Université Paris Dauphine
MI2E

Mars 2013
Partiel

Algèbre 2 - DU1

Une attention particulière doit être apportée à la lisibilité de la copie, à la rédaction des réponses afin d'obtenir la totalité des points. Sauf mention du contraire, il faut justifier vos réponses.

Question de cours 1 : (4 point) Énoncer et démontrer le théorème du rang.

Question de cours 2 : (3 points) Soient E, F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f \in L(E,F)$. Montrer que f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

Exercice 1 (3 points) Soit $\phi : M_n(\mathbb{R}) \mapsto M_n(\mathbb{R})$ définie par $\phi(M) = \frac{1}{2}({}^tM + M)$.

1. Montrer que ϕ est une application linéaire.
2. Montrer que ϕ est un projecteur.
3. Déterminer $\text{Ker}(\phi)$ et $\text{Im}(\phi)$.

Exercice 2 (4 points) Soit $f \in L(\mathbb{R}^6)$ une application linéraire telle que $\text{rg}(f^2) = 3$.

1. Montrer que $\text{rg}(f) < 6$ et $\text{rg}(f) \geqslant 3$.
2. Exhiber f telle que $\text{rg}(f) = 3$ et $\text{rg}(f^2) = 3$ et exhiber d'autre part f telle que $\text{rg}(f) = 4$ et $\text{rg}(f^2) = 3$.
3. En utilisant le théorème du rang, montrer que $\text{rg}(f) \neq 5$.

Exercice 3 (4 points) Soit $\mathbb{R}^n$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ sa base canonique. La matrice de permutation associée à la permutation σ est une matrice qui représente l'application linéaire définie par $f(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour σ une permutation de $[1, n]$. Soit S_n l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $P_\sigma M = MP_\sigma$ pour toute permutation σ.

1. Montrer que S est un espace vectoriel.
2. On suppose $n = 2$. Trouver toutes les matrices de permutations.
3. Montrer que $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
4. En déduire S_n par récurrence sur n. Quelle est la dimension de S ?

Exercice 4 (2 points) Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $f \in L(E)$. On suppose $f \in L(E)$ tel que $f^2 = id_E$.

1. Montrer que $(f - id_E) \circ (f + id_E) = 0$.
2. En déduire que $\text{Ker}(f - id_E) \oplus \text{Ker}(f + id_E) = E$.

Université Paris Dauphine 2013
MI2E **CC n° 1**

Contrôle Continu - Algèbre 2 - DU1

Une attention particulière doit être apportée à la lisibilité de la copie, à la rédaction des réponses afin d'obtenir la totalité des points. Sauf mention du contraire, il faut justifier vos réponses.

Question de cours 1 : (1 point) Donner la définition de $k > 2$ sous-espaces vectoriels (d'un $\mathbb{K}$−espace vectoriel E) en somme directe.

Question de cours 2 : (2 points) Quelle est la dimension de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$−espace vectoriel ? Et en tant que $\mathbb{R}$−espace vectoriel ? Donner une base dans chaque cas.

Question de cours 3 : (4 points) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Exprimer $\dim(F+G)$ en fonction de $\dim(F \cap G)$, $\dim(F)$ et $\dim(G)$ et démontrer l'égalité proposée.

Exercice 1 (2 points) Parmi les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont des familles libres : *(répondre par oui (libre) ou par non (liée) et ne pas justifier ses réponses. Attention à la notation : -1 pour une mauvaise réponse).*

1. $(1,0,1)$, $(1,1,1)$, $(-1,-2,-1)$. 0,5 liée
2. $(1,2,3)$, $(0,0,0)$. 0,5 liée mauvaise -1
3. $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9)$. 0,5 ~~libre~~ liée

8, 10, 12

4. $(1,2,3)$, $(0,5,6)$, $(7,8,0)$, $(1,1,1)$. 0,5 liée

Exercice 2 (3 points) Soient $F_1, \ldots, F_n$ $n \geqslant 2$ sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$−espace vectoriel E. Montrer que $\cup_{i=1}^{n} F_i = E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si il existe un indice $i_0 \in [1,n]$ tel que $F_j \subset F_{i_0}$ quelque soit $j = 1, \ldots, n$. On montrera d'abord la propriété pour $n = 2$ et on pourra utiliser une preuve par récurrence.

Exercice 3 (3 points) Soit E le sous espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$(1,-2,5,-3), (2,3,1,-4) \text{ et } (3,8,-3,-5)\,.$$ $2v_2 - v_1$

1 1. La famille est elle libre ? Génératrice ?

1 2. Trouvez une base de E dont les éléments seront choisis parmi les vecteurs donnés précédemment. On la note B.

1 3. Le vecteur $(13,16,11,-27)$ appartient-il à cet espace ?

1 4. Compléter la base B en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4 (2 points) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$−espace vectoriel E. On suppose que $F \oplus G = E$. On considère $(g_1, \ldots, g_k)$ une base de G et $x_1, \ldots, x_k \in F$. Montrer que $\mathrm{Vect}(g_1 + x_1, \ldots, g_k + x_k)$ est un supplémentaire de F.

Exercice 5 (3 points) On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (1,1,1,1)$ et $v_3 = (1,2,3,4)$ et le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par $H := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - 2y = 0\}$.

1,5 1. Déterminer les dimensions respectives de H et de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

1,5 2. Exhiber une base de $F \cap G$.

$f(\alpha u+\beta v)= \alpha f(u)+\beta f(v).$

III. Applications linéaires et bases

Théorème 2. *Soient $(e_1,\dots,e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$ et $v_1,\dots,v_p$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors, il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ telle que :*

$$\forall\, i \in \{1,\dots,p\}, \quad f(e_i)=v_i.$$

Corollaire 1. *Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.*

Proposition 8. *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$. Alors,*

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_1),\dots,f(e_p)\big).$$

Proposition 9. *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$. Alors,*

1. *f est injective $\Leftrightarrow$ $(f(e_1),\dots,f(e_p))$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$.*
2. *f est surjective $\Leftrightarrow$ $(f(e_1),\dots,f(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$.*
3. *f est bijective $\Leftrightarrow$ $(f(e_1),\dots,f(e_p))$ est une base de $\mathbb{K}^n$ (dans ce cas $n=p$).*

Exemples 3. Cas des applications linéaires f et g.

IV. Matrices d'une application linéaire

1. Définition

Définition 4. *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$, $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{B}'=(f_1,\dots f_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$. On appelle* ***matrice*** *de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} f$ et dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f(e_1),\dots,f(e_p)$ dans la base $\mathcal{B}'$:*

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} f = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(e_1),\dots,f(e_p)\big).$$

Remarques 5.

1. Lorsque $\mathcal{B}=\mathcal{B}'$, on note : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$.
2. Lorsque les bases considérées sont les bases canoniques, on ne les note pas.

Exemples 4. Donner les matrices des applications linéaires f et g des exemples précédents.

Proposition 10. *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$, on note $A=\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} f$. Pour tout $u \in \mathbb{K}^p$, on a*

$$Y = AX,$$

où $X=\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$ et $Y=\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'} f(u)$.

Exemples 5.

1. Cas des applications linéaires f et g dans les bases canoniques.
2. Matrice de id_E dans une base quelconque de E.

F4(

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\, dt.$$

$$I(\lambda f + \mu g) = \lambda\, \underline{I(f)} + \mu\, I(\underline{g}).$$

Ex 7 :

E, F, G $\mathbb{K}$ espaces vec. de dimension finie

$f \in \mathcal{L}(E,F)$; $E \xrightarrow{\text{linéaire}} F$

$g \in \mathcal{L}(F,G)$; $F \xrightarrow{\text{linéaire}} G$

① $rg(g \circ f) \leq rg(g)$.

$f(E) \subset F \implies g(f(E)) \subset g(F)$

ce qui prouve $rg(g \circ f) \leq \dim_{\mathbb{K}} g(F)$

$rg(g)$.

$$\boxed{\text{CL : } rg(g \circ f) \leq rg(g)}$$

② Soit $(u_i)_{i \in \{1, \dots p\}}$ une base de $\mathrm{Im} f = f(E)$.

La famille $g(u_i)_{\{i = 1, \dots p\}}$ est génératrice dans $g(\mathrm{Im} f) = \mathrm{Im}(g \circ f)$.

$rg(g \circ f) \leq p$.

Or $rg(f) = p$.

donc $\boxed{rg(g \circ f) \leq rg(f)}$.

$$\boxed{\text{CL : } rg(g \circ f) \leq \min(rg(g) ; rg(f))}$$

$\dim F = \dim E = \dim G = n$.

Questions :

Montrons : $rg(f) + rg(g) - \dim_{\mathbb{K}} F \leq rg(g \circ f)$.

$$\boxed{rg(f) + rg(g) - n \leq rg(g \circ f)}$$

$\Leftrightarrow$. $\boxed{rg(f) + \dim Ker(g) \leq rg(g \circ f)}$

Soit h la restriction de g à $Im f$.

$h = g|_{Im(f)}$ $\qquad Im(f) = f(E) \subset F$.

$g : F \longrightarrow G$.

h étant une application linéaire de $Im(f)$ dans F.

$$\dim(Im f) = \dim Ker(h) + \dim Im(h).$$

c'est quoi ?

$Im(h) = Im(g \circ f)$.

$Ker h = \{x \in Im(f) ; \text{ tq } h(x) = g(x) = 0\}$.

$= Im(f) \cap Ker(g). \subset Ker(g)$.

Rappel :

Noyau d'une restriction :

f appli linéaire de E dans F.

E_1 sev de E

restriction de f à E_1

$Ker(f|E_1) = Ker f \cap E_1$

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g \circ f) + \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}\, g).$$

$$rg(f) \leq rg(g \circ f) + \cancel{rg} \dim \mathrm{Ker}(g).$$

$$\boxed{rg(f) - \dim \mathrm{Ker}(g) \leq rg(g \circ f)}$$

$$\boxed{rg(f) - \quad \leq rg(g \circ f)}$$

CL:

$$\cancel{rg(g)}\ rg(f) - n \leq rg(g \circ f) \leq \cancel{rg} \min(rg(f), rg(g)).$$

Si $rg(f) = n$. c.à.d. $f(E) = F$.

$$rg(g) \leq rg(g \circ f) \leq rg(g).$$

$$\boxed{rg(g \circ f) = rg(g)}$$

Si $rg(g) = n$. c.à.d $g(F) = G$.

$$rg(f) \leq rg(g \circ f) \leq rg(f).$$

$$rg(g \circ f) = rg(f).$$

Ex 15:

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $f^2 + f \circ g = Id$

$\forall g \in \mathcal{L}(E)$.

Alors $f \circ g = g \circ f$.

Dém :

$f \in \mathcal{L}(E)$ tq $f^2 + f \circ g = Id$.

$\Rightarrow f \circ f + f \circ g = Id$.

$f \circ (f + g) = Id$.

pa suite $f + g = f^{-1}$.

$\Rightarrow \cancel{f \circ (f+g) = Id}$.

$\Rightarrow \cancel{f \circ (g + f) = Id}$.

$\cancel{f \circ g + f^2}$ $(f + g) \circ f = Id$.

$f^2 + (g \circ f) = Id$.

$\boxed{CL : f \circ g = g \circ f.}$

EX3 :

$\vec{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$

$\vec{v}_2 = (2, 2, 2, 6)$

$\vec{v}_3 = (0, 2, 4, 4)$

$F = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Base de F : $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \vec{v}_i = 0$.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 0 = 0 & L_1 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & L_2 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 & L_3 \\ 4\lambda_1 + 6\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 & L_4 \end{cases}$$

$\boxed{\lambda_1 = -2\lambda_2}$ L_1

$L_3 - L_2 = \lambda_3 + \lambda_1 = 0$

$\boxed{\lambda_1 = -\lambda_3}$

$\cancel{2\lambda_1} - \lambda_1 - \cancel{2\lambda_1} = 0. \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$

$\boxed{\lambda_2 = 0}$, $\boxed{\lambda_3 = 0}$.

$G = \text{Vect}\{\vec{V}_4, \vec{V}_5\}$.

$\vec{V}_4 = (1, 0, -1, 2)$

$\vec{V}_5 = (2, 3, 0, 1)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}$

$G =$ Base de G.

$F \cap G$.

$u = (x, y, z, t) \in F \cap G \iff$

$\begin{cases} u \in F \\ u \in G \end{cases}$

$\exists\ \alpha, \beta, \gamma$ tq $\begin{cases} u = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 + \gamma \vec{u}_3 \\ u = \alpha \vec{v}_4 + \beta \vec{v}_5 \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = \alpha + 2\beta \\ 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 3\beta \\ 3\alpha + 2\beta + 4\gamma = -\alpha \\ 4\alpha + 6\beta + 4\gamma = 2\alpha + \beta \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} ① & 2\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ ② & 2\alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \\ ③ & 2\alpha + 5\beta + 4\gamma = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{ \beta = 0 = \gamma = \alpha \right.$$

$$G \cap F = \text{Vect}\{(0,0,0,0)\}.$$

* $F + G = \{ x_1 + x_2 \mid x_1 \in F,\ x_2 \in G \}$

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

$\dim(F+G) = 3 + 2 - 1 = 4.$

$F + G$ sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Correction de l'exercice 9 ▲

À partir de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ nous considérons une combinaison linéaire (qui ne correspond qu'à un nombre *fini* de termes).
Soient $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$ des réels distincts que nous avons ordonnés, considérons la famille (finie) : $(f_{\alpha_i})_{i=1,\ldots,n}$. Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Cela signifie que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$, autrement dit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{\alpha_n x} = 0.$$

Le terme qui domine est $e^{\alpha_1 x}$ (car $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$). Factorisons par $e^{\alpha_1 x}$:

$$e^{\alpha_1 x}\Big(\lambda_1 + \lambda_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} + \cdots + \lambda_n e^{(\alpha_n-\alpha_1)x}\Big) = 0.$$

Mais $e^{\alpha_1 x} \neq 0$ donc :

$$\lambda_1 + \lambda_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} + \cdots + \lambda_n e^{(\alpha_n-\alpha_1)x} = 0.$$

Lorsque $x \to +\infty$ alors $e^{(\alpha_i-\alpha_1)x} \to 0$ (pour tout $i \geq 2$, car $\alpha_i - \alpha_1 < 0$). Donc pour $i \geq 2$, $\lambda_i e^{(\alpha_i-\alpha_1)x} \to 0$ et en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus on trouve :

$$\lambda_1 = 0.$$

Le premier coefficients est donc nul. On repart de la combinaison linéaire qui est maintenant $\lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$ et en appliquant le raisonnement ci-dessus on prouve par récurrence $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Donc la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est une famille libre.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Si les deux droites vectorielles sont distinctes alors elles engendrent un plan vectoriel et donc pas $\mathbb{R}^3$ tout entier. Si elles sont confondues c'est pire : elles n'engendrent qu'une droite. Dans tout les cas elles n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$ et ne sont donc pas supplémentaires.
2. Si P et P' sont deux plans vectoriels alors $P \cap P'$ est une droite vectorielle si $P \neq P'$ ou le plan P tout entier si $P = P'$. Attention, tous les plans vectoriels ont une équation du type $ax+by+cz = 0$ et doivent passer par l'origine, il n'existe donc pas deux plans parallèles par exemple. Donc l'intersection $P \cap P'$ n'est jamais réduite au vecteur nul. Ainsi P et P' ne sont pas supplémentaires.
3. Soit D une droite et P un plan, u un vecteur directeur de D. Si le vecteur u appartient au plan P alors $D \subset P$ et les espaces ne sont pas supplémentaires (ils n'engendrent pas tout $\mathbb{R}^3$). Si $u \notin P$ alors d'une part $D \cap P$ est juste le vecteur nul d'autre part D et P engendrent tout $\mathbb{R}^3$; D et P sont supplémentaires.
   Détaillons un exemple : si P est le plan d'équation $z = 0$ alors il est engendré par les deux vecteurs $v = (1,0,0)$ et $w = (0,1,0)$. Soit D une droite de vecteur directeur $u = (a,b,c)$.
   Alors $u \notin P \iff u \notin \mathrm{Vect}\{v,w\} \iff c \neq 0$. Dans ce cas on bien que d'une part que $D = \mathrm{Vect}\{u\}$ intersecté avec P est réduit au vecteur nul. Ainsi $D \cap P = \{(0,0,0)\}$. Et d'autre part tout vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à $D + P = \mathrm{Vect}\{u,v,w\}$. Il suffit de remarquer que $(x,y,z) - \frac{z}{c}(a,b,c) = (x - \frac{za}{c}, y - \frac{zb}{c}, 0) = (x - \frac{za}{c})(1,0,0) + (y - \frac{zb}{c})(0,1,0)$. Et ainsi $(a,b,c) = \frac{z}{c}u + (x - \frac{za}{c})v + (y - \frac{zb}{c})w$. Donc $D + P = \mathbb{R}^3$.
   Bilan on a bien $D \oplus P = \mathbb{R}^3$: D et P sont en somme directe.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Non. Tout d'abord par définition $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2\} + \mathrm{Vect}\{v_3\} = \mathrm{Vect}\{v_1,v_2,v_3\}$. Nous allons trouver un vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2\} + \mathrm{Vect}\{v_3\}$. Il faut tâtonner un peu pour le choix, par exemple faisons le calcul avec $u = (0,0,0,1)$.
   $u \in \mathrm{Vect}\{v_1,v_2,v_3\}$ si et seulement si il existe des réels α,β,γ tels que $u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. Si l'on écrit les vecteurs verticalement, on cherche donc α,β,γ tels que :

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

   Ce qui est équivalent à trouver α,β,γ vérifiant le système linéaire :

$$\begin{cases} 0 = \alpha\cdot 1 + \beta\cdot 0 + \gamma\cdot 0\\ 0 = \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 + \gamma\cdot 1\\ 0 = \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 1 + \gamma\cdot 0\\ 1 = \alpha\cdot 1 + \beta\cdot 0 + \gamma\cdot 0\end{cases} \quad \text{qui équivaut à} \quad \begin{cases} 0 = \alpha\\ 0 = \gamma\\ 0 = \beta\\ 1 = \alpha\end{cases}$$

   Il n'y a clairement aucune solution à ce système (les trois premières lignes impliquent $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et cela rentre alors en contradiction avec la quatrième).

