

Analyse Numérique

Série d'exercices n° : 4

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Soient $b \in \mathbb{R}^n$ et le système (S) : $Ax = b$. Soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A .

1– Montrer que l'algorithme du gradient à pas constant α , pour la résolution de (S) converge (pour tout choix de $x^{(0)}$) si et seulement si : $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}$.

2– En déduire que si il existe $M > 0$ tel que $\|Ax\|_2 \leq M\|x\|_2, \forall x \in \mathbb{R}^n$, alors l'algorithme précédent converge si $\alpha \in]0, \frac{2}{M}[$.

3– Déterminer la valeur optimale α^* de α qui assure la convergence la plus rapide de l'algorithme précédent et vérifier que :

$$\rho(I - \alpha^*A) = \frac{\text{Cond}_2(A) - 1}{\text{Cond}_2(A) + 1}$$

Exercice 2

Soit (S) : $Ax = b$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1– On considère l'algorithme du gradient à pas constant α appliqué à (S).

1-a Pour quelles valeurs de α l'algorithme converge-t-il ?

1-b Déterminer la suite $(x^{(k)})_k$ générée par l'algorithme, lorsque $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ et $\alpha = \frac{1}{2}$.

2– Faire 3 itérations de l'algorithme du gradient à pas optimal pour la résolution de (S) avec $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

3– Résoudre (S) par la méthode du gradient conjugué.

Exercice 3

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère le système linéaire

$$(1) \quad Ax = b$$

dont on notera $\bar{x}$ sa solution.

1– Vérifier que le système (1) est équivalent au système :

$$(2) \quad A^T Ax = A^T b$$

2– Montrer que la matrice $A^T A$ est symétrique définie positive.

3– Pour résoudre le système (1), on considère la méthode du gradient à pas constant appliquée au système (2) :

$$(3) \quad \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - r \nabla J(x^{(k)}), \quad k \geq 0 \end{cases}$$

où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $J(\cdot)$ est la fonctionnelle définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$J(x) = \frac{1}{2}(A^T Ax, x) - (A^T b, x)$$

$(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$.

3–a Donner l'expression de $\nabla J(x)$ en fonction de A , A^T et b .

3–b Montrer que la méthode du gradient à pas constant (3) est convergente, si et seulement si $0 < r < \frac{2}{\|A\|_2^2}$, où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|_2$. Quelle est dans ce cas la limite de la suite $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ définie par (3) ?

3–c On note $g^{(k)} = \nabla J(x^{(k)})$. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que

$$\frac{\|g^{(k)}\|_2}{\|A^T b\|_2} \leq \varepsilon \implies \frac{\|x^{(k)} - \bar{x}\|_2}{\|\bar{x}\|_2} \leq \varepsilon [\text{cond}_2(A)]^2$$

où $\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$ et $\bar{x}$ désigne la solution de (2) (ou de (1)).

3–d Ecrire l'algorithme de la méthode du gradient à pas constant appliquée au système (2).