vers une limite L qui vérifie puisque f est continue :

$$L = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \tag{1.7}$$

Or, compte tenu de la remarque 1.2, la limite L est égale à a ou à b. Et de l'égalité (1.7) on tire :
* Si $L = a$ (alors $L \neq b$) on obtient : $L = \dfrac{Lf(b) - bf(L)}{f(b) - f(L)}$
d'où :
$-Lf(L) = -bf(L)$ et comme $L \neq b$ alors $f(L) = 0$. L est donc un zéro de la fonction f et par suite $L = \alpha$.
* Si $L = b$ (alors $L \neq a$) on obtient : $L = \dfrac{af(L) - Lf(a)}{f(L) - f(a)}$ d'où $Lf(L) = af(L)$ et comme $L \neq a$; ceci entraine $f(L) = 0$. L est donc un zéro de la fonction f et par suite $L = \alpha$.

Théorème 1.3.2 *(ordre de la méthode Regula-Falsi)*

Soit $f : [a_0, b_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue telle que $f(a_0) \times f(b_0) \prec 0$ et supposons que f admet un zéro unique α dans $[a_0, b_0]$ ($f(\alpha) = 0$).
Si f est deux fois dérivables sur $[a_0, b_0]$ et est telle que $f'' \geq 0$ (ou bien $f'' \leq 0$) sur $]a_0, b_0[$.
Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = c$$

La méthode Regula -Falsi est à convergence linéaire (d'ordre 1) dans ce cas.

Pour la démonstration du théorème on aura besoin du

Lemme 1.3.1

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur $[a,b]$, deux fois dérivables sur $]a,b[$ et soit $c \in]a,b[$. Alors il existe un réel $\sigma \in]a,b[$ tel que :

$$(b-a)(f(c)-f(a))-(c-a)(f(b)-f(a))=(c-a)(c-b)(b-a)\frac{f''(\sigma)}{2}$$

Démonstration du lemme 1.1

Soit h une fonction définie sur $[a,b]$ par :

$$h(x)=(b-a)(f(x)-f(a))-(x-a)(f(b)-f(a))-M(x-a)(x-b)(b-a)$$

où M est un réel choisi tel que $h(c)=0$, ce qui donne

$$M=\frac{(b-a)(f(c)-f(a))-(c-a)(f(b)-f(a))}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

On a alors : $h(a)=h(b)=h(c)=0$ et h est deux fois dérivable sur $]a,b[$

D'après le lemme de Rolle :

* Il existe $\lambda_1 \in]a,c[$ tel que $h(c)-h(a)=h'(\lambda_1)(c-a)$ d'où $h'(\lambda_1)=0$.

* Il existe $\lambda_2 \in]c,b[$ tel que $h(b)-h(c)=h'(\lambda_2)(b-c)$ d'où $h'(\lambda_2)=0$

* Il existe $\sigma \in]\lambda_1,\lambda_2[$ tel que $h'(\lambda_2)-h'(\lambda_1)=h''(\sigma)(\lambda_2-\lambda_1)$ d'où $h''(\sigma)=0$

Comme $h''(x)=(b-a)(f''(x)-2M\ )$ on tire que $f''(\sigma)=2M$ et donc

$$(b-a)(f(c)-f(a))-(c-a)(f(b)-f(a))=(c-a)(c-b)(b-a)\frac{f''(\sigma)}{2}$$

Démonstration du théorème 1.3

Supposons, pour fixer les idées que $f(a_0)\prec 0 \prec f(b_0)$ et que $f''\geq 0$ sur $]a_0,b_0[$.

Comme $x_n \in]a_n,b_n[$ on peut appliquer le lemme 1.1 en prenant $c=x_n$, $a=a_n$ et $b=b_n$ il existe alors $\sigma_n \in]a_n,b_n[$ tel que :

$$(b_n-a_n)(f(x_n)-f(a_n))-(x_n-a_n)(f(b_n)-f(a_n))=(x_n-a_n)(x_n-b_n)(b_n-a_n)\frac{f''(\sigma_n)}{2}$$

Et puisque d'après (1.4) on a

$$f(a_n)+\frac{(x_n-a_n)(f(b_n)-f(a_n))}{b_n-a_n}=0$$

on obtient :

$$f(x_n)=(x_n-a_n)(x_n-b_n)\frac{f''(\sigma_n)}{2}$$

on conclut donc que :

pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(x_n)\ \leq 0$ et comme $f(b_0)\succ 0$ l'algorithme 1.2 nous donne pour passer de l'itération n à l'itération $n+1$