   Un autre type de raisonnement, beaucoup plus rapide, est de dire que ces deux espaces ne peuvent engendrés tout $\mathbb{R}^4$ car il n'y pas assez de vecteurs en effet 3 vecteurs ne peuvent engendrer l'espace $\mathbb{R}^4$ de dimension 4.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 11.3.9

Il suffit de prouver que les n vecteurs $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ sont libres.

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = \overrightarrow{0}$.

Supposons par l'absurde que $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \neq \overrightarrow{0}$. Soit k_0 minimum tel que $\lambda_{k_0} \neq 0$.

L'égalité $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = \overrightarrow{0}$ devient : $\lambda_{k_0} f^{k_0}(x) + \sum\limits_{k=k_0+1}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = \overrightarrow{0}$.

Si on compose par f^{n-k_0+1}, on obtient : $\lambda_{k_0} f^{n-1}(x) = \overrightarrow{0}$ ce qui est absurde.

Conclusion : la famille $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ est libre, et c'est une base de E.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 11.3.10

D'après le théorème de la dimension appliqué à f, $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie dans F.

Soit h la restriction de g à $\operatorname{Im} f$. On a $\operatorname{Ker} h = (\operatorname{Ker} g) \cap (\operatorname{Im} f)$ et $\operatorname{Im} h = g(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Im}(g \circ f)$.

On applique le théorème de la dimension à h : $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} h + \dim \operatorname{Im} h$.

Autrement dit $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) = \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im}(g \circ f)$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 11.3.11

1. On applique le théorème de la dimension : $\begin{cases} \dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f & (1) \\ \dim E = \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} g & (2) \end{cases}$

   $\begin{cases} E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g \\ E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) & (3) \\ \dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g - \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) & (4) \end{cases}$

   La combinaison $(1) + (2) - (3) - (4)$ donne $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) + \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) = 0$.

   Il en résulte $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) = \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) = 0$.

   Le sommes $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$ sont donc directes.

2. Pour montrer que c'est faux si E n'est pas de dimension finie, on se place dans $E = \mathbb{K}[X]$.

   On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{K}[X]$ défini par $f : P \mapsto f(P) = P''$.

   On définit de même un endomorphisme g de $\mathbb{K}[X]$ par $g(P) = P(0)$.

   L'application f est surjective donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}[X]$. Son noyau est $\mathbb{K}_1[X]$.

   L'image de g est $\mathbb{K}_1[X]$ et son noyau est l'ensemble des polynômes divisibles par X.

   On a bien $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$, et cette somme n'est pas directe car $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} g \neq \{0\}$.

   On a bien $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$ (par exemple, $P = P(0) + (P - P(0))$ pour tout P.)

   Enfin $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$ est l'ensemble des λX, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

   On a donc trouvé, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\begin{cases} E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g \\ E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g \end{cases}$ et $\begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g \neq \{\overrightarrow{0}\} \\ \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \neq \{\overrightarrow{0}\} \end{cases}$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 11.3.12

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f_a(x) = \cos a \sin x + \sin a \cos x$.

Ainsi l'application f_a est combinaison linéaire de $x \mapsto \sin x$ et de $x \mapsto \cos x$.

De la même manière, f_b et f_c sont dans le plan engendré par $x \mapsto \sin x$ et de $x \mapsto \cos x$.

Les trois applications f_a, f_b, f_c étant dans un même plan, elles forment une famille liée.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 11.3.13

Soit $u = (x, y, z, t)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 5t = 0 \\ x + 2y + z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 2z + 5t \\ x + 2y = -z + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7z - 7t \\ y = 3z + 4t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (-7z - 7t, 3z + 4t, z, t) = z(-7, 3, 1, 0) + t(-7, 4, 0, 1), \text{ avec } (z, t) \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi E est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\begin{cases} a = (-7, 3, 1, 0) \\ b = (-7, 4, 0, 1) \end{cases}$

La famille a, b est libre. Elle constitue donc une base de E, et $\dim E = 2$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 11.3.14

1. L'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
   Pour tout polynôme P, on a $\deg \varphi(P) = \deg P$ donc $\varphi(P) = 0 \Leftrightarrow P = 0$.
   Ainsi l'application φ est injective. La conservation du degré montre que la restriction φ_n de φ à $\mathbb{K}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$, toujours injectif.
   Puisque $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie, cette restriction est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.
   Ainsi pour tout P de $\mathbb{K}_n[X]$, il existe un unique Q de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $P = \varphi_n(Q) = \varphi(Q)$.
   Ceci prouve la surjectivité de φ, qui est donc un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
2. L'application ψ_λ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
   Supposons que P soit un polynôme de degré n, de coefficient dominant a_n.
   Posons $P = a_n X^n + Q$, avec $\deg Q < n$.
   Alors $\psi_\lambda(P) = \lambda(a_n X^n + Q) - X(n a_n X^{n-1} + Q') = (\lambda_n - n)a_n X^n + R$, avec $\deg R < n$.
   - ◇ Si λ n'est pas un entier naturel, on a donc toujours $\deg \psi_\lambda(P) = \deg P$.
     Le même raisonnement qu'en 1) montre alors que ψ_λ est un isomorphisme.
   - ◇ On suppose maintenant que $\lambda = n$, avec n dans $\mathbb{N}$.
     Le calcul précédent montre que $\begin{cases} \deg P \leq n \Rightarrow \deg \psi_n(P) \leq n - 1 \\ \deg P = m > n \Rightarrow \deg \psi_n(P) = m \end{cases}$
     En particulier aucun polynôme de degré n n'est dans l'image de ψ_n.
     Il s'ensuit que ψ_n n'est pas surjective : ce n'est pas un isomorphisme.
     On voit aussi que $\psi(X^n) = 0$: l'application ψ_n n'est pas injective.
     Plus précisément, $\operatorname{Ker} \psi_n$ est la droite vectorielle des αX^n avec $\alpha \in \mathbb{K}$.

Corrigé de l'exercice 11.3.15

Le système $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = \overrightarrow{0}$ équivaut à :

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta - 3\gamma + 4\delta = 0 \\ 2\alpha + 10\beta + 4\gamma - 3\delta = 0 \\ \alpha + 5\beta - \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4\beta + \gamma \\ 5\beta + \gamma - 4\delta = 0 \\ 2\beta + 6\gamma - 3\delta = 0 \\ \beta + \gamma - \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4\beta + \gamma \\ \beta - 3\gamma = 0 \\ \beta - 3\gamma = 0 \\ \delta = \beta + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -11\gamma \\ \beta = 3\gamma \\ \delta = 4\gamma \end{cases}$$

On constate que la famille a, b, c, d est liée (donc de rang inférieur ou égal à 3.)

Avec $\gamma = 0$, c'est-à-dire si on résout $\alpha a + \beta b + \delta d = \overrightarrow{0}$, on trouve $\alpha = \beta = \delta = 0$.

La famille a, b, d est donc libre : c'est une base de $\text{Vect}(a, b, c, d)$ (qui est de dimension 3).

Corrigé de l'exercice 11.3.16

Supposons que $(f_1, \ldots, f_n)$ soit liée : Il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq \overrightarrow{0}$ tel que que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$ (1).

Soit r maximum tel que $\lambda_r \neq 0$. (1) s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=1}^{r-1} \lambda_k |x - k| + \lambda_r |x - r| = 0$.

On se place sur $]r-1, r[$ puis $]r, +\infty[$. On obtient, en notant $a = \sum\limits_{k=1}^{r-1} \lambda_k$ et $b = \sum\limits_{k=1}^{r-1} k\lambda_k$:

$$\begin{cases} \forall x \in]r-1, r[, ax - b + \lambda_r(r - x) = (a - \lambda_r)x - b + r\lambda_r = 0 \\ \forall x \in]r, +\infty[, ax - b + \lambda_r(x - r) = (a + \lambda_r)x - b - r\lambda_r = 0 \end{cases}$$

Mais chacune de ces deux égalités (une fonction affine nulle sur un intervalle d'intérieur non vide) n'est possible que si les coefficients de ces fonctions affines sont nuls.

Cela implique $a - \lambda_r = 0$ et $a + \lambda_r = 0$ et donc $\lambda_r = 0$, ce qui est absurde.

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 1$, la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est libre.

Corrigé de l'exercice 11.3.17

1. Soit $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de E.
   Pour tout indice j compris entre 1 et n, il existe un entier m_j tel que $f^{m_j}(e_j) = \overrightarrow{0}$.
   Soit $p = \max\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$. Pour tout j de $\{1, \ldots, n\}$, on a $f^p(e_j) = \overrightarrow{0}$.
   Par linéarité, on en déduit que f^p est l'application nulle, ce qu'il fallait démontrer.
2. On se place dans $E = \mathbb{K}[X]$ et on considère l'application "dérivation" $f : A \mapsto A'$.
   Pour tout polynôme A, il existe un indice m tel que $f^m(A) = 0$ (choisir $m > \deg A$).
   Mais f^p (la "dérivation p-ième") n'est l'application nulle pour aucune valeur de p.
   Le résultat de la question précédente n'est donc plus vrai en dimension infinie.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 11.3.18

- Si P appartient à $F \cap G$, il s'annule en les quatre points distincts $0, 1, 2, 3$ alors qu'il est de degré inférieur ou égal à 3 : il est donc nul. Ainsi F et G sont en somme directe.
  Si on note $K = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$, on a bien sûr $F \subset K$ et $G \subset K$.
  On en déduit $F \oplus G \subset K$.
  F est l'ensemble des polynômes $P = \alpha X(X-1)(X-2)$, avec $\alpha \in \mathbb{K}$: $\dim F = 1$.
  G est l'ensemble des polynômes $P = \beta(X-1)(X-2)(X-3)$, avec $\beta \in \mathbb{K}$: $\dim G = 1$.
  K est l'ensemble des polynômes $P = (aX+b)(X-1)(X-2)$, avec $(a,b) \in \mathbb{K}^2$: $\dim K = 2$.
  Donc $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G = \dim K$, avec $F \oplus G \subset K$: on en déduit $F \oplus G = K$.
- H est l'ensemble des polynômes pairs $P = a + bX^2$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: c'est un plan.
  Si P est dans $(F \oplus G) \cap H$, alors $\begin{cases} P(1) = a + b = 0 \\ P(2) = a + 4b = 0 \end{cases}$ donc $a = b = 0$.
  Ainsi H et $F \oplus G$ sont en somme directe.
  Or $\dim(F \oplus G \oplus H) = \dim(F \oplus G) + \dim H = 2 + 2 = 4 = \dim E$. Ainsi $F \oplus G \oplus H = E$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 11.3.19

1. Tout élément y de $\operatorname{Im}(f+g)$ s'écrit $y = (f+g)(x)$ et est donc la somme de $f(x)$ (qui appartient à $\operatorname{Im} f$) et de $g(x)$ (qui appartient à $\operatorname{Im} g$).
   Ainsi y appartient à $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$, ce qui prouve l'inclusion $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
   On en déduit $\dim \operatorname{Im}(f+g) \leq \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g)$, puis :
   $\dim \operatorname{Im}(f+g) \leq \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \leq \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g$.
   Autrement dit $\operatorname{rang}(f+g) \leq \operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g$.
2. Supposons qu'on ait $\operatorname{rang}(f+g) = \operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g$.
   Alors l'inclusion et les inégalités précédentes sont en fait des égalités.
   On a donc $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ et $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) = 0$ c'est-à-dire $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\overrightarrow{0}\}$.
   Il reste à montrer que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$. Soit x un élément de E.
   L'élément $f(x)$ est dans $\operatorname{Im} f$, donc dans $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(f+g)$.
   Ainsi il existe un élément y de E tel que $f(x) = (f+g)(y)$, donc $f(x-y) = g(y)$.
   Mais l'égalité $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\overrightarrow{0}\}$ implique $f(x-y) = g(y) = \overrightarrow{0}$.
   L'égalité $x = (x-y) + y$ est donc l'écriture de x comme somme d'un élément de $\operatorname{Ker} f$ et d'un élément de $\operatorname{Ker} g$: on a prouvé que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$.
   Réciproquement, on suppose que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\overrightarrow{0}\}$ et $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$.
   Pour montrer que $rg(f+g) = \operatorname{rang}(f) + \operatorname{rang}(g)$, il suffit d'après la question précédente de vérifier qu'on a l'égalité $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(f+g)$.
   Soient $y = f(x)$ un élément de $\operatorname{Im} f$ et $y' = g(x')$ un élément de $\operatorname{Im} g$.
   On peut écrire $x = u + v$ et $x' = u' + v'$, avec u, u' dans $\operatorname{Ker} f$ et v, v' dans $\operatorname{Ker} g$.
   On en déduit que $y = f(x) = f(v) = f(u' + v)$, et $y' = g(x') = g(u') = g(u' + v)$.
   Ainsi $y + y' = (f+g)(u'+v)$ est un élément de $\operatorname{Im}(f+g)$, ce qu'il fallait démontrer.

Exo 9:

E, F, G s. espace Vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

$$(E \cap F) + (E \cap G) \subset E \cap (F+G)$$

Soit $x \in (E \cap F) + (E \cap G)$

On a $x = u + v$ avec $u \in E \cap F$
$v \in E \cap G$.

En particulier u et $v \in E$.
$u + v \in E$ puisque un Sous espace Vectoriel

Par ailleurs u est dans F
v est dans G.
donc $u + v$ est dans $F + G$.

CL: Comme $x \in F+G$ et $\in E$

par suite $x \in E \cap (F+G)$.

$$\boxed{\text{CL: } (E \cap F) + (E \cap G) \subset E \cap (F+G)}$$

a t-on l'égalité
Contre exple.

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } y = z\}$.

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$.

$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$.

$E \cap F = \{0\}$ $\quad (0,0,0)$.

$E \cap G = \{0\}$.

$(E \cap F) + (E \cap G) = \{0\} + \{0\} = \{0\}$

$G + F = \mathbb{R}^3$ en fait,

Si (a,b,c) un élément de $\mathbb{R}^3$.

On peut l'écrire $(a,b,c) = (0,b,b) + (a,0,c-b)$.

d'où $E \cap \mathbb{R}^3 = E$.

Or $\{0\} \neq E$.

* $E + (F \cap G) \subset (E+F) \cap (E+G)$

Soit $x \in E + (F \cap G)$, On a donc

$x = u + v$ avec $u \in E$.
$v \in F \cap G$.

Alors $u \in E$ et v dans F.

donc $u + v \in (E+F)$ ~~puisque~~

de même $u \in E$ et $v \in G$.

donc $x = u + v$ est dans $E + G$.

$x \in (E+F) \cap (E+G)$.

Exemple: $F \cap G = \{(x,0,0), x \in \mathbb{R}\}$.

$= \langle (1,0,0) \rangle$.

$E +$ $(0,y,y) + (x,0,0)$.

$\langle x, y, y \rangle \quad | x, y \in \mathbb{R}$

$E + F = \mathbb{R}^3$,

$F +$

$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$.

$E = \{ (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tq } U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \}$.

espace vectoriel.

$$\begin{cases} U_0 \\ U_1 \\ U_2 = U_1 + U_0 \\ U_3 = U_2 + U_1 = 2U_1 + U_0 \\ U_4 = U_3 + U_2 = 3U_1 + 2U_0 \\ U_5 = U_4 + U_3 = 5U_1 + 3U_0 \end{cases}$$

$E = \langle U_0, U_1 \rangle$.

Soit $U_n = \underset{\sim}{(e_0)_n}\, U_0 + \underset{\sim}{(e_1)_n}\, U_1$.

$U_0 = (\cancel{0},$

$\begin{cases} (1,0) \\ (0,1) \end{cases}$ $\quad U_n = (e_{0n})\, U_0 \underset{\sim}{(1,0)} + (e_1)_n U_1 \underset{\sim}{(0,1)}$.

libre.

$f'(x) = a(x) f(x) + b$.

$(f+g)' = f'(x) + g'(x)$.

$G\quad (f+g)' = a(x)(f+g)(x) + b$.

$= a(x) f(x) + a(x) g(x) + b$.

$f'(x) + g'(x) = a(x) f(x) + b + a(x) g(x) + b$

$2b = b. \Rightarrow b = 0$

$$f'(x) = a(x)\, f(x).$$

$$f(x) \neq 0.$$

$$\int \frac{f'(s)}{f(s)} = \int_0^x a(s)\, ds.$$

$$\ln\left(f(x)\right) = a(x) - a(0).$$

$$\ln\left(f(x)\right) - \ln\left(f(0)\right) = a(x) - a(0)$$

$$\ln\left(f(x)\right) = a(x) + \ln\left(f(0)\right) + a(0).$$

$$f(x) = \underbrace{C_0\, e^{a(x)}}$$

$$\left\langle C_0\, e^{a(x)} \right\rangle.$$

E n'est pas de dimension finie car contient tout P_n polynôme.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ cx^2 & x > 0 \end{cases}$$

$\{(x^2, 0) ; (1, 0) ; (0, x^2)\}$.

~~$F \cap G = \{x^2\}$.~~

$E \cap F$.

$g \in F$.

$$g(x) = ax^2 + b \cdot \chi_{\{x \leq 0\}} + cx^2 \chi_{\{x > 0\}}.$$

$$= a(0, x^2) + b(0, 1) + c(x^2, 0).$$

$(0, x^2)$

$(x^2, 0)$.

$\cancel{(0, 0)}$.

$\lambda_1 + \lambda_2 x^2$

$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

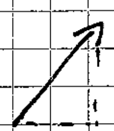
$\lambda_1 \quad \lambda_3 x^2 = 0 \quad = 0$

$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 = 0$.

