Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE IMP
PARCOURS MASS

ALGEBRE LINEAIRE 1

Examen, le 14 juin 2006, 9h00-11h00

Corrigé et barème

Question de cours. La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la matrice $m \times n$ **(1 pt)** dont la j-ième colonne contient les coordonnées du j-ième élément de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$ **(1 pt)**.

Exercice 1. a. On effectue la méthode du pivot de Gauss sur la matrice A et on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 \\ -6 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & -26 & -5 & -14 \\ 0 & 8 & 4 & 8 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & -26 & -5 & -14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -26 & -5 & -14 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Du coup,

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x - 4y - z - 2t = 0 \\ 2y + z + 2t = 0 \\ 2z + 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = -\frac{1}{4}t \\ z = -\frac{3}{2}t \end{cases}$$

Une base de $\ker(f)$ est donc le vecteur

$$v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

b. D'après le a, $\dim(\ker(f)) = 1$. D'après le Théorème du rang, $\text{rang}(f) = 4 - 1 = 3$ **(1 pt)**.

c. Soient $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$ et $v_3 = e_3$, où e_1, e_2, e_3 sont les 3 premiers vecteurs de la base standard de $\mathbb{R}^4$. Comme la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

est de rang 4, la famille v_1, v_2, v_3, v_4 est une base de $\mathbb{R}^4$ **(1 pt)**.

d. Soit $\mathcal{B}$ la base $v_1, \ldots, v_4$ ci-dessus. Soit $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$ et $w_3 = f(v_3)$. Soit $\mathcal{C}$ la famille w_1, w_2, w_3. On montre que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}^4$, la famille image $f(v_1), \ldots, f(v_4)$ est génératrice de $\mathrm{im}(f)$. Comme $f(v_4) = 0$, la famille $\mathcal{C}$ est génératrice de $\mathrm{im}(f)$. D'après le b, $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^3$. Donc $\mathcal{C}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Comme le cardinal de $\mathcal{C}$ est égal à 3, $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Il est clair que la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est égale à A' **(1 pt)**.

Exercice 2. a. En développant suivant la première colonne, on trouve

$$\det(A) = -2 \times \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1) \times (-1) \times \det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$(-2) \times (-2) + (-5) = -1 \quad \textbf{(2 pt)}.$$

b. On applique la méthode du pivot de Gauss sur la matrice $(A\ I)$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to$$

Par conséquent,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(4 pt)}.$$

Exercice 3. a. Déterminons d'abord le polynôme caractéristique de A :

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 & 5 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$-\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3-\lambda \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1-\lambda & 4 & 5 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3-\lambda \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 8+4\lambda & 5+(1+\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$-(4-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3-\lambda \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 8+4\lambda & 8+2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} = -(4-\lambda)(-2\lambda-\lambda^2) =$$

$$-\lambda(\lambda+2)(\lambda-4) \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Les valeurs propres de A sont donc $-2, 0, 4$ **(1 pt)**.

b. Il faut déterminer un vecteur propre pour chaque valeur propre de A.

Pour $\lambda = -2$ on doit trouver une solution non triviale de l'équation $(A+2I)v = 0$. Pour cela, on effectue la méthode du pivot de Gauss sur $A+2I$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = -2$ est donc

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Pour $\lambda = 0$ on doit trouver une solution non triviale de l'équation $Av = 0$. Pour cela, on effectue la méthode du pivot de Gauss sur A :

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = 0$ est donc

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Pour $\lambda = 4$ on doit trouver une solution non triviale de l'équation $(A-4I)v = 0$. Pour cela, on effectue la méthode du pivot de Gauss sur $A-4I$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 5 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ -5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \end{pmatrix}$$

Un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = 4$ est donc

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

D'après le cours, la matrice P définie par

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

convient **(1 pt)**.

c. D'après le cours, on a

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \textbf{(2 pt)}.$$