Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE IMP
PARCOURS MASS

ALGEBRE LINEAIRE 1

Examen, le 15 mai 2006, 14h00-16h00

Documents et calculatrices sont interdits.
Barème indicatif. Question de cours : **2 points**, exercice 1 : **4 points**, exercice 2 : **6 points**, exercice 3 : **8 points**.

Question de cours. Enoncer le théorème du rang.

Exercice 1. Soit A la matrice 4×4 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme défini par $f(v) = Av$ pour tout $v \in \mathbb{R}^4$.

a. Déterminer le rang de f.
b. Déterminer une base de $\operatorname{im}(f)$.
c. Déterminer une base de $\ker(f)$.

Exercice 2. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer $\det(A)$.
b. Déterminer A^{-1}.

Exercice 3. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres de A.
b. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.
c. Déterminer la matrice $A' = P^{-1}AP$.