Si $x = 0 \quad \lambda_2 = 0$.

$2a$

③ $F \cap E$.



n'est pas convexe

~~$x \in F \cap G = \{0\}$.~~

x

Exm:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

Soit

H est un hyperplan, s'il existe des réels $a_1, \cdots a_n$ non tous nuls tel que $x \in H$ si

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n = 0.$$

$$x_1 = -\sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{a_1} x_i$$

Si H est engendré par la famille.

~~$\vec{V}_2 = \left(1, \frac{-a_2}{a_1}, \cdots 0\right)$.~~

~~$\vec{V}_3 = (1,$~~

$$\left\{\begin{array}{l}
\vec{V}_2 = \left(\frac{-a_2}{a_1}, 1, \cdots 0\right) \\
\vec{V}_3 = \left(\frac{-a_3}{a_1}, 0, 1, \cdots 0\right). \\
\vec{V}_4 = \left(\frac{-a_4}{a_1}, 0, 0, 1 \cdots 0\right). \\
\vdots \\
\vec{V}_n = \left(\frac{-a_n}{a_1}, 0, \cdots, 1\right).
\end{array}\right.$$

$$H = \langle \underbrace{\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4, \cdots \vec{V}_n}_{(n-1)} \rangle.$$

EX6: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

E un espace vectoriel réel

$0 = (0_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $\forall n \in \mathbb{N}$

$0 = 0 + 0$. $(0_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

$\forall \lambda$, $\forall u_n, v_n$: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

$\lambda \cancel{u_{n} + v_n} = \lambda($ $\quad v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.

$$\lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda(u_{n+1} + u_n) + (v_{n+1} + v_n)$$
$$= (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + (\lambda u_n + v_n)$$

Soit $w_n = \lambda u_n + v_n \in E$.

mq. că $w_{n+2} = \lambda w_{n+1} + w_n$.

$w_1 = u_1 + u_0$.

$w_2 =$

$u_2 = u_1 + u_0$.

$u_3 = u_2 + u_1$.

$u_3 = u_3 + u_3$.

Ex 12.

Sep: première méthode

$0 + 0 + \dots = 0_{\mathbb{R}^4}$

soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \Rightarrow$

$y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in E \Rightarrow$

$x + \beta y = 0 + \beta . 0 = 0$.

$2^{ème}$ Méthode

$E = \mathrm{Vect}((-1,1,0,0), (-1,0,1,0) (-1,0,0,1))$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$= (-x_2 - x_3 - x_4 , x_2, x_3, x_4)$

$= x_2(-1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(-1,0,0,1)$

pour donner une base il reste à mq que $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$ est libre. Générateur

méthode general

Ex 16:

$x(x, 1, y, 1) \in \mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \vec{e_2})$

alors $(x, 1, y, 1) = \alpha \vec{e_1} + \beta \vec{e_2}$

$0 = -1$ pas de solution.

$(x, 1, 1, y) = \alpha u_1 + \beta u_2$

$(\frac{1}{3}, 1, 1, 2) = \frac{5}{12} u_1 \pm \frac{1}{12} u_2$

Ex 17:

$\underset{\lambda_1}{\alpha} e_1 + \underset{\lambda_2}{2\beta} e_2 + \underset{\lambda_3}{\gamma} e_3 = 0$

Ex 18.

$$(V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + (V_3 - V_4) + \dots (V_{n-1} - V_n)$$
$$+ (V_n - V_1) = 0_{\mathbb{R}^N}$$

liée

l'un des vecteurs s'exprime en fonction les autres

$V_n = U_{n-1} ; U_{n-1}$.

Si $n = 2p+1$

$$\alpha_1 (V_1 + V_2) + \alpha_2 (V_2 + V_3) + \alpha_3 (V_3 + V_4) - \alpha_{2p} + \alpha_{2p+1} = 0$$

$$(\alpha_1 + \alpha_{2p+1}) V_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) V_2$$
$$+ \alpha_3 ((\alpha_3 + \alpha_4) V_3 - - - (\alpha_{2p+1} + \alpha_{2p}) V_{2p+1}$$

$$\alpha_1 + \alpha_{2p+1} = 0.$$

$$\alpha_{2p+1} = 0 \Rightarrow \alpha_{2p} = 0 \Rightarrow -$$

$$\alpha_{2p+1} = 0 \quad i \in \{1, 2, - 2p\} \quad \alpha_i = 0.$$

libre

$\begin{cases} n = 3 \\ n = 4 \end{cases}$

* Si $n = 2p$

$$1(\cancel{V_1} + V_2) - 1(V_2 + V_3) + 1\alpha(V_3 + V_4) - - -$$
$$- - + 1 (V_{2p-1} + V_{2p}) - 1 (\cancel{V_{2p}} + V_1)$$
$$= 0. \text{ Liée}$$

Ex 19

$F =$

G

Si $F \subset G$ ou $G \subset F$ ou $F = G$

On caractérise F par les équations cartésiennes, ensuite on replace les vecteurs de G dans l'F pour voir une application ou pas

Exercice 8:

E espace V.

F_1, F_2 sous espace vectoriel

$F_1 \cup F_2$

$F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1 \Longrightarrow$ $F_1 \cup F_2$ un sous espace vectoriel

Contraposé:

$F_1 \not\subset F_2$ et $F_2 \not\subset F_1 \Longrightarrow$ $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Dém:

$F_1 \not\subset F_2$ alors $\exists\ \vec{x} \in F_1$ et $\vec{x} \notin F_2$.

$F_2 \not\subset F_1$ alors $\exists\ \vec{y} \in F_2$ et $\vec{y} \notin F_1$

$\vec{x} + \vec{y} \notin F_1$ [Car si $\vec{x}+\vec{y} \in F_1 \Longrightarrow$

$\vec{y} = \cancel{(\vec{x}+\vec{y}) - \vec{y}}\ \underbrace{(\vec{x}+\vec{y})}_{\in F_1} - \underbrace{\vec{x}}_{\in F_1}$

$\vec{y} \in F_1$

Contradiction).

$\vec{x}+\vec{y} \notin F_2$ [Car si $\vec{x}+\vec{y} \in F_2 \Rightarrow$

$(\vec{x}+\vec{y}) - \vec{y} \in F_2$.

$\Rightarrow \vec{x} \in F_2$. Contradiction

par suite: $\vec{x}, \vec{y} \in F_1 \cup F_2$.

et $(\vec{x}+\vec{y}) \notin F_1 \cup F_2$.

Conc $F_1 \cup F_2$ n'est pas stable par addition

donc $F_1 \cup F_2$ n'est pas un s espace vectoriel

Exercice 9 :

E, F, G sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

$$(E \cap F) + (E \cap G) \subset E \cap (F + G)$$

Soit $x \in (E \cap F) + (E \cap G)$

On a $x = u + v$ avec $u \in E \cap F$
$v \in E \cap G$.

En particulier u et $v \in E$
donc $u + v \in E$.

~~de même v~~ puisque E est un sous-espace vectoriel de E.

Par ailleurs, u est dans F.
v est dans G
donc $x = u + v$ est dans $F + G$.

Comme x appartient à E et à $G + H$.

Ex 11 :

f endomorphisme de $E \longrightarrow E$.

$f^3(E) = f(E)$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^3$

alors. $\quad E = f(E) \oplus \mathrm{Ker}\, f$

$\qquad\quad = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

Preuve :

Préliminaire :

$\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^3$ car $x \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow$.

$f(x) = 0$. $\quad \forall x \in E$

$\Rightarrow f^2(x) = f(0) = 0$

$\Rightarrow f^3(x) = f(0) = 0$.

$\mathrm{Im}(f)^3 \subset \mathrm{Im}(f)$. car si $x \in \mathrm{Im}\, f^3$.

il existe $y \in E$ tq que

$x = f^3(y) = f(\underbrace{f(\underbrace{f(y)}_{E})}_{\in E})$

Dém :

Indication : $\quad$ Ex

Si $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^3 \Rightarrow \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^3$.

$\Rightarrow E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$.

D'après Théo du ~~rg~~ rang. appliqué à f et f^3

$$n = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im}(f)$$
$$= \dim \operatorname{Ker} f^3 + \dim \operatorname{Im}(f^3).$$

Or d'après hypothèse $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^3.}$

par conséquent :

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^3.$$

Comme On a vu $\begin{cases} \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^3. \\ \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^3. \end{cases}$

donc $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^3}$

Maintenant : Mq $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)$.

$\dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = n.$

il reste $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$.

$$\boxed{\begin{aligned} \dim(\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f)) &= \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im}(f)) \\ &- \dim(\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)). \\ \text{ce qui entraîne } \operatorname{Ker}(f) &+ \operatorname{Im}(f) = E \end{aligned}}$$

Soit $x \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$.

On a. $f(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$

par conséquent $f^3(y) = 0$, $y \in \operatorname{Ker} f^3$

D'après l'hypothèse $y \in \operatorname{Ker} f$.

par suite $f(y) = 0$ c.à.d. $x = 0$.

(2)

Exercice 6 :

$f \in L(E)$ avec E un espace vectoriel de dimension finie

Soit $F = \{ g \in L(E) \mid g \circ f = f \circ g = 0 \}$.

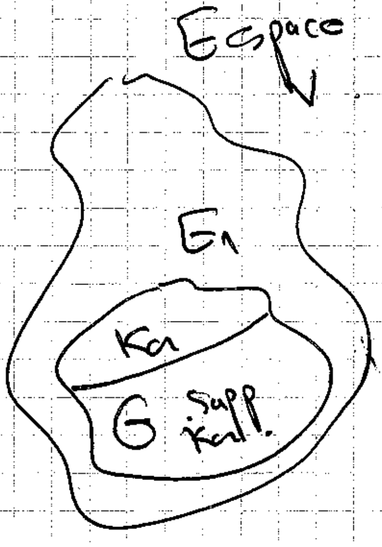
$\begin{cases} g_1 \in F \\ g_2 \in F \\ g_1 + g_2 \in \\ (g_1 + g_2) \circ f = f \circ (g_1 + g_2) \end{cases}$

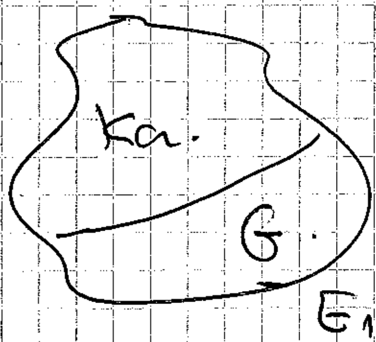
dimension :

$Im(g) \subset Ker f$. $\qquad f \circ g = 0$. Question 5 :

$Im(f) \subset Ker(g)$ $\qquad g \circ f = 0$.

donc





$E = (Ker ; Im)$.

$E_1 = (Ker$, Supp de k. de G$)$

restriction de f à tout supplémentaire de G de Ker f. définit un isomorphe de G sur $Im(f)$.

1

g entièrement définie par sa restriction à un supplémentaire de $Im(f)$. ⟶

||

g application linéaire à valeurs dans $Ker f$.

$$\dim F = (\underbrace{\operatorname{codim} Im f}) \, (\dim Ker f) = (\dim Ker f)^2.$$

2

Ex 6 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Trac $A = a_{11} + a_{22}$.

$\det A =$

$P(x) = x^2 - ax + d$.

$P(x) = \det(A - xId) = A^2$

$$P(A) = \det(A - AId) = A^2 - aA + dI = 0$$

$P(x) = x^2 - ax + d$.

$\Delta : a^2 - 4d > 0$; $x_1 =$

$x_2 =$

2 val. distinctes.

$E_{x_1} = \langle v_1 \rangle$

$E_{x_2} = \langle v_2 \rangle$.

Montrons $\{v_1, v_2\}$ est libre

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 x_2 v_1 + \lambda_2 x_2 v_2 = 0 \\ A(\lambda_1 v_1) + A(\lambda_2 v_2) = \lambda_1 A v_1 + \lambda_2 A v_2 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 x_1 v_1 + \lambda_2 x_2 v_2 = 0$

$$\lambda_1 (x_2 - x_1) v_1 + \lambda_2 (x_2 - x_2) v_2 = 0$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_2 = 0$

donc $\{$ A diag. rel. de v_1, v_2

Si $\Delta < 0$ $\quad x_{1,2} = \frac{a \pm i\delta}{2}$.

$$x^2 = \left(A - \frac{a + i\delta}{2}\right)\left(A - \frac{a - i\delta}{2}\right)$$

$$\frac{(2A)^2 - 4Aa + a^2 \mathrm{Id}}{\delta} = \mathrm{Id}$$

$$4A^2 - 4Aa + a^2 \mathrm{Id} + \delta^2 \mathrm{Id} = 0$$

$$4A^2 - 4Aa + (a^2 + \delta^2)\,\mathrm{Id} = 0$$

$$d = \left(\frac{a + i\delta}{2}\right)\left(\frac{a - i\delta}{2}\right)$$

$$= \frac{a^2 - (i\delta)^2}{4} = a^2 + \delta^2$$

$4A^2$ $\quad D = \cancel{A^{-1}A}\ P^{-1}AP$

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

$$A = \quad A = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a - i\delta}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a + i\delta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{a - i\delta}{2}\right) p_{11} & \frac{a + i\delta}{2} p_{12} \\ \frac{a + i\delta}{2} p_{21} & \frac{a + i\delta}{2} p_{22} \end{pmatrix}$$

$(1, x, x^2, x^3, \dots x^n)$ $\mathbb{R}_n[x]$

$$f : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x].$$
$$P \longmapsto f(P) = (x^2 - 1) P''$$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots a_0.$$

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + (n-2) a_{n-2} x^{n-3}$$
$$+ a_1.$$

$$P''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-2)(n-1) a_{n-1} x^{n-3}$$
$$+ (n-3)(n-2) a_{n-2} x^{n-4} + \quad 2a_2.$$

$$f(P) = (x^2 - 1) P''(x)$$
$$= x^2 P''(x) - P''(x)$$
$$= n(n-1) a_n x^n + (n-2)(n-1) a_{n-1} x^{n-1} + (n-3)(n-2) a_{n-2} x^{n-2}$$
$$+ 2 a_2 x^2 - \left[\quad P''(x). \quad \right]$$

$$= n(n-1) a_n x^n + (n-2)(n-1) a_{n-1} x^{n-1} + \left(n(n-1) a_n + (n-3)(n-1) a_{n-1} \right.$$
$$x^n.$$

$$\left(\quad \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

$$(1, n)(n, 1) =$$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

$\lambda_1(1,4,1) + \lambda_2(a,0,b) + \lambda_3(-3,1,?) = 0$

$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 + a\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0.\\ \\ \\ \end{array}\right\}$ $\quad \dim \mathrm{Ker}(A) \neq 2.$

Soit $e_1 \in \mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^2)$. $\Rightarrow$ $A^2 e_1 = 0$

e_1

$(e_1 ; \underbrace{Ae_1})$ Base Ker (A),

$\begin{pmatrix} \cancel{e_1 \quad Ae_1 \quad A^2e_1} \\ \\ \\ \end{pmatrix}\begin{array}{l} e_1 \\ Ae \\ A^2e \end{array}\begin{pmatrix} Ae_1 & A^2e & A^3e \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cccc} e_1, & Ae_1, & A^2e & \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} e_1 \\ Ae_1 \\ A^2e \end{array}$$

$A^2 = 0 \Rightarrow \underbrace{Im(A)}_{2} \subset \underbrace{Ker(A)}_{1}$ absurde $\dim Ker(A) = 1$

$A.$

$$\boxed{A^3 = 0}$$

$$Im(A) \subset Ker(A^2).$$

$$\begin{cases} f \circ g = 0 \Rightarrow Im\, g \subset Ker\, f. \\ A^2 = 0 \Leftarrow Im(A) \subset Ker(A). \\ A.A \end{cases}$$

$$A . A^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} Im(A^2) \subset Ker(A) \\ \text{ou} \\ Im(A) \subset Ker(A^2). \end{cases}$$

Si le $rg = 3$: alors,

$$\begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \diagdown & \text{---} \\ & - \\ & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}^3 .$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^3 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^3 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{absurde car } A^3 = 0.$$

$\mathrm{Ker}\, A \supset \mathrm{Im}(A^2)$

$\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^2)$

$\boxed{A^2 = 0}$

<u>absurde</u>

~~$\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{I}$~~

Gnai $\boxed{\mathrm{Im}\, A \supset \mathrm{Im}\, A^2.}$

soit $\{0,1\}$

1.

Si $A^2 \neq 0$ alors $\mathrm{Im}\, A^2 = \mathrm{Im}\, A$.

par conséquent Car

$\mathrm{Im}(A^2) \subset \mathrm{Ker}(A)$

$\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}\, A$.

absurde.

car si $A^2 = 0$ $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}$

Soit e tq $Ae \neq 0$. $Ae \in \mathrm{Ker}\, A$.

