Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE IMP
PARCOURS MASS

ALGEBRE LINEAIRE 1

Examen, le 9 mai 2005, 14h00-16h00

Documents et calculatrices sont interdits.
Barème indicatif. Question de cours : **2 points**, exercice 1 : **4 points**, exercice 2 : **6 points**, exercice 3 : **8 points**.

Question de cours. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1. Soit A la matrice 4×4 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le déterminant de A.
b. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 5x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que f est linéaire.
b. Déterminer $\operatorname{rang}(f)$ et $\dim(\ker(f))$.

Exercice 3. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que 2 est une valeur propre de A.
b. Déterminer toutes les valeurs propres de A.
c. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.
d. Déterminer la matrice $A' = P^{-1}AP$.