$b_{n+1}=b_n$ et par suite $b_{n+1}=b_0$ et $a_{n+1}=x_n$

et

$$x_{n+1}=\frac{a_{n+1}f(b_0)-b_0f(a_{n+1})}{f(b_0)-f(a_{n+1})}$$

D'où, en remplaçant a_{n+1} par x_n, on obtient $x_{n+1} = g(x_n)$ où g est une fonction définie par

$$g(x) = \frac{xf(b_0) - b_0 f(x)}{f(b_0) - f(x)}$$

On constate que la fonction g est une fonction continue et deux fois dérivables sur $]a_0, b_0[$ et par passage à la limite dans l'équation $x_{n+1} = g(x_n)$ on aura $\alpha = g(\alpha)$ où α est le zéro de f.

En écrivant $x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha)$ et en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction g, il existe $c_n \in]x_n, \alpha[$ ou $]\alpha, x_n[$ tel que :

$x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = (x_n - \alpha)g'(c_n)$

d'où $\dfrac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = |g'(c_n)|$ et par passage à la limite, puisque g' est continue, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = |g'(\alpha)| = \left|1 + (\alpha - b)\frac{f'(\alpha)}{f(b)}\right|$$

.

Notons que la fonction f et sa dérivée seconde sont de signes opposés à l'intérieur de $]a_0, b_0[$ et donc l'une des deux suites (a_n), (b_n) de l'algorithme 1.2 est constante, et on obtient :

Algorithme 1.3

On choisit deux réels a_0 et b_0 tels que $f(a_0) \times f(b_0) \prec 0$,

un réel $\epsilon \succ 0$ assez petit, une variable entière n,

variable réelle c_0 et un nombre entier $Nmax$

Faire

(Détermination du signe de la dérivée seconde

et choix de la suite constante)

$x_0 = a_0$, $c_0 = b_0$

$n = 1$

$x_1 = \dfrac{c_0 f(x_0) - x_0 f(c_0)}{f(x_0) - f(c_0)}$

Si $f(x_1) \times f(c_0) \prec 0$ alors $c_0 = b_0$ et $x_0 = a_0$

sinon $c_0 = a_0$ et $x_0 = b_0$

Répèter

$x_{n+1} = \dfrac{c_0 f(x_n) - x_n f(c_0)}{f(x_n) - f(c_0)}$

$n := n + 1$

jusqu'à $f(x_{n-1}) = 0$ ou $|x_{n-1} - x_{n-2}| \preceq \epsilon$ ou $n - 1 = N\max$

1.4 La méthode des approximations successives

Cette méthode consiste à faire d'abord des opérations algébriques sur l'équation générale $f(x) = 0$ pour l'écrire sous la forme $x = g(x)$ où g est une fonction à déterminer.

Par exemple, si $f(x) = x^3 + x - 1$, on peut choisir :

$$g(x) = 1 - x^3, g(x) = \frac{1}{1 + x^2}, g(x) = (1 - x)^{\frac{1}{3}}$$

.
ou plus généralement :

$$g(x) = x + \frac{f(x)}{h_2(x)}$$

où h_2 est une fonction qui ne s'annule pas.
La recherche d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ équivaut alors à la recherche d'un point fixe de g (i .e α tel que $g(\alpha) = \alpha$).

L'algorithme de la méthode des approximations successives est le suivant :
partant d'une estimation initiale x_0 de la solution α, on construit la suite (x_n), en posant

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

On voit alors que, lorsque cette suite est bien définie et convergente, sa limite est un point fixe de g, si g est continue.

Algorithme 1.4
On choisit un réel x_0, une précision ϵ et un entier $Nmax$.
$n = 0$
Répèter
$x_{n+1} = g(x_n)$
$n = n + 1$
jusqu' à $|x_n - x_{n-1}| \prec \epsilon$ ou $n - 1$ =Nmax

Cet algorithme prévoit un nombre d'itérations à ne pas dépasser ($Nmax$), fixé à priori à l'avance, car, comme nous allons le voir, la convergence de la suite n'est pas toujours assurée.

Théorème 1.4.1
Soit $g : [a, b] \to [a, b]$ telle que $g([a, b]) \subset [a, b]$ et g est une fonction contractante. (i. e. il existe $\lambda \in [0, 1[$ tel que : $|g(x) - g(y)| \leq \lambda\, |x - y|$, $\forall x, y \in [a, b]$)
Alors, pour tout choix de $x_0 \in [a, b]$, la suite définie par : $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers l'unique point fixe α de g.