$\dim \mathrm{Ker}\, A = 2$ $(Ae, \varepsilon) \in \mathrm{Ker}\, A$

(e, Ae, ε) Base.

$$\begin{array}{cccc} A(Ae) & Ae & A\varepsilon & \\ \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} Ae \\ e \\ \varepsilon \end{matrix} \end{array}$$

$e \in \mathrm{Ka}(A)$ $\qquad$ $e\ \mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ka}(A^2)$

$$\begin{array}{l} \begin{array}{ccc} Ae & A^2e & A^3e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} A^2e \\ Ae \\ e \end{array} \end{array}$$

A^2e

A

$$\begin{array}{l} \begin{array}{ccc} A(A^2e) & A(Ae) & A(e) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} A^2e \\ Ae \\ e. \end{array} \end{array}$$

~~Soit e~~ $\begin{cases} Ae \in \mathrm{Ka}(A^2) \\ Ae \in \mathrm{Ka}(A^2) \end{cases}$ $\qquad$ $\mathrm{Ka}\, A$

A^2e

$$\begin{array}{l} \begin{array}{ccc} A(A^2e) & A(Ae) & A^2(e) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} A^3e \\ A^2e \\ e \end{array} \end{array}$$

$z + z' = 0.$

$y' + y = 0.$

$\frac{dy}{dx} + y = 0$

$\int \frac{dy}{y} = \int - dx.$

$\mathrm{Log}|y| =$

$$f'(x) + \int_0^x f(u)\,du = 0.$$

G_2 $\cancel{f'(0) = f}$

$$f'(x) + f'(0) = \int_0^x \cancel{f(u)}\,du = 0.$$

$$f'(x) + \int_0^x \cancel{f(u)}\,du = 0$$

$$2 f'(x) = f'(0).$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} f'(0).$$

$$f(x) = \frac{1}{2} f'(0) x + C_0 \text{ . avec } C_0\ f(0).$$

$$\cancel{\frac{1}{2} f'(0) + \int_0^x \frac{1}{2} f'(0) u + C_0}\ f(x) = \frac{1}{2} f'(0) x + f(0).$$

$$\cancel{\frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{2} f'(0) \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^x + C_0 x.} = 0.$$

A305

B

$$f_1(x_1+x_2, y_1+y_2) \quad ; \quad f_2(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$$

$$\left(f_1(x_1, y_1) + f_1(x_2, y_2) \quad ; \quad f_2(x_1, y_1, z_1) + f_2(x_2, y_2, z_2) \right)$$

f_1 linéaire.

f_2 linéaire.

$$\begin{cases} \mathcal{E} f(x) = \int_0^x f(u)\, du \\ D(f)(x) = f'(x). \end{cases}$$

$\mathcal{E}(f+g)(x) = \_\_\_\_\_\_$

$\mathcal{E}(\lambda f)(x) = \lambda$

$D(f+g)(x) = f' + g' =$

$D(\lambda f) = (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x) \qquad f'(x) = \int \_\_\_\_ + f(0)$

$\lambda_1 \mathcal{E} + \lambda_2 D = 0$

$\lambda_1 \int_0^x f(u)\, du + \lambda_2 f'(x) = 0.$

$f'(x) = \int_0^x f \quad [f'(u)]_0^x$

$= f'(x) - f'(0).$

$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 f'(0) = 0.$

$\lambda_2 = 1.$

$f'(x) - f'(0) =$

$-1 \qquad \lambda_2 = (1_{\{x>0\}} + f'(0) 1_{\{x=0\}}).$

Ex1: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

$f(x,y,z) = (x+y+z, x-y-1)$

pour $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$

$u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^2$

$f(u_1+u_2) = (f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

$= (x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2 ; x_1+x_2-(y_1+y_2) - 1)$

$=$

$f(u_1) = (x_1+y_1+z_1, x_1-y_1-1)$

$f(u_2) = ($ Contre exemple

$(1,1,0) \quad f = (2,-1) \quad f(4,-2)$

$(1,1,0) \quad f(2,-1)$

$(2,2,0) \quad f(4,-1)$.

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x,y,z) = (x+y+z, a, axy)$.

x_1+x_2

$a(x_1+x_2)(y_1+y_2)$

$f(u_1+u_2) = (x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2, 2a, \cancel{a(x_1y_1+x_2y_2)}$

$f(u_1)+f(u_2) = (x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2 ; 2a ; a(x_1y_1+x_2y_2)$

$a = 0$ linéaire.

$a \neq 0$.

$x = (\cancel{x_1, x_2, x_3}) \in \mathrm{Ker}(\mathcal{E}+\mathcal{D})$.

$0 = f'(x) + \int_0^x f(u)\,du. \quad = (\mathcal{E}+\mathcal{D}) f(x)$.

$f'(x) = -\int_0^x f(u)\,du.$

$f'(0) = 0$.

<u>Ex4:</u> $E = \mathbb{R}_n[X]$:

$\delta : E \longrightarrow E$

$\delta\, P(X) \longrightarrow P(X-2) - P(X)$.

$P(X-2) - P(X) = 0$.

$\mathrm{Ker}\,\delta$

$P \in \mathrm{Ker}\,\delta \quad P \in \mathbb{R}_n[X]$

$P(X-2) = P(X) = 0$

Soit $a(X-2)^n = a(X)^n$

si $a = 0$

$\mathrm{Ker}\,\delta = \{0\}$.

$E = \underbrace{\mathbb{R}_m[X]}_{I_m} + \mathrm{Ker}\,\delta\ \{0\}$

$G(x) = \int_0^x f(u)\,du.$

$G'(x) = f'(x)$.

$G'(x) + G(x) = 0$.

$G(x) = e^{-x}$.

$\dfrac{G'(x)}{G(x)} = -1$

$\log G(x) = e$.

$(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ $\qquad n^2.$ $\qquad \dim \mathcal{M}_n = n^2.$

$u : A \longrightarrow {}^tA$

$f = \frac{Id_{M_n(\mathbb{R})} - u}{2}.$

$\begin{pmatrix} a & \frac{a_{12}-a_{21}}{2} \\ & 0 \end{pmatrix}$

$$f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$
$$A \longmapsto f(A) = \frac{A - {}^tA}{2}$$

$f \circ f = f$?

$$u^2(A) = u\left[u(A)\right] = u({}^tA) = {}^t({}^tA) = A = id(A)$$

$$f \circ f = \frac{1}{4}\left((id - u) \circ (id - u)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(id - 2u + \underbrace{u^2}_{= id}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(2id - 2u\right) = \frac{id - u}{2} = f$$

Thm du rg $\qquad n^2 = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{\frac{(n-1)^2}{2} + n} + \dim f$ $+ \operatorname{rg} f$

$$\operatorname{rg} f = n^2 - \frac{(n-1)^2}{2} - n = \frac{2n^2 - (n-1)^2 - 2n}{2}$$

$f(A) = 0 \iff A = {}^tA$ $\qquad n$

$\iff A$ sym

$n + \frac{(n-1)(n-1)}{2} =$ $\qquad = \frac{-n^2 + n - 1}{2}$ $\quad =$

Université Paris Dauphine 2013
MI2E **feuille n° 3**

Algèbre 2- DU1

OK

Exercice 1 On considère sur $\mathbb{C}_n[X]$ l'endomorphisme f défini par $P \mapsto (X^2-1)P''$. Écrire la matrice de f dans la base $(X^i)_{i=0,\dots,n}$.

Exercice 2 On considère la matrice P définie par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice Q définie par $Q = \frac{1}{4}(Id + P)$. Calculer P^2, PQ, QP en fonction de P. Calculer $(4I - P)Q$ et $Q(4I - P)$ et en déduire que Q est inversible.

Exercice 3 Pour quelles valeurs de a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.

Exercice 4 On considère la matrice P définie par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice Q définie par $Q = \frac{1}{4}(Id + P)$. Calculer P^2, PQ, QP en fonction de P. Calculer $(4I - P)Q$ et $Q(4I - P)$ et en déduire que Q est inversible.

Exercice 5 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^n = 0$ et x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. On a déjà montré dans un TD précédent que $B = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Écrire la matrice $\mathrm{Mat}_B(u)$ de u dans cette base. Calculer les matrices des puissances de u dans cette base : $\mathrm{Mat}_B(u)^k$ pour $k \in [1, 5]$ (on suppose $n = 5$ dans cette question seulement).

ok

Exercice 6 Soient a et b deux réels, et A la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On ajoute une matrice

Montrer que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\mathrm{rg}(A) = 2$?

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que

$$(ker A) \cap (im A) = A(ker A^2).$$

$$\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$ par la méthode de Pivot de Gauss on ré. la matrice sous forme échelonnée

$L_2 - 2L_1$
$L_3 - 3L_1$

Exercice 8 Soit $n \geqslant 1$. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de dimension n à coefficients réels et on note $(E_{i,j})_{i,j \in [1,n]}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$: $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls et sauf le coefficient à la ligne i et à la colonne j qui vaut 1.
On définit pour $i \neq j$ la matrice $T_{i,j}(\alpha)$ par $T_{i,j}(\alpha) = Id + \alpha E_{i,j}$, $D_i(\lambda) = Id + (\lambda - 1)E_{i,i}$ pour $\lambda \neq 0$ (tous les coefficients diagonaux valent 1 sauf en position i et celui-ci vaut λ).
Enfin, on définit la matrice de permutation $P_{i,j}$ comme la matrice $p_{k,l}$ est définie par $p_{i,j} = p_{j,i} = 1$ et $p_{k,k} = 1$ pour $k \notin \{i,j\}$ et $p_{k,l} = 0$ sinon. On notera A une matrice appartenant à $M_n(\mathbb{R})$

1. Exprimer comme opération sur les lignes et les colonnes la multiplication à droite et à gauche de la matrice A par les matrices $T_{i,j}(\alpha)$, $D_i(\lambda)$ et $P_{i,j}$.
2. En déduire que les matrices $T_{i,j}(\alpha)$, $D_i(\lambda)$ et $P_{i,j}$ sont inversibles et expliciter leur inverses.
3. Montrer que pour $n = 1$ et $n = 2$, une matrice inversible peut sécrire comme un produit de matrices $T_{i,j}(\alpha)$, $D_i(\lambda)$ et $P_{i,j}$.
4. Généraliser le résultat précédent à n quelconque en utilisant par exemple une preuve par récurrence.
5. Pourquoi une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont non nuls est-elle inversible ?
6. On note Trig_+ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures. Montrer que Trig_+ est un espace vectoriel stable par multiplication. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?
7. Soit $A \in \mathrm{Trig}_+$ une matrice inversible. Montrer que l'application
$$\begin{aligned} \mathrm{Trig}_+ &\mapsto \mathrm{Trig}_+ \\ M &\mapsto AM \end{aligned}$$
est injective. En déduire que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est aussi triangulaire supérieure.
8. Montrer que, si une matrice A est inversible, on peut trouver un couple de matrices $B, C \in \mathrm{Trig}_+$ et une matrice de permutation P telles que $A = PC^TB$ où C^T désigne la transposée de la matrice $C = [c_{i,j}]_{i,j \in [1,n]}$ définie par $C^T = [c_{j,i}]_{i,j \in [1,n]}$.

Exercice 9 Sans chercher à le résoudre, discuter la nature des solutions du système suivant, en fonction de α, a, b et c :
$$\begin{cases} x - y - \alpha z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$

ok

Exercice 10 Soient $E = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $V = (v_1, v_2, v_3)$ une autre base définie par :
$$\begin{aligned} v_1 &= 2e_1 - 4e_2 + e_3 \\ v_2 &= -e_1 \\ v_3 &= e_2 - 2e_1 . \end{aligned}$$

ok

On considère un endomorphisme u défini par sa matrice dans la base E :
$$\mathrm{Mat}_E(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Écrire la matrice $\mathrm{Mat}_V(u)$ de u dans la base V.

Université Paris Dauphine
MI2E

2013
feuille n° 3

Algèbre 2- DU1

Exercice 1 On considère sur $\mathbb{C}_n[X]$ l'endomorphisme f défini par $P \mapsto (X^2-1)P''$. Écrire la matrice de f dans la base $(X^i)_{i=0,\dots,n}$. ok.

Exercice 2 On considère la matrice P définie par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est fait

et la matrice Q définie par $Q = \frac{1}{4}(Id + P)$. Calculer P^2, PQ, QP en fonction de P. Calculer $(4I - P)Q$ et $Q(4I - P)$ et en déduire que Q est inversible.

Exercice 3 Pour quelles valeurs de a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

c'est fait.

est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.

Exercice 4 On considère la matrice P définie par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice Q définie par $Q = \frac{1}{4}(Id + P)$. Calculer P^2, PQ, QP en fonction de P. Calculer $(4I - P)Q$ et $Q(4I - P)$ et en déduire que Q est inversible.

Exercice 5 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^n = 0$ et x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. On a déjà montré dans un TD précédent que $B = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Écrire la matrice $\mathrm{Mat}_B(u)$ de u dans cette base. Calculer les matrices des puissances de u dans cette base : $\mathrm{Mat}_B(u)^k$ pour $k \in [1, 5]$ (on suppose $n = 5$ dans cette question seulement).

c fait

Exercice 6 Soient a et b deux réels, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c fait

Montrer que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\mathrm{rg}(A) = 2$?

Exercice 7 Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que

$$(ker A) \cap (im A) = A(ker A^2).$$

ok.

Exercice 8 Soit $n \geqslant 1$. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de dimension n à coefficients réels et on note $(E_{i,j})_{i,j\in[1,n]}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$: $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls et sauf le coefficient à la ligne i et à la colonne j qui vaut 1.
On définit pour $i \neq j$ la matrice $T_{i,j}(\alpha)$ par $T_{i,j}(\alpha) = Id + \alpha E_{i,j}$, $D_i(\lambda) = Id + (\lambda - 1)E_{i,i}$ pour $\lambda \neq 0$ (tous les coefficients diagonaux valent 1 sauf en position i et celui-ci vaut λ).
Enfin, on définit la matrice de permutation $P_{i,j}$ comme la matrice $p_{k,l}$ est définie par $p_{i,j} = p_{j,i} = 1$ et $p_{k,k} = 1$ pour $k \notin \{i,j\}$ et $p_{k,l} = 0$ sinon. On notera A une matrice appartenant à $M_n(\mathbb{R})$.

1. Exprimer comme opération sur les lignes et les colonnes la multiplication à droite et à gauche de la matrice A par les matrices $T_{i,j}(\alpha)$, $D_i(\lambda)$ et $P_{i,j}$.
2. En déduire que les matrices $T_{i,j}(\alpha)$, $D_i(\lambda)$ et $P_{i,j}$ sont inversibles et expliciter leur inverses.
3. Montrer que pour $n = 1$ et $n = 2$, une matrice inversible peut sécrire comme un produit de matrices $T_{i,j}(\alpha)$, $D_i(\lambda)$ et $P_{i,j}$.
4. non Généraliser le résultat précédent à n quelconque en utilisant par exemple une preuve par récurrence.
5. Pourquoi une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont non nuls est-elle inversible ?
6. On note Trig_+ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures. Montrer que Trig_+ est un espace vectoriel stable par multiplication. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?
7. Soit $A \in \mathrm{Trig}_+$ une matrice inversible. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Trig}_+ &\mapsto \mathrm{Trig}_+ \\ M &\mapsto AM \end{aligned}$$

   est injective. En déduire que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est aussi triangulaire supérieure.
8. Montrer que, si une matrice A est inversible, on peut trouver un couple de matrices $B, C \in \mathrm{Trig}_+$ et une matrice de permutation P telles que $A = PC^TB$ où C^T désigne la transposée de la matrice $C = [c_{i,j}]_{i,j\in[1,n]}$ définie par $C^T = [c_{j,i}]_{i,j\in[1,n]}$.

Exercice 9 Sans chercher à le résoudre, discuter la nature des solutions du système suivant, en fonction de α, a, b et c :

ok.

$$\begin{cases} x - y - \alpha z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$

ok / c'est fait.

Exercice 10 Soient $E = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $V = (v_1, v_2, v_3)$ une autre base définie par :

$$v_1 = 2e_1 - 4e_2 + e_3$$
$$v_2 = -e_1$$
$$v_3 = e_2 - 2e_1 .$$

ok

c'est fait

On considère un endomorphisme u défini par sa matrice dans la base E :

$$\mathrm{Mat}_E(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Écrire la matrice $\mathrm{Mat}_V(u)$ de u dans la base V.

Exercice 11 Soient A et B deux matrices $n \times n$ telles que $AB = BA$. Montrer que

$$B(kerA) \subset kerA$$

ok

et que

$$B(imA) \subset imA.$$

Exercice 12 Soient I la matrice identité de $\mathbb{R}^3$ et

[illegible]

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $J^2 - J - 2I = 0$. En déduire que J est inversible et calculer son inverse.

Exercice 13 Trouver une matrice B telle que

[illegible]

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ok

Exercice 14 Soit u l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par $A \mapsto A^t$ où $A^t := (a_{j,i})_{i,j \in [1,n]}$ pour une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j \in [1,n]}$. Montrer que $\frac{Id_{M_n(\mathbb{R})} - u}{2}$ est un projecteur et déterminer son rang.

Exercice 15 Soit A une matrice 2×2 telle que $A^2 = -I$. On cherche à trouver une base dans laquelle l'expression de A est simple. Considerons pour ceci un vecteur e non nul dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que (e, Ae) est une base, et écrire A dans cette base. Donner une interprétation géométrique de la matrice A.

Exercice 16 Montrer que les matrices $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont semblables. Sont elles semblables à $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$? À $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$?

Exercice 17 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Existe-t-il un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$, ayant pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & b & 5 \end{pmatrix}$$

ok

dans la base canonique et

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

dans une autre base ? Même question avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 Soit A une matrice 2×2 telle que $A^2 = 0$. Montrer que, ou bien $A = 0$, ou bien A est semblable à la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Indication : on peut considérer un vecteur e tel que Ae est non nul, et utiliser la base (e, Ae).

Exercice 19 Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^2 = 0$.

1. Que peut-on dire sur le rang r de A ?
2. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de $\mathbb{R}^n$ dont les r premiers vecteurs constituent une base de imA. Montrer que la représentation de A dans cette base est une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

Exercice 20 Soit A une matrice 3×3 telle que $A^3 = 0$.
- Montrer que le rang r de A est 0, 1 ou 2.
- Montrer que, si $r = 1$, alors A est semblable à

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Dans le cas $r = 2$, montrer que A^2 est non nulle. En considérant un vecteur e tel que $A^2(e)$ est non nul, montrer que $(e, A(e), A^2(e))$ est une base, et conclure que A est semblable à

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 21 Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note T l'application linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ et $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer le noyau de cette application linéaire. Donner la matrice A de T dans la base donnée.

2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

a bon
la coordin
ok

3. Calculer $T(f_1)$, $T(f_2)$, $T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Écrire la matrice B de T dans cette nouvelle base.

4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation relie A, B, P et P^{-1} ?

