Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE IMP
PARCOURS MASS

ALGEBRE LINEAIRE 1

Examen, le 9 mai 2005, 14h00-16h00

Corrigé et barème

Question de cours. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ **(0,5 pt)** satisfaisant les conditions suivantes :

a. $0 \in V$ **(0,5 pt)**,

b. pour tout $v, w \in V$ on a $v + w \in V$ **(0,5 pt)**, et

c. pour tout $v \in V$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda v \in V$ **(0,5 pt)**.

Exercice 1. a. On calcule le déterminant de A en développant suivant la première ligne :

$$(-1)^{1+1} \times (-1) \times \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \times 1 \times \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

et puis chaque déterminant 3×3 en développant suivant la dernière ligne :

$$-(-1)^{3+2} \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - (-1)^{3+2} \times 2 \times \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (3+2) \times \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 5 \times (2 \times 1 - 4 \times (-1)) = 30.$$

Donce $\det(A) = 30$ **(3 pt)**

b. Oui, la matrice est inversible, car $\det(A) \neq 0$ **(1pt)**.

Exercice 2. a. Comme $f(x) = Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, où A est la matrice 3×4 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

l'application f est linéaire **(1 pt)**

b. Déterminons d'abord $\text{rang}(f) = \dim(\text{im}(f))$ **(1 pt)**. L'image de f est engendré par les colonnes de la matrice A. Soient v_1, v_2, v_3, v_4 ces vecteurs colonnes. La famille v_1, v_2, v_3, v_4 engendre $\mathrm{im}(f)$ **(1 pt)**. On va en extraire une base. Résolvons l'équation vectorielle $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$:

$$\begin{cases} \lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & +3\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & +5\lambda_3 & -5\lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & +4\lambda_2 & +4\lambda_3 & +2\lambda_4 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & +3\lambda_4 & = & 0 \\ & -4\lambda_2 & +4\lambda_3 & -8\lambda_4 & = & 0 \\ & -2\lambda_2 & +2\lambda_3 & -4\lambda_4 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & +3\lambda_4 & = & 0 \\ & -4\lambda_2 & +4\lambda_3 & -8\lambda_4 & = & 0 \end{cases}$$

On voit que cette équation vectorielle admet une solution quand $\lambda_3 = 1$ et $\lambda_4 = 0$. Le vecteur v_3 est donc combinaison linéaire de v_1, v_2. De même, on voit que v_4 est combinaison linéaire de v_1, v_2. De plus, si $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_4 = 0$, l'équation vectorielle admet comme unique solution $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$, c-à-d, la famille v_1, v_2 est libre. Par conséquent, la famille v_1, v_2 est une base de $\mathrm{im}(f)$ **(2 pt)**, et donc $\mathrm{rang}(f) = 2$. D'après le Théorème du rang,

$$\dim(\ker(f)) = 4 - \mathrm{rang}(f) = 4 - 2 = 2 \qquad \textbf{(1 pt)}.$$

Exercice 3. a. Le nombre réel 2 est une valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $Av = 2v$ **(1 pt)**. On résoud cette dernière équation vectorielle avec $v = (x, y, z)$:

$$\begin{cases} 3x & -y & +z & = & 2x \\ 2x & & -2z & = & 2y \\ 3x & -3y & +z & = & 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & -y & +z & = & 0 \\ 2x & -2y & -2z & = & 0 \\ 3x & -3y & -z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & -y & +z & = & 0 \\ & & -4z & = & 0 \\ & & -4z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & -y & +z & = & 0 \\ & & -4z & = & 0 \end{cases}$$

On a une solution non triviale $z = 0$, $y = 1$, $x = 1$. Soit v le vecteur $(1, 1, 0)$. On a bien $Av = 2v$. Le nombre réel 2 est donc valuer propre de A **(1 pt)**.

b. On détermine le polynôme caractéristique de A :

$$\det(A - XI) = \det \begin{pmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 2 & -X & -2 \\ 3 & -3 & 1-X \end{pmatrix} =$$

$$= (3-X)\det\begin{pmatrix} -X & -2 \\ -3 & 1-X \end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1-X \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & -X \\ 3 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= (3-X)(-X(1-X)-6) + (2(1-X)+6) + (-6+3X) =$$

$$= (3-X)(X^2 - X - 6) + X + 2 = -X^3 + 4X^2 + 4X - 16 \qquad \textbf{(1 pt)}.$$

Comme 2 est racine de ce polynôme, on peut écrire

$$-X^3+4X^2+4X-16=(X-2)(-X^2+2X+8)=-(X-2)(X+2)(X-4).$$

Par conséquent, les valeurs propres de A sont $2,-2$ et 4 **(1 pt)**.

c. On détermine une base de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs propres pour A. On a déjà vu que le vecteur $v_1=(1,1,0)$ est un vecteur propre pour la valeur propre 2.

Déterminons un vecteur propre pour la valeur propre -2. Il faut résoudre le système

$$\begin{cases} 3x & -y & +z & = & -2x \\ 2x & & -2z & = & -2y \\ 3x & -3y & +z & = & -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x & -y & +z & = & 0 \\ 2x & +2y & -2z & = & 0 \\ 3x & -3y & +3z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x & -y & +z & = & 0 \\ x & +y & -z & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} & 4y & -4z & = & 0 \\ & 2y & -2z & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} & y & -z & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 0 \end{cases}$$

Un vecteur propre pour la valeur propre -2 est donc $v_2=(0,1,1)$ **(1 pt)**.

Déterminons un vecteur propre pour la valeur propre 4 :

$$\begin{cases} 3x & -y & +z & = & 4x \\ 2x & & -2z & = & 4y \\ 3x & -3y & +z & = & 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x & -y & +z & = & 0 \\ 2x & -6y & -2z & = & 0 \\ 3x & -3y & -3z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x & -y & +z & = & 0 \\ & -8y & & = & 0 \\ & -6y & & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x & -y & +z & = & 0 \\ & y & & = & 0 \end{cases}$$

Un vecteur propre pour la valeur propre 4 est donc le vecteur $v_3=(1,0,1)$ **(1 pt)**.

D'après le cours, la famille v_1,v_2,v_3 est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base v_1,v_2,v_3. La matrice P est inversible et la matrice produit $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale **(1 pt)**.

d. D'après le cours,

$$A'=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1 pt)}$$