Démonstration :
1/Existence du point fixe.
Posons $h(x) = g(x) - x$, alors h est une fonction continue sur $[a, b]$ et $h(a) \times h(b) \leq 0$ et d'après le théorème 1.1 il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $h(\alpha) = 0$ et donc $g(\alpha) = \alpha$.
2/Unicité du point fixe.
Supposons qu'il existe deux points fixes différents α et β de g, alors $g(\alpha) = \alpha$ et $g(\beta) = \beta$.
$|\alpha - \beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| \leq \lambda\, |\alpha - \beta|$
comme $\lambda \in [0, 1[$ alors on a une contradiction d'où $\alpha = \beta$.
3/Convergence de la suite (x_n).

Pour étudier la convergence de la suite on va utiliser le critère de Cauchy. Mais, tout d'abord, regardons $|x_n - x_{n-1}|$.
$|x_n - x_{n-1}| = |g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})| \leq \lambda\,|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \ldots\ldots \leq \lambda^{n-1}\,|x_1 - x_0|$
D'où pour tout n , m entiers $(m \geq n)$ on a :

$$|x_n - x_m| \leq (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \ldots\ldots\lambda^n)\,|x_1 - x_0| = \lambda^n \frac{1-\lambda^{m-n}}{1-\lambda}\,|x_1 - x_0| \qquad (1.8)$$

puisque $\lambda \in [0,1[$ $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - x_m| = 0$ quand $n, m \to +\infty$
On conclut que la suite (x_n) est de Cauchy dans $[a,b]$ donc elle est convergente. Soit L sa limite. En passant à la limite dans $x_{n+1} = g(x_n)$ et puisque g est continue L vérifie $g(L) = L$, on obtient donc $L = \alpha$. De plus, si on fixe n et on fait tendre m vers l'infini dans (4.9)

$$|x_n - \alpha| \leq \lambda^n \frac{1}{1-\lambda}\,|x_1 - x_0|$$

On constate que la convergence est d'autant plus rapide que λ est proche de zéro.

Corollaire 1.4.1
Le résultat du théorème 1.4 reste valable si l'on remplace l'hypothèse "g contractante" par :
g de classe C^1 sur $[a,b]$ et $|g'(x)| \prec 1, \forall x \in [a,b]$.

Démonstration
g est de classe C^1 donc la fonction g' est continue sur $[a,b]$ et de même pour la fonction $|g'|$ et donc atteint son maximum sur $[a,b]$. Soit $\lambda = \max|g'(x)|$ alors d'après l'hypothèse $\lambda \prec 1$.
Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction g en deux points x, y de $[a,b]$:

$$g(x) - g(y) = g'(\zeta)(x-y)$$

où $\zeta \in]x,y[$
d'où

$$|g(x) - g(y)| \leq \left|g'(\zeta)\right| |x-y| \prec \lambda \ |x-y|$$

donc la fonction g est contractante et on peut appliquer le théorème 1.4.

Corollaire 1.4.2
Soit g une fonction numérique admettant un point fixe α. Supposons que g est continuement dérivable au point α. Alors :
1/ Si $|g'(\alpha)| \prec 1$, la méthode des approximations successives est localement convergente, i.e. il existe un voisinage V de α tel que, pour tout choix $x_0 \in V$, la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers α .
2/Si $|g'(\alpha)| \succ 1$, la méthode des approximations successives est divergente pour tout x_0.

Démonstration

1/La fonction g' est continue au point α, il existe alors un voisinage de α, $V = [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$ avec $\epsilon \succ 0$ tel que $|g'(x)| \prec 1$, $\forall x \in V$ et $g(V) \subset V$, on peut donc appliquer le corollaire 1.1.

2/ Si $|g'(\alpha)| \succ 1$ et puisque g' est continue au point α il existe alors un voisinage V de α et un réel $r \succ 1$ tel que $|g'(x)| \succ r$, $\forall x \in V$.

Supposons que la suite (x_n) converge vers α il existe alors un entier N tel que : $\forall n \geq N$ $x_n \in V$ et par suite $|g'(x_n)| \succ r$.

Appliquons maintenant le théorème des accroissements finis on a :

pour tout $n \geq N$

$$|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| \geq \left|g'(\xi_n)\right| |x_n - \alpha| \geq r\,|x_n - \alpha| \geq ...... \geq r^{n-N}\,|x_N - \alpha|$$

.