Exercice 22 Soit σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. On considère l'application linéaire f_σ définie sur la base canonique de $\mathbb{K}^n$ par $f(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Écrire la matrice de f_σ dans la base canonique. En étudiant le sous-espace vectoriel engendré par les itérés de $(f_\sigma^j(e_1))$ pour $j \geqslant 0$, montrer qu'il existe $k \leqslant n$ tel que $f^k = id$. Montrer alors qu'il existe p entiers non nuls $k_1, \ldots, k_p$ tels que $\prod_{i=1}^{p}(f_i^k - id) = 0$ et $\sum_{i=1}^{p} k_i = n$.

Matrice d'une application linéaire

Corrections d'Arnaud Bodin.

Exercice 1

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathscr{B} = (\vec{i},\vec{j})$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe des abscisses $\mathbb{R}\vec{i}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{i}+\vec{j})$. Déterminer $\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B},\mathscr{B})$, la matrice de f dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.
Même question avec $\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B}',\mathscr{B})$ où $\mathscr{B}'$ est la base $(\vec{i}-\vec{j},-2\vec{i}+3\vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$. Même question avec $\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B}',\mathscr{B}')$.

Correction ▼ [001087]

Exercice 2

Soient trois vecteurs e_1,e_2,e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note ϕ l'application linéaire définie par $\phi(e_1) = e_3$, $\phi(e_2) = -e_1+e_2+e_3$ et $\phi(e_3) = e_3$.

1. Écrire la matrice A de ϕ dans la base (e_1,e_2,e_3). Déterminer le noyau de cette application.
2. On pose $f_1 = e_1-e_3$, $f_2 = e_1-e_2$, $f_3 = -e_1+e_2+e_3$. Calculer e_1,e_2,e_3 en fonction de f_1,f_2,f_3. Les vecteurs f_1,f_2,f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer $\phi(f_1),\phi(f_2),\phi(f_3)$ en fonction de f_1,f_2,f_3. Écrire la matrice B de ϕ dans la base (f_1,f_2,f_3) et trouver la nature de l'application ϕ.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation lie A, B, P et P^{-1} ?

Correction ▼ [001097]

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1,e_2,e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e_1' = 2e_1+3e_2+e_3, \quad e_2' = 3e_1+4e_2+e_3, \quad e_3' = e_1+2e_2+2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f par rapport à cette base.

Correction ▼ [002433]

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ & & \iddots & & \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix}$. En utilisant l'application linéaire associée de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.

Correction ▼ [001101]

Exercice 5

Soient A, B deux matrices semblables (i.e. il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$). Montrer que si l'une est inversible, l'autre aussi ; que si l'une est idempotente, l'autre aussi ; que si l'une est nilpotente, l'autre aussi ; que si $A = \lambda I$, alors $A = B$.

Indication ▼ Correction ▼ [002444]

Exercice 6

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Soient $e_1 = (-2, 3)$ et $e_2 = (-2, 5)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}')$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n - \frac{2}{3}y_n \end{cases}$.

Correction ▼ [001104]

Exercice 7

Soit a et b deux réels et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathrm{rg}(A) \geq 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\mathrm{rg}(A) = 2$?

Correction ▼ [002774]

Exercice 8

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$. Déterminer une base du noyau et une base de l'image pour chacune des applications linéaires associées f_A et f_B.

Correction ▼ [001099]

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel et f une application linéaire de E dans lui-même telle que $f^2 = f$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.
2. Supposons que E soit de dimension finie n. Posons $r = \dim \mathrm{Im} f$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que : $f(e_i) = e_i$ si $i \leq r$ et $f(e_i) = 0$ si $i > r$. Déterminer la matrice de f dans cette base $\mathscr{B}$.

Correction ▼ [001093]

Exercice 10

Trouver toutes les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient

1. $M^2 = 0$;
2. $M^2 = M$;
3. $M^2 = I$.

Indication ▼ Correction ▼ [002475]

Exercice 11

Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie en posant pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$: $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans le cas où $n = 3$, donner la matrice de f dans la base $1, X, X^2, X^3$. Déterminer ensuite, pour une valeur de n quelconque, la matrice de f dans la base $1, X, \dots, X^n$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f. Calculer leur dimension respective.
4. Soit Q un élément de l'image de f. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Correction ▼ [001094]

Exercice 12

Pour toute matrice carrée A de dimension n, on appelle trace de A, et l'on note $\operatorname{tr} A$, la somme des éléments diagonaux de A :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1. Montrer que si A, B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
2. Montrer que si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, M sa matrice par rapport à une base e, M' sa matrice par rapport à une base e', alors $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} M'$. On note $\operatorname{tr} f$ la valeur commune de ces quantités.
3. Montrer que si g est un autre endomorphisme de E, $\operatorname{tr}(f \circ g - g \circ f) = 0$.

Correction ▼ [002442]

Indication pour l'exercice 5 ▲

A est *idempotente* s'il existe un n tel que $A^n = I$ (la matrice identité).
A est *nilpotente* s'il existe un n tel que $A^n = (0)$ (la matrice nulle).

Indication pour l'exercice 10 ▲

Il faut trouver les propriétés de l'application linéaire f associée à chacune de ces matrices. Les résultats s'expriment en explicitant une (ou plusieurs) matrice M' qui est la matrice de f dans une base bien choisie et ensuite en montrant que toutes les autres matrices sont de la forme $M = P^{-1}M'P$.
Plus en détails pour chacun des cas :

1. $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ et discuter suivant la dimension du noyau.
2. Utiliser l'exercice 10 : $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ et il existe une base telle que $f(e_i) = 0$ ou $f(e_i) = e_i$.
3. Écrire $(M-I)(M+I) = 0$ puis montrer $\operatorname{Im}(f+\mathrm{id}) \subset \operatorname{Ker}(f-\mathrm{id})$ et $\operatorname{Im}(f-\mathrm{id}) \subset \operatorname{Ker}(f+\mathrm{id})$ et discuter suivant les dimensions.

Correction de l'exercice 1 ▲

L'expression de f dans la base $\mathcal{B}$ est la suivante $f(x,y) = (x-y,0)$. Autrement dit à un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on associe le vecteur $\begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix}$.

On note que f est bien une application linéaire. Cette expression nous permet de calculer les matrices demandées.

1. Calcul de $\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})$. Comme $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j})$, la matrice s'obtient en calculant $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$:
$$f(\vec{i}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{i} \quad f(\vec{j}) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{i}$$
donc
$$\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On garde la même application linéaire mais la base de départ change (la base d'arrivée reste $\mathcal{B}$). Comme $\mathcal{B}' = (\vec{i}-\vec{j},-2\vec{i}+3\vec{j})$ on exprime $f(\vec{i}-\vec{j})$ et $f(2\vec{i}+3\vec{j})$ dans la base d'arrivée $\mathcal{B}$.
$$f(\vec{i}-\vec{j}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(-2\vec{i}+3\vec{j}) = f\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$
donc
$$\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Toujours avec le même f on prend $\mathcal{B}'$ comme base de départ et d'arrivée, il s'agit donc d'exprimer $f(\vec{i}-\vec{j})$ et $f(2\vec{i}+3\vec{j})$ dans la base $\mathcal{B}'$. Nous venons de calculer que
$$f(\vec{i}-\vec{j}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{i} \quad f(2\vec{i}+3\vec{j}) = f\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = -5\vec{i}$$
Mais il nous faut obtenir une expression en fonction de la base $\mathcal{B}'$. Remarquons que
$$\begin{cases} \vec{u} &= \vec{i}-\vec{j} \\ \vec{v} &= -2\vec{i}+3\vec{j} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{i} &= 3\vec{u}+\vec{v} \\ \vec{j} &= 2\vec{u}+\vec{v} \end{cases}$$
Donc
$$f(\vec{i}-\vec{j}) = 2\vec{i} = 6\vec{u}+2\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \qquad f(-2\vec{i}+3\vec{j}) = -5\vec{i} = -15\vec{u}-5\vec{v} = \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$
Donc
$$\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. La matrice A est composée des vecteurs colonnes $\phi(e_i)$, on sait
$$\phi(e_1) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \phi(e_2) = -e_1+e_2+e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \phi(e_3) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\text{donc} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le noyau de ϕ (ou celui de A) est l'ensemble de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$.

$$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -y & = & 0 \\ y & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc $\operatorname{Ker}\phi = \left\{(x,0,-x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Le noyau est donc de dimension 1.

2. On applique le pivot de Gauss comme si c'était un système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rrrcll} e_1 & & -\ e_3 & = & f_1 & L_1 \\ e_1 & -\ e_2 & & = & f_2 & L_2 \\ -e_1 & +\ e_2 & +\ e_3 & = & f_3 & L_3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrcll} e_1 & & -\ e_3 & = & f_1 & \\ & -\ e_2 & +\ e_3 & = & f_2 - f_1 & L_2 - L_1 \\ & e_2 & & = & f_3 + f_1 & L_3 + L_1 \end{array} \right.$$

On en déduit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e_1 & = & f_1 + f_2 + f_3 \\ e_2 & = & f_1 + f_3 \\ e_3 & = & f_2 + f_3 \end{array} \right.$$

Donc tous les vecteurs de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ s'expriment en fonction de (f_1, f_2, f_3), ainsi la famille (f_1, f_2, f_3) est génératrice. Comme elle a exactement 3 éléments dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 alors $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base.

3.
$$\phi(f_1) = \phi(e_1 - e_3) = \phi(e_1) - \phi(e_3) = e_3 - e_3 = 0$$

$$\phi(f_2) = \phi(e_1 - e_2) = \phi(e_1) - \phi(e_2) = e_3 - (-e_1 + e_2 + e_3) = e_1 - e_2 = f_2$$

$$\phi(f_3) = \phi(-e_1 + e_2 + e_3) = -\phi(e_1) + \phi(e_2) + \phi(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3 = f_3$$

Dons dans la base $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ nous avons

$$\phi(f_1) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} \qquad \phi(f_2) = f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} \qquad \phi(f_3) = f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$$

Donc la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}'$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ϕ est la projection orthogonal sur le plan d'équation $(x' = 0)$ (dans la base $\mathscr{B}'$).

4. P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$. En effet la matrice de passage contient -en colonnes- les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathscr{B}$.
Si un vecteur a pour coordonnées X dans la base $\mathscr{B}$ et X' dans la base $\mathscr{B}'$ alors $PX' = X$ (attention à l'ordre). Et si A est la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}$ et B est la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}'$ alors

$$B = P^{-1}AP$$

(Une matrice de passage entre deux base est inversible.)
Ici on calcule l'inverse de P :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On retrouve donc bien les mêmes résultats que précédemment.

Correction de l'exercice 3 ▲

Notons l'ancienne base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et ce qui sera la nouvelle base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$. Soit P la matrice de passage qui contient -en colonnes- les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathscr{B}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie que P est inversible (on va même calculer son inverse) donc $\mathscr{B}'$ est bien une base. De plus

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et on calcule } B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -12 & 30 & -6 \\ 12 & -24 & 6 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

B est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Nous associons à la matrice A son application linéaire naturelle f. Si $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ alors $f(e_1)$ est donné par le premier vecteur colonne, $f(e_2)$ par le deuxième, etc. Donc ici

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_n,\ f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_{n-1}, \dots \quad \text{et en général } f(e_i) = e_{n+1-i}$$

Calculons ce que vaut la composition $f \circ f$. Comme une application linéaire est déterminée par les images des éléments d'une base alors on calcule $f \circ f(e_i)$, $i = 1, \dots, n$ en appliquant deux fois la formule précédente :

$$f \circ f(e_i) = f\big(f(e_i)\big) = f(e_{n+1-i}) = e_{n+1-(n+1-i)} = e_i$$

Comme $f \circ f$ laisse invariant tous les vecteurs de la base alors $f \circ f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Donc $f \circ f = \mathrm{id}$. On en déduit $f^{-1} = f$ et que la composition itérée vérifie $f^p = \mathrm{id}$ si p est pair et $f^p = f$ si p est impair. Conclusion : $A^p = I$ si p est pair et $A^p = A$ si p est impair.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit A, B tel que $B = P^{-1}AP$.

1. Supposons A inversible, alors il existe A' tel que $A \times A' = I$ et $A' \times A = I$. Notons alors $B' = P^{-1}A'P$. On a
$$B \times B' = (P^{-1}AP) \times (P^{-1}A'P) = P^{-1}A(PP^{-1})A'P = P^{-1}AA'P = P^{-1}IP = I$$
De même $B' \times B = I$. Donc B est inversible d'inverse B'.
2. Supposons que $A^n = I$. Alors
$$\begin{aligned} B^n &= (P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots AP \\ &= P^{-1}A^nP \\ &= P^{-1}IP = I \end{aligned}$$
Donc B est idempotente.
3. Si $A^n = (0)$ alors le même calcul qu'au-dessus conduit à $B^n = (0)$.
4. Si $A = \lambda I$ alors $B = P^{-1}(\lambda I)P = \lambda I \times P^{-1}P = \lambda I$ (car la matrice λI commute avec toutes les matrices).

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Notons P la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B} = \big((1,0),(0,1)\big)$ vers (ce qui va être) la base $\mathscr{B}' = (e_1, e_2)$. C'est la matrice composée des vecteurs colonnes e_1 et e_2 :
$$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$
$\det P = -4 \neq 0$ donc P est inversible et ainsi $\mathscr{B}'$ est bien une base.
Alors la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est :
$$B = P^{-1}AP = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
2. Il est très facile de calculer la puissance d'une matrice diagonale :
$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}$$
Comme $A = PBP^{-1}$ on va en déduire A^n :
$$A^n = \left(PBP^{-1}\right)^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 & -4\frac{1}{3^n} \\ -15 & 10\frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$$
3. Si l'on note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ alors les équations que vérifient les suites s'écrivent en terme matriciel :
$$X_{n+1} = AX_n.$$
Si l'on note les conditions initiales $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ alors $X_n = A^nX_0$. On en déduit
$$\begin{cases} x_n &= \frac{1}{4}\left(10x_0 - 4\frac{1}{3^n}y_0\right) \\ y_n &= \frac{1}{4}\left(-15x_0 + 10\frac{1}{3^n}y_0\right) \end{cases}$$
Après simplification :
$$\begin{cases} x_n &= \frac{5}{2}x_0 - \frac{1}{3^n}y_0 \\ y_n &= -\frac{15}{4}x_0 + \frac{5}{2}\frac{1}{3^n}y_0 \end{cases}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Avant toute, un coup d'œil sur la matrice nous informe de deux choses : (a) A n'est pas la matrice nulle donc $\operatorname{rg}(A) \geq 1$; (b) il y a 3 lignes donc $\operatorname{rg}(A) \leq 3$ (le rang est plus petit que le nombre de colonnes et que le nombre de lignes).

1. Montrons de différentes façons que $\operatorname{rg}(A) \geq 2$.
   - **Première méthode : sous-déterminant non nul.** On trouve une sous-matrice 2×2 dont le déterminant est non nul. Par exemple la sous-matrice extraite du coin en bas à gauche vérifie $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ donc $\operatorname{rg}(A) \geq 2$.
   - **Deuxième méthode : espace vectoriel engendré par les colonnes.** On sait que l'image de l'application linéaire associée à la matrice A est engendrée par les vecteurs colonnes. Et le rang est la dimension de cette image. On trouve facilement deux colonnes linéairement indépendantes : la deuxième $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et la troisième $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ colonne. Donc $\operatorname{rg}(A) \geq 2$.

– **Troisième méthode : espaces vectoriel engendré par les lignes.** Il se trouve que -miraculeusement- la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes égal la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes (car $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$). Comme les deuxième et troisième lignes sont linéairement indépendantes alors $\mathrm{rg}(A) \geq 2$.
Attention : les dimensions des espaces vectoriels engendrés sont égales mais les espaces sont différents !

2. En utilisant la dernière méthode : le rang est exactement 2 si la première ligne est dans le sous-espace engendré par les deux autres. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A) = 2 &\iff (a,2,-1,b) \in \mathrm{Vect}\{(3,0,1,-4),(5,4,-1,2)\} \\
&\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (a,2,-1,b) = \lambda(3,0,1,-4) + \mu(5,4,-1,2) \\
&\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \left\{\begin{array}{rcl} 3\lambda + 5\mu &=& a \\ 4\mu &=& 2 \\ \lambda - \mu &=& -1 \\ -4\lambda + 2\mu &=& b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& -\frac{1}{2} \\ \mu &=& \frac{1}{2} \\ a &=& 1 \\ b &=& 3 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Conclusion la rang de A est 2 si $(a,b) = (1,3)$. Sinon le rang de A est 3.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. (a) Commençons par des remarques élémentaires : la matrice est non nulle donc $\mathrm{rg}(A) \geq 1$ et comme il y a $p = 4$ lignes et $n = 3$ colonnes alors $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n,p) = 3$.
   (b) Ensuite on va montrer $\mathrm{rg}(A) \geq 2$ en effet le sous-déterminant 2×2 (extrait du coin en haut à gauche) : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ est non nul.
   (c) Montrons que $\mathrm{rg}(A) = 2$. Avec les déterminants il faudrait vérifier que pour toutes les sous-matrices 3×3 les déterminants sont nuls. Pour éviter de nombreux calculs on remarque ici que les colonnes sont liées par la relation $v_2 = v_1 + v_3$. Donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.
   (d) L'application linéaire associée à la matrice A est l'application $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Et le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker} f_A + \dim \mathrm{Im} f_A = \dim \mathbb{R}^3$ donne ici $\dim \mathrm{Ker} f_A = 3 - \mathrm{rg}(A) = 1$.
   Mais la relation $v_2 = v_1 + v_3$ donne immédiatement un élément du noyau : en écrivant $v_1 - v_2 + v_3 = 0$ alors $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f_A$. Et comme le noyau est de dimension 1 alors
   $$\mathrm{Ker} f_A = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   (e) Pour un base de l'image, qui est de dimension 2, il suffit de prendre 2 vecteurs colonnes quelconques de la matrice A par exemple
   $$\mathrm{Im} f_A = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. On fait le même travail avec B et f_B.
   (a) Matrice non nulle avec 4 lignes et 4 colonnes donc $1 \leq \mathrm{rg}(B) \leq 4$.
   (b) Comme le sous-déterminant (du coin supérieur gauche) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2$ est non nul alors $\mathrm{rg}(B) \geq 2$.

