Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE IMP
PARCOURS MASS

ALGEBRE LINEAIRE 1

Examen, le 14 juin 2006, 9h00-11h00

Documents et calculatrices sont interdits.
Barème indicatif. Question de cours : **2 points**, exercice 1 : **4 points**, exercice 2 : **6 points**, exercice 3 : **8 points**.

Question de cours. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$, respectivement. Donner la définition de la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 1. Soit A la matrice 3×4 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 \\ -6 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(v) = Av$ pour tout $v \in \mathbb{R}^4$.

a. Déterminer une base de $\ker(f)$.

b. Déterminer le rang de f en utilisant le Théorème du rang.

c. Compléter la base de $\ker(f)$ ci-dessus en une base de $\mathbb{R}^4$.

d. Déterminer des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement, dans lesquelles la matrice de f est la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer $\det(A)$.

b. Déterminer A^{-1}.

T. S. V. P.

Exercice 3. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres de A.

b. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

c. Déterminer la matrice $A' = P^{-1}AP$.

T. S. V. P.