Si on passe à la limite on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} |x_{n+1} - \alpha| = +\infty$,

ce qui est absurde, la méthode est donc divergente (sauf si accidentellement $x_N = \alpha$).

Remarque 1.3

Le cas $|g'(x)| = 1$ est le plus délicat à traiter car on peut avoir convergence ou divergence

Théorème 1.4.2

Soit g une fonction numérique admettant un point fixe α. Supposons qu'il existe $p \in I\!N^*$ tel que g soit de classe C^p au voisinage de α et que $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$, $g^{(k)}(\alpha) = 0$ $\forall k \in I\!N^*$ et $k \leq p-1$ ($g^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de g).

Alors : si la méthode des approximations successives pour la recherche du point fixe α converge, elle est d'ordre p.

En particulier, si $g'(\alpha) \neq 0$, la convergence est d'ordre1.

Démonstration

Soit x_{n+1} et x_n deux éléments de la suite (x_n) et appliquons la formule de Taylor à la fonction g aux points x_{n+1} et α sachant que $x_{n+1} = g(x_n)$ et $\alpha = g(\alpha)$ on obtient :

$$x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - \alpha = \sum_{k=1}^{p} (x_n - \alpha)^k \frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!} + (x_n - \alpha)^p \epsilon(x_n - \alpha)$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \epsilon(x_n - \alpha) = 0$.

D'où

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|(x_n - \alpha)^p|} = \left|\frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!}\right|$$

ce qui prouve que $|x_{n+1} - \alpha| = o(|x_{n+1} - \alpha|^p)$ et donc la méthode des approximations successives est d'ordre p.

1.5 La méthode de Newton

Soit f une fonction de classe C^2 dans un voisinage d'une racine simple α de l'équation $f(x) = 0$. La méthode de Newton consiste à construire, à partir de x_0, une suite (x_n) tel que x_{n+1} est l'intersection de la tangente à la courbe au point $(x_n, f(x_n))$ et l'axe des x.
d'où

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Et on obtient l'algorithme suivant :

Algorithme 1.5
On choisit x_0, une précision ϵ, une précision ϵ',
un entier $Nmax$ et une variable x, une variable entière n
$n = 0$
Répèter
Si $f'(x_n) = 0$ alors afficher "la méthode ne converge pas" fin
$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
$n = n + 1$
jusqu'à $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$ ou / et $|f(x_n)| \leq \epsilon'$ ou $n - 1 = Nmax$.

Remarquons que la méthode de Newton peut être considérée comme une méthode des approximations successives, si l'on choisit $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Théorème 1.5.1
Soit f une fonction de classe C^2 dans un voisinage V d'une racine simple α de l'équation $f(x) = 0$. La méthode de Newton est localement convergente et est à convergence au moins quadratique (d'ordre 2).

Démonstration
On a $x_{n+1} = g(x_n)$ avec

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

d'où

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

et donc $g'(\alpha) = 0$ car $f(\alpha) = 0$
En appliquant le corollaire 1.2, il existe un voisinage $U \subset V$ de α tel que $\forall x_0 \in U$, la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ est convergente vers α.
Si on applique la formule de Taylor aux points x_n, α, il existe un ζ_n compris entre x_n et α tel que

$$f(x_n) - f(\alpha) = (x_n - \alpha)f'(x_n) + (x_n - \alpha)^2 \frac{f''(\zeta_n)}{2}$$

d'où

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x_n - \alpha)^2 \frac{f''(\zeta_n)}{2f'(x_n)}$$

$$\alpha - x_{n+1} = (x_n - \alpha)^2 \frac{f''(\zeta_n)}{2f'(x_n)}$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|^2} = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right|$$

et la méthode de Newton est d'ordre 2 .

1.6 La méthode de la sécante

Cette méthode peut être considérée comme une variante de la méthode Regula Falsi si on remplaçe les points a_n et b_n par les points x_n et x_{n-1}. Elle peut être considérée aussi comme une variante de la méthode de Newton si on approche $f'(x_n)$ par $\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$.
Partant de x_0 et x_1, on définit la suite (x_n) par :

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{1.9}$$

Remarqons que x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection, avec l'axe des abscisses, de la droite joignant les points de la courbe de f, d'abscisses respectives x_n et x_{n-1}.

Algorithme 1.6
On se donne x_0 et x_1 deux réels, et deux précisions ϵ, ϵ'
et un entier $Nmax$
Répèter

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

jusqu'à $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$ et / ou $|f(x_{n+1})| \leq \epsilon'$ ou $n \geq Nmax$.