(c) Et pareil avec le sous-déterminant 3×3 :

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

qui est non nul donc $\mathrm{rg}(B) \geq 3$.

(d) Maintenant on calcule le déterminant de la matrice B et on trouve $\det B = 0$, donc $\mathrm{rg}(B) < 4$. Conclusion $\mathrm{rg}(B) = 3$. Par le théorème du rang alors $\dim \mathrm{Ker} f_B = 1$.

(e) Cela signifie que les colonnes (et aussi les lignes) sont liées, comme il n'est pas clair de trouver la relation à la main on résout le système $BX = 0$ pour trouver cette relation ; autrement dit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou encore } \begin{cases} 2x+2y-z+7t & = & 0 \\ 4x+3y-z+11t & = & 0 \\ -y+2z-4t & = & 0 \\ 3x+3y-2z+11t & = & 0 \end{cases}$$

Après résolution de ce système on trouve que les solutions s'écrivent $(x,y,z,t) = (\lambda, 2\lambda, -\lambda, -\lambda)$. Et ainsi

$$\mathrm{Ker} f_B = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Et pour un base de l'image il suffit de prendre 3 vecteurs colonnes quelconques de la matrice B, par exemple v_1, v_2, v_3 :

$$\mathrm{Im} f_B = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Nous devons montrer $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$ et $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = E$.
   (a) Si $x \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$ alors d'une part $f(x) = 0$ et d'autre part il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x')$. Donc $0 = f(x) = f\big(f(x')\big) = f(x') = x$ donc $x = 0$ (on a utilisé $f \circ f = f$). Donc $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.
   (b) Pour $x \in E$ on le réécrit $x = x - f(x) + f(x)$. Alors $x - f(x) \in \mathrm{Ker} f$ (car $f\big(x - f(x)\big) = f(x) - f \circ f(x) = 0$) et $f(x) \in \mathrm{Im} f$. Donc $x \in \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$. Donc $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = E$.
   (c) Conclusion : $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.
2. Notons r le rang de f : $r = \dim \mathrm{Im} f$. Soit $\{e_1, \ldots, e_r\}$ une base de $\mathrm{Im} f$ et soit $\{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ une base de $\mathrm{Ker} f$. Comme $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$ alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Pour $i > r$ alors $e_i \in \mathrm{Ker} f$ donc $f(e_i) = 0$.
   Comme $f \circ f = f$ alors pour n'importe quel $x \in \mathrm{Im} f$ on a $f(x) = x$: en effet comme $x \in \mathrm{Im} f$, il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x')$ ainsi $f(x) = f\big(f(x')\big) = f(x') = x$. En particulier si $i \leq r$ alors $f(e_i) = e_i$.
3. La matrice de f dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est donc :

$$\begin{pmatrix} I & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$$

   où I désigne la matrice identité de taille $r \times r$ et les (0) désignent des matrices nulles.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Soit M une matrice telle que $M^2 = 0$ et soit f l'application linéaire associée à M. Comme $M^2 = 0$ alors $f \circ f = 0$. Cela entraîne $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Discutons suivant la dimension du noyau :
   (a) Si $\dim \operatorname{Ker} f = 3$ alors $f = 0$ donc $M = 0$ (la matrice nulle).
   (b) Si $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ alors prenons une base de $\mathbb{R}^3$ formée de deux vecteurs du noyau et d'un troisième vecteur. Dans cette base la matrice de f est $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ mais comme $f \circ f = 0$ alors $M'^2 = 0$; un petit calcul implique $c = 0$. Donc M et M' sont les matrices de la même application linéaire f mais exprimées dans des bases différentes, donc M et M' sont semblables.
   (c) Si $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ alors comme $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ on a $\dim \operatorname{Im} f \leq 1$ mais alors cela contredit le théorème du rang : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$. Ce cas n'est pas possible.
   (d) Conclusion : M est une matrice qui vérifie $M^2 = 0$ si et seulement si il existe une matrice inversible P et des réels a, b tels que
$$M = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P$$

2. On va s'aider de l'exercice 10. Si $M^2 = M$ et f est l'application linéaire associée alors $f \circ f = f$. On a vu dans l'exercice 10 qu'alors $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ et que l'on peut choisir une base (e_1, e_2, e_3) telle que $f(e_i) = e_i$ puis $f(e_i) = 0$. Suivant la dimension du noyau cela donne que la matrice M' de f dans cette base est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Maintenant M est semblable à l'une de ces matrices : il existe P inversible telle que $M = P^{-1}M'P$ où M' est l'une des quatre matrices ci-dessus.
Géométriquement notre application est une projection (projection sur une droite pour la seconde matrice et sur un plan pour la troisième).

3. Dans cette question $M^2 = I$. Cela implique $M^2 - I = 0$ donc $(M - I)(M + I) = 0$ (et aussi $(M + I)(M - I) = 0$). Attention cela n'implique pas $M = +I$ ou $M = -I$.
Notons encore une fois f l'application linéaire associée à M. Alors $f \circ f = \mathrm{id}$ se réécrit aussi $(f - \mathrm{id})(f + \mathrm{id}) = 0$ ou aussi $(f + \mathrm{id})(f - \mathrm{id}) = 0$. On en déduit que $\operatorname{Im}(f + \mathrm{id}) \subset \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id}) \subset \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id})$.
On discute suivant la dimension de $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$:
   (a) Si $\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) = 3$ alors $f - \mathrm{id} = 0$ donc $f = \mathrm{id}$ et $M = I$.
   (b) Si $\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) = 2$ alors on choisit une base de $\mathbb{R}^3$ dont les deux premiers vecteurs sont dans le noyau, la matrice de $f - \mathrm{id}$ dans cette nouvelle base est alors
$$M' - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1+c \end{pmatrix}$$
Ici M' est la matrice de f dans cette nouvelle base. Mais M' vérifie aussi $M'^2 = I$ et un petit calcul implique que soit $M' = I$ (cas déjà étudié) soit $c = -2$ donc notre matrice M' s'écrit
$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$
   (c) Si $\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) = 1$ alors par le théorème du rang $\dim \operatorname{Im}(f - \mathrm{id}) = 2$ et comme $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id}) \subset \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id})$ alors $\dim \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}) \geq 2$. Si $\dim \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}) = 3$ alors $f + \mathrm{id} = 0$ donc $f = -\mathrm{id}$.

Si $\dim \mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}) = 2$ alors on choisit une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f+\mathrm{id}$ sera

$$M'+I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1+c \end{pmatrix}$$

Comme $M'^2 = I$ alors on en déduit que $c = +2$ donc

$$M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Si $\dim \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}) = 0$ alors $\dim \mathrm{Im}(f-\mathrm{id}) = 3$ et comme $\mathrm{Im}(f-\mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})$ alors $\dim \mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}) = 3$ et ainsi $f = -\mathrm{id}$.

(e) Conclusion : soit $M = +I$, soit $M = -I$, soit M est semblable à l'une des matrices M' suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire qu'il existe une matrice P inversible telle que $M = P^{-1}M'P$.
Géométriquement l'application est une symétrie : par rapport à un plan vectoriel pour la matrice de gauche et par rapport à une droite vectorielle pour l'autre. Si $M = -I$ il s'agit d'une symétrie centrale par rapport à l'origine.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Il est facile de voir que $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$ donc f est linéaire, de plus, P étant un polynôme de degré $\leq n$ alors $f(P)$ aussi.
2. Pour $n = 3$ on calcule l'image de chacun des éléments de la base :

$$f(1) = 1+1-2 = 0, \quad f(X) = (X+1)+(X-1)-2X = 0,$$
$$f(X^2) = (X+1)^2+(X-1)^2-2X^2 = 2, \quad f(X^3) = (X+1)^3+(X-1)^3-2X^3 = 6X.$$

Donc la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour le cas général on calcule

$$\begin{aligned} f(X^p) &= (X+1)^p + (X-1)^p - 2X^p \\ &= \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} X^k + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} X^k (-1)^{p-k} - 2X^p \\ &= \sum_{p-k \text{ pair et } k<p} 2\binom{p}{k} X^k \end{aligned}$$

Donc la matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\binom{2}{0} & 0 & \cdots & 2\binom{p}{0} & 0 & \\ & 0 & 0 & 2\binom{3}{1} & & 0 & 2\binom{p+1}{1} & \\ & & 0 & 0 & \cdots & 2\binom{p}{2} & 0 & \\ & & & 0 & & 0 & 2\binom{p+1}{3} & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots & 0 & \\ & & & & & 0 & \vdots & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dans cet exemple de matrice, p est pair. Chaque colonne commence en alternant une valeur nulle/une valeur non-nulle jusqu'à l'élément diagonal (qui est nul).

3. Nous savons que $f(1) = 0$ et $f(X) = 0$ donc 1 et X sont dans le noyau $\operatorname{Ker} f$. Il est aussi clair que les colonnes de la matrices $f(X^2), \cdots, f(X^n)$ sont linéairement indépendantes (car la matrice est échelonnée). Donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{f(X^2), f(X^3), \ldots, f(X^n)\}$ et $\dim \operatorname{Im} f = n-1$.
   Par la formule du rang $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. Comme nous avons déjà deux vecteurs du noyau alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{1, X\}$.
4. Soit $Q \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(R) = Q$. On pose ensuite $P(X) = R(X) - R(0) - R'(0)X$. On a tout fait pour que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$. De plus par la linéarité de f et son noyau alors
$$f(P) = f\big(R(X) - R(0) - R'(0)X\big) = f\big(R(X)\big) - R(0)f(1) - R'(0)f(X) = f(R) = Q.$$
   Donc notre polynôme P convient.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Notons $C = AB$ et $D = BA$. Alors par la définition du produit de matrice :
$$c_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{donc } c_{ii} = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ik} b_{ki}$$
   Ainsi
$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr} C = \sum_{1 \leq i \leq n} c_{ii} = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ik} b_{ki}$$
   De même
$$\operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr} D = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq k \leq n} b_{ik} a_{ki}$$
   Si dans cette dernière formule on renomme l'indice i en k et l'indice k en i (ce sont des variables muettes donc on leur donne le nom qu'on veut) alors on obtient :
$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq i \leq n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ik} b_{ki} = \operatorname{tr}(AB)$$
2. M et M' sont semblables donc il existe une matrice de passage P telle que $M' = P^{-1}MP$ donc
$$\operatorname{tr} M' = \operatorname{tr}\big(P^{-1}(MP)\big) = \operatorname{tr}\big((MP)P^{-1}\big) = \operatorname{tr}(MI) = \operatorname{tr} M$$
3. La trace a aussi la propriété évidente que
$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B.$$
   Fixons une base de E. Notons A la matrice de f dans cette base et B la matrice de g dans cette même base. Alors AB est la matrice de $f \circ g$ et BA est la matrice de $g \circ f$. Ainsi la matrice de $f \circ g - g \circ f$ est $AB - BA$ Donc
$$\operatorname{tr}(f \circ g - g \circ f) = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0.$$

Enoncés et corrections : Sandra Delaunay

Exo7

Sujets de l'année 2004-2005

1 Devoir à la maison

Exercice 1

Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Correction ▼ [002563]

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on appelle *projecteur* un endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$. Soit p un projecteur.

1. Montrer que $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur, calculer $p \circ (\mathrm{Id}_E - p)$ et $(\mathrm{Id}_E - p) \circ p$.
2. Montrer que pour tout $\vec{x} \in \mathrm{Im}\, p$, on a $p(\vec{x}) = \vec{x}$.
3. En déduire que $\mathrm{Im}\, p$ et $\ker p$ sont supplémentaires.
4. Montrer que le rang de p est égal à la trace de p. (On rappelle que la trace de la matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base dans laquelle on exprime cette matrice.)

Correction ▼ [002564]

Exercice 3

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée $n \times n$. On veut démontrer le résultat suivant dû à Hadamard : Supposons que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on ait

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

alors A est inversible.

1. Montrer le résultat pour $n = 2$.
2. Soit B, la matrice obtenue en remplaçant, pour $j \geq 2$, chaque colonne c_j de A par la colonne

$$c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} c_1,$$

Calculer les b_{ij} en fonction des a_{ij}. Montrer que si les coefficients de A satisfont les inégalités ci-dessus, alors pour $i \geq 2$, on a

$$|b_{ii}| > \sum_{j=2, j \neq i}^{n} |b_{ij}|.$$

3. Démontrer le résultat de Hadamard pour n quelconque.

Correction ▼ [002565]

2 Partiel

Exercice 4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrer que A est diagonalisable et trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Correction ▼ [002566]

Exercice 5

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factoriser le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

Correction ▼ [002567]

Exercice 6

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [002568]

Exercice 7

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A.

Correction ▼ [002569]

Exercice 8

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A.

1. Démontrer que $\lambda \neq 0$.
2. Démontrer que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors il est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1} .

Correction ▼ [002570]

Exercice 9

Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = \text{mathrmId}_E$.

1. Démontrer que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1.

2. Vérifier que pour tout $\vec{x} \in E$, on a

$$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = -(\vec{x} - f(\vec{x})) \text{ et } f(\vec{x} + f(\vec{x})) = (\vec{x} + f(\vec{x}))$$

et en déduire que f admet toujours une valeur propre.

3. Démontrer que si 1 et -1 sont valeurs propres, alors E est somme directe des sous-espaces propres correspondants.
4. Traduire géométriquement sur un dessin dans le cas $n = 2$.

Correction ▼ [002571]

---

3 Examen

Exercice 10

(9 points) Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que les valeurs propres de A sont 1 et 2.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A est

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En déduire la décomposition de Dunford de B.

5. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x - y + z \end{cases}$$

[002572]

Exercice 11

(7 points) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}).$$

1. Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

Justifier.

2. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A et calculer ses racines λ_1 et λ_2.
3. Soit $R_n(X) = a_n X + b_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P_A(X)$. Calculer a_n et b_n (on pourra utiliser les racines λ_1 et λ_2).

4. Montrer que $A^n = a_n A + b_n I_2$, en déduire que la matrice A^n converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers une limite A_∞ que l'on déterminera. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

[002573]

Exercice 12

(5 points) Soit A une matrice carrée, $A \in M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux et que $\mathrm{tr}(BAB^{-1}) = \mathrm{tr}A$.
Démontrer que $\det(\exp A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$ dans les cas suivants :

1. A diagonalisable.
2. A triangulaire supérieure ayant une diagonale de zéros.
3. A trigonalisable.
4. A quelconque.

[002574]

---

4 Rattrapage

Exercice 13

(7 points) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}).$$

1. Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$
Justifier.
2. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A et calculer ses racines λ_1 et λ_2.
3. Soit $R_n(X) = a_n X + b_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P_A(X)$. Calculer a_n et b_n (on pourra utiliser les racines λ_1 et λ_2).
4. Montrer que $A^n = a_n A + b_n I_2$, en déduire que la matrice A^n converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers une limite A_∞ que l'on déterminera. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

[002573]

Exercice 14

(5 points) Soit A une matrice carrée, $A \in M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux et que $\mathrm{tr}(BAB^{-1}) = \mathrm{tr}A$.
Démontrer que $\det(\exp A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$ dans les cas suivants :

1. A diagonalisable.
2. A triangulaire supérieure ayant une diagonale de zéros.
3. A trigonalisable.
4. A quelconque.

[002574]

Exercice 15

(4 points) On suppose qu'une population x de lapins et une population y de loups sont gouvernées par le système suivant d'équations différentielles :

$$(S) \quad \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

1. Diagonaliser la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Exprimer le système (S) et ses solutions dans une base de vecteurs propres de A.
3. Représenter graphiquement les trajectoires de (S) dans le repère (Oxy).
4. Discuter graphiquement l'évolution de la population des lapins en fonction des conditions initiales.

Correction ▼ [002575]

Exercice 16

(*9 points*) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Calculer $(A-I)^2$. Montrer que $A^n = nA + (1-n)I$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
3. Soient $P(X) = (X-1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q. En remarquant que $P(A) = 0$ et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme Q, retrouver A^n.
4. (a) Montrer que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme $u - mathrmId$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, on notera ε_2 une base.
   (b) Déterminer un vecteur ε_3 tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Déterminer un vecteur propre ε_1 de u non colinéaire à ε_2.
   (c) Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.Ecrire la matrice de u dans cette base, ainsi que les matrices de passage.
   (d) Retrouver A^n.

Correction ▼ [002576]

Exercice 17

(*7 points*) Soient M et A deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MA = AM$. On suppose que M admet n valeurs propres distinctes.

1. Soit x un vecteur propre de M de valeur propre λ, montrer que $MAx = \lambda Ax$, en déduire que les vecteurs x et Ax sont colinéaires, puis que tout vecteur propre de M est un vecteur propre de A.
2. On note maintenant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de M et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ celles de A.
   (a) Montrer par récurrence sur n l'égalité suivante :
$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j).$$
   En déduire que le système suivant
$$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1} \\ \vdots \\ \mu_n = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_n + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{n-1} \end{cases}$$
   admet une unique solution $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

(b) Soient M' et A' les matrices diagonales suivantes :

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \; A' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe des réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M'^k$$

et en déduire qu'il existe des réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k.$$

Correction ▼ [002577]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M=\begin{pmatrix}0&2&-1\\3&-2&0\\-2&2&1\end{pmatrix}$$

1. *Déterminons les valeurs propres de M.*

   Ce sont les racines du polynôme caractéristique

$$P_M(X)=\begin{vmatrix}-X&2&-1\\3&-2-X&0\\-2&2&1-X\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}3&-2-X\\-2&2\end{vmatrix}+(1-X)\begin{vmatrix}-X&2\\3&-2-2X\end{vmatrix}\quad(1)$$

$$=(1-X)(X^2+2X-8)\quad(2)$$

$$=(1-X)(X+4)(X-2).\quad(3)$$

   La matrice M admet donc trois valeurs propres distinctes qui sont : $1,2$, et -4.

