Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis **2008-2009**

Analyse Numérique

Série d'exercices n° : 1

Exercice 1

Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
1– Montrer que la matrice AB est triangulaire supérieure.
2– Montrer que $(AB)_{ii} = a_{ii}b_{ii}$, $1 \leq i \leq n$.
3– Montrer que $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Exercice 2

Soient m et n deux entiers vérifiant $1 \leq m \leq n$ et $r_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq r_i \leq n$, tels que $\sum_{i=1}^{m} r_i = n$.
Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices triangulaires supérieures par blocs, admettant la même décomposition :

$$A = (A^{ij})_{1\leq i,j\leq m} \quad , \quad A^{ij} \in \mathcal{M}_{r_i,r_j}(\mathbb{C})$$

$$B = (B^{ij})_{1\leq i,j\leq m} \quad , \quad B^{ij} \in \mathcal{M}_{r_i,r_j}(\mathbb{C}).$$

1– Montrer que AB est triangulaire supérieure par blocs pour cette décomposition par blocs.
2– Montrer que $(AB)^{ii} = A^{ii}B^{ii}$, $1 \leq i \leq m$.
3– Montrer que $\det A = \prod_{i=1}^{m} \det A^{ii}$.

Exercice 3

Soit $T = (t_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et triangulaire inférieure.
1– Soit $b = (b_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\exists\, k,\ 2 \leq k \leq n,\ \text{tel que } b_i = 0 \quad \text{pour } i < k$$

On considère le système linéaire (S) : $Tx = b$.
Trouver un algorithme pour déterminer la solution $x = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ du système (S) en fonction de b et de T.
Montrer que $x_i = 0$ pour $i < k$ et que $x_k = \dfrac{b_k}{t_{kk}}$.
2– En déduire que T^{-1} est triangulaire inférieure. Quels sont ses éléments diagonaux?

Exercice 4

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.
1– Montrer que pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $a_{kk} > 0$ et que

$$\max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}| = \max_{1\leq k\leq n} |a_{kk}|$$

2– Montrer que l'on peut définir une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que $B^2 = A$ (on notera dans ce cas $B \equiv A^{1/2}$).
3– Soient $k \in \{1, \cdots, n\}$ et $A^{(k)}$ la sous-matrice carrée d'ordre k, extraite de A en ne gardant que les coefficients situés sur les k premières lignes et les k premières colonnes.
Montrer que $A^{(k)}$ est définie positive.

Exercice 5

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice à coefficients complexes à n lignes et n colonnes.
1– Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que :

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Indication : On pourra choisir $x \in \mathbb{C}^n$ vecteur propre de A associé à la valeur propre λ et considérer un indice i tel que $|x_i| = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$, où x_j désigne la $j^{\text{ème}}$ composante de x dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

2– On appelle spectre de A l'ensemble de toutes les valeurs propres de A noté $\mathrm{Sp}(A)$.
Montrer que

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \cup_{i=1}^{n}\{z \in \mathbb{C}; \quad |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\}$$

3– Montrer que si la matrice A est à *diagonale dominante stricte*, c'est à dire si

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \ , \qquad i = 1 \text{ à } n$$

alors A est inversible.

Exercice 6

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ admettant la décomposition par blocs suivante :

$$A = \begin{pmatrix} G & O \\ O & H \end{pmatrix}$$

où $G \in M_p(\mathbb{C})$ et $H \in M_q(\mathbb{C})$, avec $p + q = n$.
1– Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(G) \cup \mathrm{Sp}(H)$.
2– Donner les valeurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $1 \leq n < m$. On suppose qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ telle que la matrice $QA = T = (T_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ soit nulle en dessous de la diagonale principale :

$$T = \left(\begin{array}{cccc} T_{11} & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & T_{nn} \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right) = \left(\frac{R}{O}\right), \qquad R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{avec } R_{ij} = T_{ij},\ 1 \leq i, j \leq n$$

où O est la matrice identiquement nulle de $\mathcal{M}_{m-n,n}(\mathbb{R})$. Soit $b \in \mathbb{R}^m$, on dira que $x \in \mathbb{R}^n$ est solution du système $Ax = b$ ***au sens des moindres carrés*** si x vérifie:

$$(P) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|Ax - b\|_{2,m} \leq \|Ay - b\|_{2,m}$$

où $\|.\|_{2,m}$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^m$.

1. Montrer que
$$\forall\, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|Ay - b\|_{2,m} = \|Ty - Qb\|_{2,m}$$
2. En déduire que si x est solution de (P), alors
$$\forall\, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|Rx - c\|_{2,n} \leq \|Ry - c\|_{2,n}$$
où $c \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de composante $c_i = (Qb)_i$, $1 \leq i \leq n$ et $\|.\|_{2,n}$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.
3. En déduire que si x est solution de(P) et si R est inversible, alors x est solution du système linéaire $Rx = c$.

Exercice 8

1– Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice à coefficients réels, vérifiant :

$$\begin{array}{ll} b_{ij} \geq 0, & 1 \leq i,j \leq n \\ \|B\|_\infty \equiv \max\limits_{1 \leq i \leq n} (\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}) < 1. & \end{array}$$

Montrer que $I - B$ est inversible et que $(I-B)^{-1}$ est à coefficients positifs ou nuls (I désigne la matrice identité).

2– Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice à coefficients réels, vérifiant :

$$\begin{array}{ll} a_{ii} > 0, & 1 \leq i \leq n \\ a_{ij} \leq 0, & 1 \leq i \neq j \leq n \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} > 0, & 1 \leq i \leq n \end{array}$$

et soit D la matrice diagonale définie par:

$$d_{ii} = a_{ii},\ 1 \leq i \leq n, \qquad d_{ij} = 0,\ 1 \leq i \neq j \leq n.$$

2–a Montrer que A est à diagonale dominante stricte (i.e. $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,\ \forall\, i = 1, \cdots, n$).

2–b Montrer que D est inversible.

2–c On pose $C = D^{-1}A$. Calculer les coefficients $(c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ de C.

2–d Montrer que C est inversible et que C^{-1} est à coefficients positifs ou nuls.

Exercice 9

Soit $D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Montrer que

$$\|D\|_1 = \|D\|_\infty = \|D\|_2 = \max_{1 \leq k \leq n} |d_{kk}|$$

Exercice 10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soientt $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices orthogonales. Montrer que $\|VAU\|_2 = \|A\|_2$

Exercice 11

Soient $\|\cdot\|$ une norme vectorielle de $\mathbb{R}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme matricielle subordonnée associée.
1– Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et soit λ une valeur propre de A. Montrer que

$$|||A||| \geq |\lambda| \geq \frac{1}{|||A^{-1}|||}$$

2– Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a

$$\frac{1}{|||A^{-1}|||} \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq |||A|||$$

Exercice 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & \bigcirc & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \bigcirc & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1– En écrivant A sous la forme $A = 4(I_n - N)$, où N est à déterminer, montrer que A est inversible et que $\|A^{-1}\|_\infty \leq \dfrac{1}{2}$. En déduire un majorant de $\mathrm{Cond}_\infty(A)$.
2– Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $2 \leq |\lambda| \leq 6$. □