Lemme 1.6.1
Soit (x_n) la suite définie par (4.12) et supposons que f est de classe C^2 au voisinage d'un zéro α de f. Alors :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel c_n compris entre x_{n-1} et x_n et un réel d_n élément du plus plus petit intervalle I_n contenant x_n, x_{n-1} et α tel que :

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(x_n - \alpha)(x_{n-1} - \alpha) \frac{f''(d_n)}{2f'(c_n)} \tag{1.10}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} x_{n+1}-\alpha &= \frac{x_{n-1}f(x_n)-x_nf(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}-\alpha \\ &= (x_n-\alpha)-f(x_n)\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})} \\ &= (x_n-\alpha)(1-\frac{g(x_n,\alpha)}{g(x_n,x_{n-1})}) \\ &= (x_n-\alpha)(x_{n-1}-\alpha)(1-\frac{h(x_n,x_{n-1},\alpha)}{g(x_n,x_{n-1})}) \end{aligned}$$

en posant

$g(x,y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$

et

$h(x,y,z)=\dfrac{[(z-x)(f(x)-f(y))-(x-y)(f(z)-f(x))]}{(x-y)(z-x)(y-z)}$

D'après la formule des accroissements finis, il existe c_n compris entre x_n et x_{n-1} tel que

$g(x_n,x_{n-1})=\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}=f'(c_n)$

D'après le lemme 1.1, il existe $d_n\in I_n$ tel que :

$h(x_n,x_{n-1},\alpha)=\dfrac{f''(d_n)}{2}$

D'où

$x_{n+1}-\alpha=(x_n-\alpha)(x_{n-1}-\alpha)\dfrac{f''(d_n)}{2f'(c_n)}$.

Théorème 1.6.1

Supposons que f est de classe C^2 au voisinage d'une racine simple de l'équation $f(x)=0$ [$f(\alpha)=0, f'(\alpha)\neq 0$].

Alors la méthode de la sécante est localement convergente [i.e il existe un voisinage V de α, tel que, pour tout x_0 et x_1 dans V, la suite (x_n) définie par (4.12) converge vers α].

De plus, l'ordre de convergence est $p=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Démonstration

Puisque $f'(\alpha)\neq 0$, il existe un voisinage de α où f' ne s'annule pas, il existe donc ϵ, $0\prec\epsilon\prec 1$ et $V_1=\{x\,/\,|x-\alpha|\prec\epsilon\}$ tel que $\forall x\in V_1\ f'(x)\neq 0$.

Comme f est de classe C^2 on peut définir : $c_1=\inf|f'(x)|$, $c_2=\sup|f''(x)|$ pour x dans V_1 et on pose

* $c=\dfrac{c_2}{c_1}+1$
* $V=\left\{x,|x-\alpha|\prec\frac{\epsilon}{c}\right\}\subset V_1$
* $p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la racine positive de l'équation $p^2-p-1=0$
* Choisissons x_0,x_1 dans V. On a alors :
* $\forall n\in I\!N$, $x_n\in V$.

Ceci se démontre par récurrence. En effet $x_0,x_1\in V$, supposons alors que $x_n\in V$ et $x_{n-1}\in V$ pour $n\in I\!N^*$.

D'après (4.13), il existe c_n, $d_n\in V$ tels que :

$$x_{n+1}-\alpha=(x_n-\alpha)(x_{n-1}-\alpha)\frac{f''(d_n)}{2f'(c_n)}.$$

d'où

$$\begin{aligned} |x_{n+1}-\alpha| &\leq |x_n-\alpha|\,|x_{n-1}-\alpha| \left|\tfrac{f''(d_n)}{2f'(c_n)}\right| \leq c\,|x_n-\alpha|\,|x_{n-1}-\alpha| \\ &\leq c\frac{\epsilon}{c}\frac{\epsilon}{c} = \frac{\epsilon^2}{c} \prec \frac{\epsilon}{c} \end{aligned} \tag{1.11}$$

donc $x_{n+1} \in V$.

*Démontrons que la suite (y_n) définie par $y_n = c\,|x_n-\alpha|$ est convergente vers zéro.

