Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE IMP
PARCOURS MASS

ALGEBRE LINEAIRE 1

Examen, le 15 mai 2006, 14h00-16h00

Corrigé et barème

Question de cours. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors, $\dim(\ker(f)) + \operatorname{rang}(f) = n$ **(2 pt)**.

Exercice 1. a. On effectue la méthode du pivot de Gauss sur la matrice A et on obtient

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 9 & 7 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 9 & 7 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Le rang de A, et donc celui de f, est égal à 3 **(1 pt)**.

b. Les colonnes de A qui contiennent les pivots constituent une base de $\operatorname{im}(f)$:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

c. On a

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -3y - z - t = 0 \\ 4z - t = 0 \end{cases}$$

Un générateur de $\ker(f)$ est donc le vecteur

$$\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Comme une famille à un seul vecteur non nul est libre, il constitue une base de $\ker(f)$ **(1 pt)**.

Exercice 2. a. On effectue la méthode Gauss sur A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme le déterminant de A est égal au produit des pivots, $\det(A) = 1$ **(2 pt)**.

b. Pour déterminer A^{-1} on effectue la méthode du pivot de Gauss sur la matrice augmentée $(A\ I)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(4 pt)}.$$

Exercice 3. a. Déterminons d'abord le polynôme caractéristique de A :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$(2-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Par conséquent, les valeurs propres de A sont $-1, 1, 2$ **(1 pt)**.

b. On détermine un vecteur propre pour chaque valeur propre de A.

Pour $\lambda = -1$, on cherche une solution non triviale de l'équation $(A+I)v = 0$. On voit tout de suite que

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est une telle solution **(1 pt)**.

Pour $\lambda = 1$, on cherche une solution non triviale de l'équation $(A-I)v = 0$. On voit tout de suite que

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une telle solution **(1 pt)**.

Pour $\lambda = 2$, on cherche une solution non triviale de l'équation $(A-2I)v = 0$. On voit tout de suite que

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une telle solution **(1 pt)**.

Du coup, la matrice P définie par

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

convient **(1 pt)**.

c. D'après le cours

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(2 pt)}.$$