2. *Montrons que M est diagonalisable.*

   Nous venons de voir que M, matrice réelle 3×3, admet trois valeurs propres réelles distinctes, cela prouve que M est diagonalisable.

3. *Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.*

   Les trois sous-espaces propres distincts sont de dimension 1, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

   $\lambda=1$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x,y,z) est un vecteur propre pour la valeur propre 1 si et seulement si

$$\begin{cases}2y-z=x\\3x-2y=y\\-2x+2y+z=z\end{cases}\iff\begin{cases}-x+2y-z=0\\3x-3y=0\\-2x+2y=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=y\\x=z\end{cases}$$

   Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda=1$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_1}$ de coordonnées $(1,1,1)$.

   $\lambda=2$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x,y,z) est un vecteur propre pour la valeur propre 2 si et seulement si

$$\begin{cases}-2x+2y-z=0\\3x-4y=0\\-2x+2y-z=0\end{cases}\iff\begin{cases}3x-4y=0\\-2x+2y-z=0\end{cases}$$

   Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda=2$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_2}$ de coordonnées $(4,3,-2)$.

   $\lambda=-4$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x,y,z) est un vecteur propre pour la valeur propre -4 si et seulement si

$$\begin{cases}-4x+2y-z=0\\3x+2y=0\\-2x+2y+5z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x-z=0\\2y+3x=0\end{cases}$$

   Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda=-4$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_3}$ de coordonnées $(2,-3,2)$.

   Les vecteurs $\vec{e_1},\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ forment une base de E composée de vecteurs propres, la matrice de passage P est égale à

$$P=\begin{pmatrix}1&4&2\\1&3&-3\\1&-2&2\end{pmatrix}$$

4. *Exprimons M^k en fonction de D^k, puis calculons M^k.*
On a
$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$
pour $k \in \mathbb{N}$, on a
$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix},$$
et $M^k = PD^kP^{-1}$.
Calculons donc la matrice P^{-1} : on a $P^{-1} = \frac{1}{\det P}(\mathrm{comP})^t$. Or
$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -30,$$
et
$$\mathrm{com}P = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -12 & 0 & 6 \\ -18 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$
d'où
$$P^{-1} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$
On a donc
$$M^k = PD^kP^{-1} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -5.2^{k+2} - 10(-4)^k & -12+12(-4)^k & -18+5.2^{k+2}-2(-4)^k \\ -15.2^k - 15(-4)^k & -12-18(-4)^k & -18+5.2^{k+1}+3(-4)^k \\ 5.2^{k+1} - 10(-4)^k & -12+12(-4)^k & -18-5.2^{k+1}-2(-4)^k \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on appelle *projecteur* un endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$. Soit p un projecteur.

1. *Montrons que* $\mathrm{Id}_E - p$ *est un projecteur et calculons* $p \circ (\mathrm{Id}_E - p)$ *et* $(\mathrm{Id}_E - p) \circ p$.
On a $(\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Id}_E - p - p + p^2 = \mathrm{Id}_E - p$, car $p^2 = p$, ce qui prouve que $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur.
Par ailleurs, on a
$$p \circ (\mathrm{Id}_E - p) = p - p^2 = p - p = 0 = (\mathrm{Id}_E - p) \circ p$$
donc pour tout $\vec{x} \in E$, on a $p(\vec{x} - p(\vec{x})) = \vec{0}$.
2. *Montrons que pour tout* $\vec{x} \in \mathrm{Im}\, p$, *on a* $p(\vec{x}) = \vec{x}$.
Soit $\vec{x} \in \mathrm{Im}\, p$, il existe $\vec{y} \in E$ tel que $\vec{x} = p(\vec{y})$, on a donc $p(\vec{x}) = p^2(\vec{y}) = p(\vec{y}) = \vec{x}$.
3. *On en déduit que* $\mathrm{Im}\, p$ *et* $\ker p$ *sont supplémentaires.*
Soit $\vec{x} \in E$, on peut écrire $\vec{x} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x})$, considérons $\vec{x} - p(\vec{x})$, on a $p(\vec{x} - p(\vec{x})) = 0$ ce qui prouve que $\vec{x} - p(\vec{x}) \in \ker p$. Ainsi tout élément de E s'écrit comme somme d'un élément de $\mathrm{Im}\, p$, $p(\vec{x})$, et d'un élément de $\ker p$, $\vec{x} - p(\vec{x})$, il nous reste à démontrer que la somme est directe.
Soit $\vec{x} \in \mathrm{Im}\, p \cap \ker p$, on a, d'une part $p(\vec{x}) = \vec{x}$ d'après la question 2) car $\vec{x} \in \mathrm{Im}\, p$ et, d'autre part $p(\vec{x}) = \vec{0}$ car $\vec{x} \in \ker p$, d'où $\vec{x} = \vec{0}$. On a donc
$$E = \mathrm{Im}\, p \oplus \ker p.$$
(Sachant que $\dim E = \dim\ker p + \dim \mathrm{Im}\, p$, on pouvait se contenter de démontrer que $\mathrm{Im}\, p \cap \ker p = \vec{0}$, ici nous avons explicitement la décomposition.)

4. *Montrons que le rang de p est égal à la trace de p.*
   Notons n la dimension de E et considérons une base de E de la forme

$$(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_k},\vec{e_{k+1}},\cdots,\vec{e_n})$$

   où $(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_k)$ est une base de $\operatorname{Im} p$ et $(\vec{e_{k+1}},\cdots,\vec{e_n})$ une base de $\ker p$. dans une telle base, la matrice de p s'écrit

$$M=\begin{pmatrix} I_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

   où I_k désigne la matrice identité $k\times k$, et les 0 des blocs de zéros. Le rang de p est égal à la dimension de $\operatorname{Im} p$ c'est-à-dire ici à k et on a bien $k=\operatorname{Tr}M=\operatorname{Tr}p$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée $n\times n$. On veut démontrer le résultat suivant dû à Hadamard : Supposons que pour tout $i\in\{1,\cdots,n\}$, on ait

$$|a_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$$

alors A est inversible.

1. *Montrons le résultat pour $n=2$.*
   Dans ce cas, la matrice A s'écrit

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

   et les hypothèses deviennent

$$|a_{11}|>|a_{12}| \text{ et } |a_{22}|>|a_{21}|.$$

   La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, or

$$\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

   et, compte tenu des hypothèses,

$$|a_{11}a_{22}|=|a_{11}||a_{22}|>|a_{12}||a_{21}|=|a_{12}a_{21}|,$$

   ainsi$|a_{11}a_{22}|>|a_{12}a_{21}|$ donc $a_{12}a_{21}\neq a_{12}a_{21}$ et le déterminant est non nul.

2. Soit B, la matrice obtenue en remplaçant, pour $j\geq 2$, chaque colonne c_j de A par la colonne

$$c_j-\frac{a_{1j}}{a_{11}}c_1,$$

   Calculons les b_{ij} en fonction des a_{ij}. Montrons que si les coefficients de A satisfont les inégalités ci-dessus, alors pour $i\geq 2$, on a

$$|b_{ii}|>\sum_{j=2,j\neq i}^{n}|b_{ij}|.$$

   On a

$$b_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{1j}a_{11}}{a\quad_{i1}} \quad\text{si}\quad j\geq 2 \quad\text{et}\quad b_{i1}=a_{i1}.$$

   par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=2,j\neq i}|b_{ij}| &= \sum_{j=2,j\neq i}|a_{ij}-\frac{a_{1j}}{a_{11}}a_{i1}|\\ &\leq \sum_{j=2,j\neq i}|a_{ij}|+\frac{|a_{1j}||a_{11}|}{|}a_{i1}|\\ &= \sum_{j=2,j\neq i}|a_{ij}|+\frac{|a_{i1}||a_{11}|}{\sum\quad_{j=2,j\neq i}}|a_{1j}|.\end{aligned}$$

Mais, par hypothèse, pour $i = 1$, on a

$$\sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| < |a_{11}|,$$

donc

$$\sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{1j}| < |a_{11}| - |a_{1i}|.$$

D'où, en remplaçant dans l'inégalité précédente

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2,j\neq i} |b_{ij}| &< \sum_{j=2,j\neq i} |a_{ij}| + |a_{i1}| - \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{|}a_{1i}| \\
&= \sum_{j=1,j\neq i} |a_{ij}| - \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{|}a_{1i}| \\
&< |a_{ii}| - \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{|}a_{1i}| \\
&\leq \left|a_{ii} - \frac{a_{i1}a_{11}}{a \quad {}_{1i}}\right| = |b_{ii}|.
\end{aligned}$$

3. *Démontrons le résultat de Hadamard pour n quelconque.*
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée $n \times n$, vérifiant pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

On veut démontrer que A est inversible.
Le résultat est vrai pour $n = 2$, d'après la question 1). Soit n arbitrairement fixé, supposons le résultat vrai pour $n-1$ et démontrons le pour n.
On a $\det A = \det B$ où B est la matrice construite dans la question 2)

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & (b_{ij(2\leq i,j\leq n)}) & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

Or, la matrice $(b_{ij(2\leq i,j\leq n)})$ est une matrice carrée d'ordre $n-1$ qui vérifie les hypothèses de Hadamard, d'après la question 2). Elle est donc inversible par hypothèse de récurrence. Et, par conséquent, la matrice A est inversible car $a_{11} \neq 0$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrons que A est diagonalisable et trouvons une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
Commençons par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X)$$

Les racines du polynôme caractéristique sont les réels 1 avec la multiplicité 2, et 2 avec la multiplicité 1.
Déterminons les sous-espaces propres associés : Soit E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre double 1.

$E_1 = \{V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A.V = V\}$,

$$V \in E_1 \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff x - y + z = 0$$

E_1 est donc un plan vectoriel, dont les vecteurs $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (0,1,1)$ forment une base.
Soit E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre simple 2.
$E_2 = \{V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A.V = 2V\}$,

$$V \in E_2 \iff \begin{cases} x = 2x \\ y = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases} \iff x = 0, y = 0$$

E_2 est donc une droite vectorielle, dont le vecteur $e_3 = (0,0,1)$ est une base.
Les dimensions des sous-espaces propres sont égales à la multiplicité des valeurs propres correspondantes, la matrice A est donc diagonalisable. Dans la base (e_1, e_2, e_3) l'endomorphisme représenté par A (dans la base canonique) a pour matrice.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie $P^{-1}AP = D$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factorisons le polynôme caractéristique de A.

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3 + (1-X) = (1-X)((1-X)^2+1) = (1-X)(X^2-2X+2)$$

factorisons maintenant le polynôme $X^2 - 2X + 2$, le discriminant réduit $\Delta' = 1 - 2 = -1$, ce polynôme n'admet donc pas de racines réelles, mais deux racines complexes conjuguées qui sont : $1+i$ et $1-i$. On a $P_A(X) = (1-X)(1-i-X)(1+i-X)$.
La matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique n'a pas toutes ses racines dans $\mathbb{R}$, elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car c'est une matrice 3×3 qui admet trois valeurs propres distinctes.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Démontrons que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & c \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-X)(d-X) - c^2 = X^2 - (a+d)X + ad - c^2,$$

déterminons ses racines : calculons le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (a+d)^2 - 4(ad-c^2) \\ &= a^2+d^2+2ad-4ad+4c^2 \\ &= a^2+d^2-2ad+4c^2 \\ &= (a-d)^2+4c^2 \geq 0\end{aligned}$$

On a $\Delta = 0 \iff a-d=0$ et $c=0$, mais, si $c=0$, la matrice A est déjà diagonale. Sinon $\Delta > 0$ et le polynôme caractéristique admet deux racines réelles distinctes, ce qui prouve que la matrice est toujours diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons A^2 et vérifions que $A^2 = A+2I_3$. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A+2I_3.$$

On a donc $A^2 - A = 2I_3$, c'est-à-dire $A(A-I_3) = 2I_3$, ou encore $A.\frac{1}{2}(A-I_3) = I_3$. Ce qui prouve que A est in versible et que son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{2}(A-I_3)$

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A.

1. *Démontrons que $\lambda \neq 0$.* Si $\lambda = 0$ est valeur propre de A, alors $\ker A \neq \{0\}$, donc A n'est pas injective et sa matrice ne peut pas être inversible. Par conséquent, $\lambda \neq 0$.
2. *Démontrons que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors il est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1}* .
   Comme A est inversible, on a $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}(\lambda\vec{x}) \iff \vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x}$, d'où $A^{-1}\vec{x} = \lambda^{-1}\vec{x}$.
   Ce qui prouve que $\vec{x}$ est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1}.

Correction de l'exercice 9 ▲

Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = \text{mathrmId}_E$.

1. *Démontrons que les seules valeurs propres possibles de f sont* 1 *et* -1.
   Si λ est une valeur propre de f, il existe un vecteur non nul $\vec{x} \in E$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. On a donc

   $$f^2(\vec{x}) = f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x}.$$

   Mais, $f^2 = \text{mathrmId}_E$ donc si $\vec{x}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ on a

   $$\vec{x} = f^2(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x},$$

   d'où $\lambda^2 = 1$, c'est-à-dire (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. ce qui prouve que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1.
2. *Vérifions que pour tout $\vec{x} \in E$, on a*

   $$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = -(\vec{x} - f(\vec{x})) \quad \text{et} \quad f(\vec{x} + f(\vec{x})) = (\vec{x} + f(\vec{x}))$$

   Soit $\vec{x} \in E$, on a

   $$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = f(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x} = -(\vec{x} - f(\vec{x}))$$

et
$$f(\vec{x}+f(\vec{x}))=f(\vec{x})+f^2(\vec{x})=f(\vec{x})+\vec{x}$$

Nous allons en déduire que f admet toujours une valeur propre.

Supposons que 1 ne soit pas valeur propre de f, alors, $\vec{x}=f(\vec{x}) \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$. Or, pour tout $\vec{x}\in E$, on a $f(\vec{x}+f(\vec{x}))=f(\vec{x})+\vec{x}$, donc pour tout $\vec{x}\in E$, on a $f(\vec{x})+\vec{x}=\vec{0}$, c'est-à-dire, $f(\vec{x})=-\vec{x}$. Ce qui prouve que -1 est valeur propre de f. On a même dans ce cas $f=-\text{mathrmId}_{\text{E}}$.

Si -1 n'est pas valeur propre de f, on montre par un raisonnement analogue que pour tout $\vec{x}\in E$ on a $f(\vec{x})-\vec{x}=\vec{0}$. Ce qui prouve que 1 est valeur propre de f, et dans ce cas $f=\text{mathrmId}_{\text{E}}$.

3. *Démontrons que si* 1 *et* -1 *sont valeurs propres, alors E est somme directe des sous-espaces propres correspondants.*

   Supposons maintenant que 1 et -1 sont valeurs propres de f. Ce sont alors les seules et on a, pour tout $\vec{x}\in E$,
$$\vec{x}=\frac{1}{2}(\vec{x}+f(\vec{x}))+\frac{1}{2}(\vec{x}-f(\vec{x}))$$
   Et, quelque soit $\vec{x}\in E$, $f(\vec{x}-f(\vec{x}))=-(\vec{x}-f(\vec{x}))$ et $f(\vec{x}+f(\vec{x}))=(\vec{x}+f(\vec{x}))$, c'est-à-dire $\vec{x}+f(\vec{x})$ est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 et $\vec{x}-f(\vec{x})$ est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre -1. Par ailleurs on sait que les sous-espaces propres sont en somme directe (on peut le vérifier également puisque leur intersection est l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ tels que $\vec{x}=-\vec{x}$, donc réduite au vecteur nul). par conséquent E est bien somme directe des sous-espaces propres correspondants aux valeurs propres 1 et -1.

4. *Traduisons géométriquement le cas* $n=2$.

   Rappelons que si il n'y a qu'une valeur propre, f est l'identité ou son opposée. Dans le cas où 1 et -1 sont valeur propres, leurs sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Soit u un vecteur propre tel que $f(u)=u$ et v un vecteur propre tel que $f(v)=-v$, alors si $w=au+bv$, $f(w)=au-bv$.

Correction de l'exercice 15 ▲

On suppose qu'une population x de lapins et une population y de loups sont gouvernées par le système suivant d'équations différentielles :
$$(S)\quad \begin{cases} x'=4x-2y \\ y'=x+y \end{cases}$$

1. On diagonalise la matrice
$$A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$
   Pour cela on détermine ses valeurs propres :
$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda & -2\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(1-\lambda)+2=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3).$$
   Ainsi, la matrice A admet deux valeurs propres distinctes, qui sont $\lambda_1=2$ et $\lambda_2=3$. Elle est diagonalisable. Déterminons une base de vecteurs propres :
$$\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\ 2y\end{pmatrix}\iff x=y,$$
   d'où le vecteur propre $u_1=(1,1)$ associé à la valeur propre $\lambda_1=2$.
$$\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x\\ 3y\end{pmatrix}\iff x=2y,$$
   d'où le vecteur propre $u_2=(2,1)$ associé à la valeur propre $\lambda_2=3$. Dans la base (u_1,u_2), la matrice s'écrit
$$A'=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

On a $A = PA'P^{-1}$ où
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Exprimons le système (S) et ses solutions dans une base de vecteurs propres de A.
Dans la base (u_1, u_2), le système (S) devient
$$(S') \quad \begin{cases} X' = 2X \\ Y' = 3Y \end{cases}$$
Ses solutions sont les fonctions
$$\begin{cases} X(t) = X(0)e^{2t} \\ Y(t) = Y(0)e^{3t} \end{cases}$$
3. Pour représenter graphiquement les trajectoires de (S) dans le repère (Oxy), on trace d'abord le repère (O, u_1, u_2) dans le repère $(0xy)$, puis, on trace les courbes
$$Y = \frac{Y(0)}{X(0)} X^{3/2}$$
dans le repère (O, u_1, u_2) (ou OXY).
4. On voit sur le dessin que si $Y(0)$ est strictement positif, alors la population des lapins, $x(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Si $Y(0)$ est strictement négatif alors la populations des lapins s'éteint dans la mesure ou $x(t)$ dans ce cas tendrait vers $-\infty$.