Posons $\lambda = \max(y_0, y_1)$ où $y_0 = c\,|x_0-\alpha|$ et $y_1 = c\,|x_1-\alpha|$ et $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Alors $y_0 \leq \lambda^{p^0}$ et $y_1 \leq \lambda^{p^1}$ (facile à vérifier) et $\lambda \prec \epsilon \prec 1$

et

$$\forall n \in I\!N, \quad y_n \leq \lambda^{p^n} \tag{1.12}$$

Ceci se démontre par récurence. En effet, supposons que

$y_n \leq \lambda^{p^n}$ et $y_{n-1} \leq \lambda^{p^{n-1}}$

on a $y_{n+1} = c\,|x_{n+1}-\alpha| \leq c^2\,|x_n-\alpha|\,|x_{n-1}-\alpha|$ d'après (1.11)

d'où

$$\begin{aligned} y_{n+1} &\leq y_n\, y_{n-1} \\ &\leq \lambda^{p^n}\lambda^{p^{n-1}} = \lambda^{p^n+p^{n-1}} \end{aligned} \tag{1.13}$$

D'où $y_{n+1} \leq \lambda^{p^{n-1}(p+1)}$

Comme $p^2 = p+1$ on a

$y_{n+1} \leq \lambda^{p^{n+1}}$

On en déduit, puisque $\lambda \prec 1$, que la suite y_n est convergente vers zéro et par suite la suite x_n converge vers α.

* D'après (1.13) on a : $\forall n \in I\!N$, $y_{n+1} \leq y_n\, y_{n-1}$.

D'où $\dfrac{y_{n+1}}{y_n^p} \leq y_n^{1-p} y_{n-1}$ et d'après (1.12) on obtient :

$\dfrac{y_{n+1}}{y_n^p} \leq (\lambda^{p^n})^{1-p}\lambda^{p^{n-1}} = \lambda^{p^n-p^{n+1}+p^{n-1}} = \lambda^{p^{n-1}(p+1-p^2)} \leq \lambda^0 = 1$

(car $p^2-p-1=0$) d'où

$$\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} \leq c^{p-1}$$

et donc la méthode est au moins d'ordre $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Démontrons maintenant que l'ordre de convergence est exactement p.

Posons $y_n = x_n - \alpha$. De l'expression $x_{n+1}-\alpha = \dfrac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})} - \alpha$ on tire :

$$y_{n+1} = \frac{y_{n-1}f(x_n) - y_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})} \tag{1.14}$$

En supposant que $f'(\alpha) \neq 0$ et $f''(\alpha) \neq 0$, la formule de Taylor-Lagrange nous donne au voisinage de α :

$f(x_{n)} = (x_n-\alpha)f'(\alpha) + \dfrac{(x_{n-}\alpha)^2}{2}f''(\alpha) + (x_n-\alpha)^2\zeta(x_n-\alpha)$

où $\zeta(x_n-\alpha) \rightarrow 0$ quand $x_n-\alpha \rightarrow 0$

En écrivant cette formule aux points x_n et x_{n-1} et en utilisant (1.14) on obtient :

$$y_{n+1} \sim y_n y_{n-1} \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \quad quand\ n \to +\infty \tag{1.15}$$

D'autre part, la méthode de la sécante est dite d'ordre p si $|y_{n+1}| = O(|y_n|^p)$ ou encore s'il existe une constante C tel que $\frac{|y_{n+1}|}{|y_n|^p} \sim C$ quand $n \to +\infty$ d'où $|y_{n+1}| \sim C\,|y_n|^p$, $|y_n| \sim C\,|y_{n-1}|^p$ et par suite $|y_{n+1}| \sim C^{p+1}\,|y_{n-1}|^{p^2}$ et en utilisant (1.15) on obtient :

$$C^p\,|y_{n-1}|^{p^2} \sim |y_{n-1}|^p\,|y_{n-1}| \left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|$$

et donc

$$C^p\,|y_{n-1}|^{p^2-p-1} \left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|^{-1} \sim 1$$

et ceci pour toute fonction f et pour tout n assez grand d'où $p^2 - p - 1 = 0$ et donc $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1.7 Résolution d'un système non linéaire

On considère le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{array} \right. \tag{1.16}$$

où les fonctions f_i sont des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe C^2 dans un voisinage V d'une racine $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$, du système (1.16) (i e $f_i(\alpha) = 0$ pour $i = 1$ jusqu'à n).
Posons $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$, alors le système peut s'écrire sous la forme :

$$F(X) = 0 \tag{1.17}$$

Supposons qu'on puisse faire des opérations algébriques sur la fonction F pour l'écrire sous la forme $F(X) = X - G(X)$ avec $G = (g_1, g_2, ..., g_n)$, où les g_i sont des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Le système (1.16) s'écrit :

$$X = G(X) \tag{1.18}$$

et si α est solution de (1.16), alors α est solution de (1.18) et α est un point fixe de la fonction G .
Pour chercher la solution de (1.16) on se ramène à la recherche du point fixe de la fonction G.
Pour cela, on construit l'algorithme suivant :

