Analyse Numérique

Série d'exercices n° : 5

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et (λ, u) un élément propre de A : $Au = \lambda u$, tel que $u_1 = 1$. Soit B la matrice définie par $B = A - ua^t$, où a^t est la première ligne de A .

1. Montrer que $a^t u = \lambda$.
2. Montrer que la première ligne de B est identiquement nulle et que $Bu = 0$.
3. Soit (β, v) un élément propre de A tel que $\beta \neq \lambda$ et $v_1 = 1$. Montrer que $(\beta, v - u)$ est un élément propre de B .
4. En déduire que les éléments propres de B sont $(0, u)$ et (β, w) , où $w = v - u$.
5. Soit $\tilde{B} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $\tilde{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$ donnés par :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & O \\ \hline * & \tilde{B} \end{array} \right), \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{w} \end{pmatrix}$$

Montrer que $(\beta, \tilde{w})$ est un élément propre de $\tilde{B}$.

6. Soient $(\lambda_i, u^{(i)})_{1 \leq i \leq n}$ les éléments propres de A vérifiant $u_1^{(i)} = 1$ et $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_{n-1}| < |\lambda_n|$.

En utilisant ce qui précède, donner une méthode qui permet de calculer λ_{n-1} et λ_n ainsi que $u^{(n-1)}$ et $u^{(n)}$.

Exercice 2

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On définit l'ensemble

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C} / \text{il existe } x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, Ax = \lambda Bx\}$$

On désire déterminer l'élément de S , noté $s(A, B)$, le plus petit en module.

1- Montrer que si A est non inversible, alors $s(A, B) = 0$.

2- Dans la suite, on supposera que A et B sont inversibles.

En utilisant la méthode de la puissance, donner un algorithme permettant de déterminer $s(A, B)$ et préciser les hypothèses permettant d'assurer la convergence de cet algorithme.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont on connaît une valeur propre λ et un vecteur propre associé u de norme $\|u\|_2 = 1$, où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $B = A - \lambda uu^t$.

1- Montrer que 0 est une valeur propre de B de vecteur propre associé u .

2- Soit β une autre valeur propre de A ($\beta \neq \lambda$) de vecteur propre associé v .

Montrer que β est une valeur propre de B de vecteur propre associé v .

3- Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A , comptées avec leur ordre de multiplicité, vérifiant :

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$$

En utilisant la méthode de la puissance, donner une méthode qui permet de calculer λ_n et λ_{n-1} et préciser les hypothèses sous lesquelles la méthode proposée converge.