

Analyse Numérique

Série d'exercices n° : 3

Exercice 1

On se propose de résoudre numériquement le système linéaire : $Ax = b$.

Etudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel dans les deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Soit le système $Ax = b$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Etudier la convergence des méthodes de Jacobi et de relaxation.

Exercice 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit le système linéaire $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1– Pour quelles valeurs de α , la matrice A est-elle définie positive ?
- 2– Montrer que pour tout $\alpha \in]-1/2, 1[$, la méthode de relaxation converge pour tout $\omega \in]0, 2[$.
- 3– Ecrire la matrice J de la méthode de Jacobi correspondante. Pour quelles valeurs de α , la méthode de Jacobi converge-t-elle ?
- 4– Ecrire la matrice $\mathcal{L}_1$ de la méthode de Gauss-Seidel correspondante. Calculer $\rho(\mathcal{L}_1)$.
- 5– Pour quelles valeurs de α , la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle plus vite que celle de Jacobi ?

Exercice 4

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carré d'ordre n . On suppose que A est à diagonale dominante stricte :

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1 \text{ à } n$$

On veut résoudre le système linéaire : (S) $Ax = b$ où $b \in \mathbb{R}^n$, par la méthode itérative de Jacobi.

- 1– Calculer la matrice J de la méthode de Jacobi.
- 2– Montrer que la méthode de Jacobi est convergente.

Exercice 5

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, une matrice à diagonale strictement dominante, et $b \in \mathbb{C}^n$. On considère le système linéaire (S) : $Ax = b$.

On décompose la matrice A sous la forme $A = D - E - F$, où $D = \text{diag}(a_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ et où les coefficients des matrices $E = (e_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $F = (f_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ sont donnés par :

$$e_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i > j \\ 0, & i \leq j \end{cases}, \quad f_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i < j \\ 0, & i \geq j \end{cases}$$

Soit $\mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1}F$ la matrice de la méthode itérative de Gauss-Seidel, pour la résolution de (S).

- 1– Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de la matrice $\mathcal{L}_1$. Montrer que $\det[\lambda(D - E) - F] = 0$.
- 2– Montrer que, si l'on suppose que $\mu \in \mathbb{C}$ vérifie $|\mu| \geq 1$, alors la matrice $\mu(D - E) - F$ est à diagonale strictement dominante.
- 3– En déduire que la méthode de Gauss-Seidel, pour la résolution de (S), est convergente.

Exercice 6

1ère partie :

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $a_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n$, qui se décompose sous la forme :

$$A = I - E - F,$$

où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $E = (e_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle et vérifiant $e_{ij} = -a_{ij}$, $1 \leq j < i \leq n$, et $F = (f_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle et vérifiant $f_{ij} = -a_{ij}$, $1 \leq i < j \leq n$.

Pour b donné dans $\mathbb{R}^n$, on cherche $x \in \mathbb{R}^n$ solution de :

$$(1) \quad Ax = b$$

à l'aide de la méthode itérative suivante :

$$(2) \quad \begin{cases} x^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \\ (I - E)x^{(k+1/2)} = Fx^{(k)} + b, & k \geq 0 \\ (I - F)x^{(k+1)} = Ex^{(k+1/2)} + b, & k \geq 0 \end{cases}$$

1.1– Mettre la méthode (2) sous la forme :

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k \geq 0$$

où $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^n$ sont à déterminer.

1.2– On pose $M = (I - E)(I - F)$ et $N = EF$. Montrer que la matrice $M^T + N$ est symétrique définie positive.

1.3– En déduire, que si A est de plus définie positive, alors la suite générée par la méthode itérative (2) converge vers la solution x de (1).

2ème partie :

Soit $\tilde{A}$ une matrice symétrique définie positive.

2.1– Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $d_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, telle que la matrice $D^{-1/2} \tilde{A} D^{-1/2}$ soit à diagonale unité.

[$D^{1/2}$ désigne la matrice diagonale définie par $(D^{1/2})_{ii} = \sqrt{d_i}$ et $D^{-1/2}$ est la matrice inverse de $D^{1/2}$].

2.2– Comment peut-on adapter la méthode itérative (2), donnée dans la 1ère partie, à la matrice $\tilde{A}$ pour résoudre le système linéaire $\tilde{A}x = \tilde{b}$, où $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$?