Algorithme 1.7

X_0 donné

$X_{n+1} = G(X_n)$

Etudions la convergence de cet algorithme :

Théorème 1.7.1

Soit U un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ et G une fonction définie sur U telle que :

1) $G(U) \subset U$ (i.e. $\forall X \in U\ G(X) \in U$)

2/Il existe une constante $K : 0 \leq K \prec 1$ telle que

$$\forall X \in U \quad \forall Y \in U \quad \|G(X) - G(Y)\| \leq K \|X - Y\|$$

où $\|.\|$ désigne la norme dans $\mathbb{R}^n$.

Alors l'algorithme défini par

$$X_0 \in U$$
$$X_{n+1} = G(X_n)$$

converge vers $\alpha \in U$ (α vérifie $G(\alpha) = \alpha$).

Démonstration

La démonstration est analogue à celle que l'on a faite dans le cas d'une équation.

Algorithme 1.8

On se donne X_0, une précision ϵ

et un entier Nmax

Répèter

$X_{n+1} = G(X_n)$

jusqu'à $\|X_{n+1} - X_n\| \leq \epsilon$ ou $n \succ N\max$.

Théorème 1.7.2

Soit U un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ et G une fonction définie sur U de classe C^1 (i.e. toutes les fonctions partielles g_i sont de classe C^1) telle que :

$$\max_{X \in U} \sum_{i,j=1}^{n} g'^2_{j,x_i}(X)) \prec 1$$

où $g'_{j,x_i}(X) = \dfrac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)$. Alors l'algorithme défini par :

$$\begin{cases} X_0 \in U \\ X_{n+1} = G(X_n) \end{cases}$$

converge vers $\alpha \in U$ (α vérifie $G(\alpha) = \alpha$)

Démonstration

Remarquons que, puisque les fonctions partielles g_i sont de classe C^1, les dérivées partielles d'ordre 1 sont continues et le $\max\limits_{X\in U}\sum\limits_{i,j=1}^{n} g'^2_{j,x_i}(X)$ existe.

soit $K=\max\limits_{X\in U}\sum\limits_{i,j=1}^{n} g'^2_{j,x_i}(X)$ ce maximum.

Soient X et Y deux éléments de U. Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction G aux points X et Y.

Il existe $\xi\in U$ tel que $G(X)-G(Y)=G'(\xi)(X-Y)$

où $G'(\xi)$ est la dérivée de G au point ξ, c'est donc une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ représentée par la matrice suivante :

$$DG=\begin{pmatrix} g'_{1,x_1}(\xi) & g'_{2,x_1}(\xi) & .... & g'_{n,x_1}(\xi)\\ g'_{1,x_2}(\xi) & g'_{2,x_2}(\xi) & .... & g'_{n,x_2}(\xi)\\ . & . & . & .\\ g'_{1,x_n}(\xi) & g'_{2,x_n}(\xi) & .... & g'_{n,x_n}(\xi)\end{pmatrix}$$

et on a

$$g_i(X)-g_i(Y)=\sum_{j=1}^{n} g'_{j,x_i}(\xi)(x_j-y_j)$$

et donc

$$\|G(X)-G(Y)\|^2=\sum_{i=1}^{n}(g_i(X)-g_i(Y))^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} g'_{j,x_i}(\xi)(x_j-y_j)\right)^2$$

et en développant :

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(g'_{j,x_i}(\xi)(x_j-y_j)\right)^2=\sum_{j=1}^{n} g'^2_{j,x_i}(\xi)(x_j-y_j)^2+\sum_{\substack{l,k=1\\ l\neq k}}^{n} g'_{k,x_i}(\xi)(x_k-y_k)g'_{l,x_i}(\xi)(x_l-y_l)$$

Et en remarquant que, étant donnés 4 réels a,b,c,d, on a

$2abcd\le a^2b^2+c^2d^2$

d'où

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(g'_{j,x_i}(\xi)(x_j-y_j)\right)^2 \le \sum_{j=1}^{n} g'^{\,2}_{j,x_i}(\xi)(x_j-y_j)^2+\sum_{\substack{l,k=1\\ l\neq k}}^{n}(g'^2_{k,x_i}(\xi)(x_k-y_k)^2+g'^{\,2}_{l,x_i}(\xi)(x_l-y_l)^2)$$

$$\le [\sum_{j=1}^{n} g'^{\,2}_{j,x_i}(\xi)][\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2]=\sum_{j=1}^{n} g'^{\,2}_{j,x_i}(\xi)]\ \ \|X-Y\|$$

On tire donc que

$$\begin{aligned}\|G(X)-G(Y)\| \quad &\leq (\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} g'^{\,2}_{j,x_i}(\xi))) \quad \|X-Y\| \\ &\leq [\sum_{j,i=1}^{n} g'^{\,2}_{j,x_i}(\xi)] \quad \|X-Y\| \ \leq K\,\|X-Y\|\end{aligned}$$

avec $K = \max_{x\in U}(\sum_{j,i=1}^{n} g'^{2}_{j,x_i}(X))$
Comme par hypothèse $K \prec 1$ et U est un fermé borné les hypothèses du théorème sont vérifiées et l'algorithme défini par $X_{n+1} = G(X_n)$ converge.

1.8 La méthode de Newton

C'est une méthode qui consiste à linéariser le système (1.16) et à remplacer la résolution du système non linéaire par une suite de systèmes linéaires qu'on résout successivement(généralement par une méthode directe).
On considère maintenant le système (1.16) ou encore l'équation (1.18) où les fonctions f_i sont de classe C^2 dans un voisinage U de la racine $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ de l'équation (1.18). Si on écrit la formule de Taylor au point X d'un voisinage de α et en négligeant le terme d'ordre 2 on obtient :

$$F(\alpha) - F(X) = F'(X)(\alpha - X)$$

d'où

$$F(X) + F'(X)(\alpha - X) = 0$$

où $F'(X)$ est une application linéaire dont la matrice qu'on appelle la matrice jacobienne est :

$$F'(X) = \begin{pmatrix} f'_{1,x_1}(X) & f'_{2,x_1}(X) & .... & f'_{n,x_1}(X) \\ f'_{1,x_2}(X) & f'_{2,x_2}(X) & .... & f'_{n,x_n}(X) \\ . & . & . & . \\ f'_{1,x_n}(X) & f'_{2,x_n}(X) & .... & f'_{n,x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Si on construit une suite itérative (X^k) approximant α on obtient une meilleure définition de la suite par :

$$F(X^k) + F'(X^k)(X^{k+1} - X^k) = 0.$$

On obtient X^{k+1} en résolvant le système linéaire

$$F'(X^k)(X^{k+1} - X^k) = F(X^k)$$

Ce système aura une solution si $F'(X^k)$ est inversible .

On obtient l'algorithme suivant :

Algorithme 1.9
On choisit un vecteur X^0 dans U, une précision ϵ
et un entier $Nmax$
Répèter
Résolution du système linéaire suivant
par l'une des méthodes connues.
$F'(X^k)(X^{k+1} - X^k) = F(X^k)$
jusqu'à $\frac{\|X^{k+1}-X^k\|}{\|X^k\|} \leq \epsilon$ ou $k \geq N\max$

Remarque
- La méthode de Newton est très efficace.
- La convergence est quadratique au voisinage de la solution (après un certain nombres d'itérations)
- L'inconvenient majeur de la méthode est d'avoir à calculer à chaque itération la matrice jacobienne (n^2 fonctions $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ à évaluer) et les fonctions f_i.

Pour surmonter ce problème plusieurs variantes de la méthode de Newton existent :
1) Méthode de Newton à jacobienne par différences finies :
C'est une méthode qui consiste à approcher à chaque itération k les dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(X^k)$ par :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X^k) \simeq \frac{f_i(X_1^k, \ldots.., X_j^k + h, \ldots X_n^k) - f_i(X_1^k, \ldots.., X_j^k, \ldots X_n^k)}{h}$$

où h est un réel fixé suffisamment petit.
2) Méthode de Newton simplifiée :
c'est une méthode qui consiste à conserver la matrice jacobienne constante pendant un certain nombre d'itérations.
3) Méthodes de Newton à itération linéaire :
ce sont les méthodes où on résout le système linéaire

$$F'(X^k)(X^{k+1} - X^k) = F(X^k)$$

par une méthode itérative (Jacobi, Gaus -Seidel, relaxation...) mais en faisant un nombre limité r d'itérations (r =1,2 ,3..). Et on obtient deux itérations l'une dans l'autre. On obtient ainsi des méthodes dites Newton-Itérations linéaires à r ($r = 1, 2, ou\, 3$) pas :
4) Newton-Gauss-Seidel à r pas.
5) Newton-Relaxation à r pas.

Fin du chapitre 1.