Correction de l'exercice 16 ▲

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculons les valeurs propres de A.
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3.$$
La matrice A admet une valeur propre triple qui est $\lambda = 1$, elle ne peut pas être diagonalisable sinon son sous-espace propre serait de dimension 3 or, $A \neq I$.
2. Calculons $(A - I)^2$.
$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Montrons que $A^n = nA + (1-n)I$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
$$A^n = (A - I + I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A-I)^k I^{n-k} = C_n^0 I^n + C_n^1 (A-I) = I + n(A-I) = nA + (1-n)I.$$
Car, pour $k \geq 2$, on a $(A-I)^k = 0$.
3. *Soient* $P(X) = (X-1)^2$ *et* $Q \in \mathbb{R}[X]$.
Exprimons le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q.

Il existe des polynômes S et R, avec $d^\circ R < d^\circ P$ ou $R=0$, tels que

$$Q(X) = S(X)(X-1)^2 + R(X).$$

Notons $R(X) = aX+b$ ($R(X)$ est de degré 1 car P est de degré 2) et dérivons, on obtient

$$Q'(X) = S'(X)(X-1)^2 + 2(X-1)S(X) + a,$$

on a donc $Q(1) = R(1) = a+b$ et $Q'(1) = a$, c'est-à-dire $a = Q'(1)$ et $b = Q(1) - Q'(1)$ d'où

$$R(X) = Q'(1)X + (Q(1) - Q'(1)).$$

D'après la question 2), on remarque que $P(A) = 0$, en choisissant le polynôme $Q(X) = X^n$ on a $Q(1) = 1$ et $Q'(1) = n$, donc

$$Q(A) = A^n = R(A) = Q'(1)A + (Q(1) - Q'(1))I = nA + (1-n)I.$$

4. (a) Montrons que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme $(A-I)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

$$\forall (X,Y,Z) \in Im(A-I), \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (x+y-z)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui prouve que $Im(A-I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_2 = (2,-1,1)$.

(b) Déterminons un vecteur ε_3 tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. On pose $\varepsilon_3 = (x,y,z)$,

$$u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 3x+2y-2z = x+2 \\ -x+z = y-1 \\ x+y = z+1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x+y-z) = 2 \\ -1(x+y-z) = -1 \\ (x+y-z) = +1 \end{cases} \iff x+y-z = 1.$$

On prends, par exemple $\varepsilon_3 = (1,0,0)$.
Déterminons un vecteur propre ε_1 de u non colinéaire à ε_2.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x+2y-2z = x \\ -x+z = y \\ x+y = z \end{cases} \iff x+y-z = 0.$$

On peut prendre le vecteur $\varepsilon_1 = (0,1,1)$ qui n'est pas colinéaire à ε_2.

(c) Ecrivons la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, ainsi que les matrices de passage.
On a $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ d'où la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage P est égale à

$$P=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

et son inverse

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & -1/2 & 1/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

(d) Pour retrouver A^n, on écrit $A'=I+N$, où

$$N=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

et $N^2=0$. Par ailleurs, on a $A=PA'P^{-1}$, d'où

$$A^n=PA'^nP^{-1}=P(I+N)^nP^{-1}=P(I+nN)P^{-1}=P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}2n+1 & 2n & -2n\\ -n & 1-n & n\\ n & n & 1-n\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}+(1-n)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=nA+(1-n)I.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

Soient M et A deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MA=AM$. On suppose que M admet n valeurs propres distinctes.

1. *Soit x un vecteur propre de M de valeur propre λ.*

   Montrons que $MAx=\lambda Ax$.

   On a $Mx=\lambda x$, donc $AMx=A\lambda x=\lambda Ax$. Mais, $AM=MA$, donc $MAx=AMx=\lambda Ax$. Ce qui prouve que le vecteur Ax est un vecteur propre de M pour la valeur propre λ, et comme les valeurs propres de M sont supposées distinctes, les sous-espaces propres sont de dimension 1, donc Ax est colinéaire à x. Ainsi, il existe un réel μ tel que $Ax=\mu x$, donc x est un vecteur propre de A.

2. On note maintenant $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ les valeurs propres de M et $\mu_1,\cdots,\mu_n$ celles de A.

   (a) Montrons l'égalité suivante :

   $$\begin{vmatrix} & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ \vdots & & & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j-\lambda_i).$$

   Il s'agit du déterminant de Vandermonde. Notons le $V(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. La démonstration se fait par récurrence sur n. Pour $n=2$, c'est évident. Supposons le résultat vrai pour $n-1$. Dans $V(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, retranchons à chaque colonne λ_1 fois la précédente (en commençant par la dernière colonne). On obtient

   $$\begin{vmatrix} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}-\lambda_1\lambda_2^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_n-\lambda_1 & \lambda_n^2-\lambda_1\lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}-\lambda_1\lambda_n^{n-2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda_2-\lambda_1 & \lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}-\lambda_1\lambda_2^{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_n-\lambda_1 & \lambda_n^2-\lambda_1\lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}-\lambda_1\lambda_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

On factorise alors chaque ligne par $(\lambda_i - \lambda_1)$ et on obtient

$$\begin{aligned}
V(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) &= (\lambda_2-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_1)\begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=2}^{n}(\lambda_i-\lambda_1)V(\lambda_2,\cdots,\lambda_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_i-\lambda_j)
\end{aligned}$$

car $V(\lambda_2,\cdots,\lambda_n) = \prod_{2\leq i<j\leq n}(\lambda_j-\lambda_i)$ par hypothèse de récurrence.
Ce déterminant est le déterminant du système suivant,

$$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} \\ \vdots \\ \mu_n = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} \end{cases}$$

or $V(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \neq 0$ puisque les λ_i sont supposés distincts, c'est donc un système de Cramer, il admet donc une unique solution $(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

(b) *Soient M' et A' les matrices diagonales suivantes :*

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

Montrons qu'il existe des réels $\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}$ tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k M'^k.$$

Compte tenu des matrices A' et M' l'existence de réels tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k M'^k$$

est équivalente à l'existence d'une solution pour le système précédent, d'où le résultat.
On en déduit qu'il existe des réels $\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}$ tels que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k M^k.$$

La matrice M admet n vecteurs propres linéairement indépendants qui sont également vecteurs propres de la matrice A. Par conséquent il existe une même matrice de passage P telle que $M = PM'P^{-1}$ et $A = PA'P^{-1}$, d'où l'égalité

$$A = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k M^k.$$

PBP^{-1}

$A^{n+1} = \cancel{A B^{n+1}}$

$= A A^n$

$= A(P B^n P^{-1})$

$A^n = P B^n P^{-1}$

$A^{n+1} = P B^{n+1} P^{-1}$

$A^{n+1} = (PBP^{-1})^{n+1}$

$= (PBP^{-1})^n . (PBP^{-1})$

$= A^n . (PBP^{-1})$

$= (PB^n P^{-1})(PBP^{-1})$

$= P B^{n+1} P^{-1}$ CQFM.

étaideur

Récurrence

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A et B et dite semblable, si existe une matrice inversible P tel que $A = P B P^{-1}$

$AB = BA$ Mq:

$B(\mathrm{Ka}\, A) \subset \mathrm{Ka}\, A$

Soit ~~$X \in B(\mathrm{Ka}\, A)$~~ $X \in \mathrm{Ka}(A)$.

$Y \in B(\mathrm{Ka}(A))$. tq $\cancel{\mathrm{Ka}(A) X} = Y$.

$BX = Y$

$Y \in$ $AY = ABX = BAX = B\,0 = 0$.

$Y \in \mathrm{Ka}(A)$

* $B(\mathrm{im}(A)) \subset \mathrm{im}(A)$. $X \in \mathrm{im}(A), \exists\, Ae = X$.

Soit $Y \in B(\mathrm{im}(A))$. tq $BX = Y$ mq

$Y \in \mathrm{im}(A)$ càd $\exists\, e_1$ tq $Ae_1 = Y$.

$BX = BAe_1 = Y \Rightarrow ABe_1 = Y$.

On pose $\boxed{e_1 = Be}$

A une matrice d'ordre (2) tq $A^2=0$

Mq $A=0$ ou A est semblable à $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Soit $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

~~$A = P^{-1}BP$~~ $\qquad B = P^{-1}AP$.

~~$PA = BP$~~ $\qquad$ ~~$PB = AB$~~ $\quad PB = AP$.

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 2c \\ a = 2d \\ 0 = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = 0,\quad a = 2d.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix}0\\ \end{pmatrix} . \begin{pmatrix}0\\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix}2d & b\\ 0 & d\end{pmatrix}.$$

$(2d \times d) = 2d^2 \neq 0$

$\boxed{d \neq 0}$

$b \in \mathbb{R}$.

~~PB~~ $= 0$.

$B \neq 0$.

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} =$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ex 6 : $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

rang d'une matrice.

Q. quelle rang d'une matrice A (carrée ou non)

le nombre de colonnes et/ou de lignes linéairement indépendantes de cette matrice.

a) A n'est pas une matrice nulle, donc le $rg(A) \geq 1$.

b) $\exists$ 3 lignes donc le $rg(A) \leq 3$

$$\boxed{\cancel{2} \leq rg(A) \leq 3}$$

$$rg(A) = \{1, 2, 3\}.$$

$$\boxed{rg(A) \leq 2}$$

3 Méthodes : - Sous déterminant non nul.

- 2^{ee} espace vectoriel engendrée par les colonnes

par les lignes

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ linéairement indépendant

donc $rg(A) \geq 2$

- $3^{ée}$ Métho. $3^{ée}$ ligne de $\cancel{4}$ le rang est a pi'

$rg(A) \geq 2$.

$rg(A) = 2$. $\qquad rg A \in \{2, 3\}$

Pe $rg = 2$ si la 1ère ligne est engendrée par les 2 autres. donc

$rg(A) = 2 \iff$

$(a, 2, -1, b) \in \text{Vect}\{(3, 0, 1, -4); (5, 4, -1, 2)\}$

$\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -1 \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\lambda + 5\mu = a \\ 4\mu = 2 \\ \lambda - \mu = -1 \\ -4\lambda + 2\mu = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{1}{2} \\ \lambda = -1/2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} a = 1 \\ b = 3 \end{matrix}}$$

Ex4.

$u^n = 0 \quad ; \quad u^{n-1}(x) \neq 0$

$B = \left(x, u(x), \ldots u^{n-1} \right)$

$\cancel{u(x)}$ $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$x \longmapsto \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u(x) = 0 . x + 1 . u(x) + 0\, u^2(x) + \ldots \; 0 . u^{n-1} \\ u^2(x) = 0 . x + 0 . u(x) + 1 . u^2(x) + \ldots + 0 . u^{n-1} \\ \vdots \\ u^{n-1} = 0 . x + \qquad + 1 . u^{n-1} \end{cases}$$

$u^n(x) = 0 . x + \ldots + 0 . u^{n-1}$

$$\mathrm{Mat}_B u = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u(x) & u^2(x) & \ldots & u^{n-1} & u^n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x \\ u \\ \vdots \\ u^{n-1} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A(e) & AAe \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = b \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & d \end{pmatrix}}_{P}$$

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{b \neq 0} \qquad \boxed{b \neq 0}$$

Plein

$$\begin{cases} \lambda_1 e + \lambda_2 Ae = 0 \\ \lambda_1 Ae + \lambda_2 A^2 e = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 e + \lambda_2 Ae = 0 \\ -\lambda_2 e + \lambda_1 Ae = 0 \end{cases}$$

$$(Ae, e)$$

$$\cancel{Ae =} \quad \cancel{(\lambda_1 - \lambda_2) e +}$$

$$\lambda_1 (e + Ae) = 0$$

$$= 0 \quad \lambda_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} Ae & \cancel{AAe} \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(e, Ae)}_{B} \text{ Base.}$$

$\Downarrow$

A matrice dans la Base (b_1, b_2).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

matrice de A dans la base (e, Ae).

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ Ae \end{pmatrix} = \operatorname{Mat}_E A = P^{-1} A P$$

$$\begin{array}{ccc} A(Ae) & Ae & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & \begin{array}{c} Ae \\ e \end{array} \end{array}$$

Matrice de passage

$$\boxed{\mathrm{Mat}\,A_{\mathcal{V}} = P^{-1} A P}$$

A

$$\begin{cases} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 A e_2 = 0 \\ \lambda_1 A e_1 + \lambda_2 \underbrace{A^2 e_2}_{0} = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Université Paris Dauphine
MI2E

2013
feuille n° 3

Algèbre 2- DU1

Exercice 1 Les applications suivantes sont-elles linéaires ?
- L'application $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - 1)$.
- Lapplication $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, a, axy)$ où a est un paramètre réel. On demande de discuter suivant les différentes valeurs de a.

Exercice 2 Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ dont l'expression en coordonnées est donnée par :

$$f(x, y, z) = (f_1(x, y), f_2(x, y, z)) . \tag{1}$$

A quelle condition sur f_1 et f_2 l'application f est-elle linéaire ?

Exercice 3 Soit $F = C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions lisses du segment $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
- Montrer que les applications $\mathcal{I} : F \mapsto F$ et $\mathcal{D} : F \mapsto F$ définies par

$$\mathcal{I}(f)(x) = \int_0^x f(u)\, du$$
$$\mathcal{D}(f)(x) = f'(x)$$

sont linéaires.
- La famille $\{\mathcal{I}, \mathcal{D}\}$ est-elle libre ?
- Déterminer $\ker(\mathcal{I} + \mathcal{D})$.

Exercice 4 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que l'application $\delta : E \mapsto E$ définie par

$$\delta(P)(X) = P(X - 2) - P(X) \tag{2}$$

est linéaire et déterminer son image et son noyau.

Fait

Exercice 5 Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie et $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$ deux applications linéaires. Montrer que $g \circ f = 0_{L(E,G)}$ équivaut à $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$.

ok.

Exercice 6 Soit $f \in L(E)$ avec E un espace vectoriel de dimension finie n. Vérifier que $\{g \in L(E) \,|\, g \circ f = f \circ g = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$. En déterminer sa dimension.

Exercice 7 Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie et $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$ deux applications linéaires.
- Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$.
- Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f)$.

ok.

- A quelle condition sur f a-t-on l'égalité $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$.
- A quelle condition sur g a-t-on l'égalité $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

à discuter

Exercice 8 Soient E, F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et $g, h \in L(E, F)$ deux applications linéaires.
- A quelle condition sur f et g existe-t-il $f \in L(F, F)$ tel que $f \circ g = f \circ h$?
- A quelle condition sur f et g existe-t-il $e \in L(E, E)$ tel que $g \circ e = h \circ e$?
- A quelle condition sur f et g existent-ils $e \in L(E, E)$ et $f \in L(F, F)$ tels que $f o g o e = f o h o e$?

fait

Exercice 9 Soit $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ vérifiant $f(1,1,1) = 3$, $f(1,0,2) = 0$, $f(1,0,0) = 2$. Déterminer $f(x, y, z)$ en fonction de x, y, z.

Exercice 10 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et $f_1, \ldots, f_k \in E^* = L(E, \mathbb{K})$.
- Montrer que $\dim E^* = n$.
- Montrer que $\dim \cap_{i=1}^{k} \ker f_i = n - k$ est équivalent au fait que famille $\{f_1, \ldots, f_k\}$ est libre (dans E^*).

Relier cette question à la résolution d'un système linéaire. Montrer par exemple que $e_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ et $e_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définies par

$$e_1(x, y) = x + y$$
$$e_2(x, y) = x - 2y$$

forment une base de $(\mathbb{R}^2)^*$.

ok.

Exercice 11 Soit f un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On suppose $f^3(E) = f(E)$. Montrer alors que $E = f(E) \oplus \ker f$.

Exercice 12 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.
- Quelle est la dimension de $L(E, E)$. En donner une base "naturelle" utilisant une base $(e_i)_{i \in [1,n]}$. Plus géneralement, quelle est la dimension de $L(E, F)$ avec F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie ?
- En déduire que la famille $\{Id, f, \ldots, f^{n^2}\}$ est liée et donc qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$.

ok.

Exercice 13 Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$ et $g \in L(E)$ deux applications linéaires. Montrer que $\mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\} \\ \ker(f) + \ker(g) = E\,. \end{cases} \tag{3}$$

~~à discuter~~ ok.

Exercice 14 Trouver tous les endomorphismes de E espace vectoriel de dimension finie tel que pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée. $f(x) = \alpha x$.

ok.

Exercice 15 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Déterminer $\{f \in L(E) \mid f \circ g = g \circ f \text{ pour tout } g \in L(E)\}$

à discuter

Exercice 16 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Montrer que tout endomorphisme de E est la somme de deux endomorphismes inversibles de E.

ok.

Exercice 17 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n et $f \in L(E)$. On suppose que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. On suppose maintenant que pour tout $x \in E$ il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n(x)}(x) = 0$. Montrer que $f^n(x) = 0$ quelque soit $x \in E$.

Exercice 29 : [énoncé]
Posons $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (1,1,0)$ et $\vec{e}_3 = (1,1,1)$.
Il est immédiat d'observer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de E.
Une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image des vecteurs d'une base, par suite f existe et est unique.
$(x,y,z) = (x-y)\vec{e}_1 + (y-z)\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ donc
$f(x,y,z) = (x-y)f(\vec{e}_1) + (y-z)f(\vec{e}_2) + zf(\vec{e}_3) = (y, x-y+z)$.
$\ker f = \text{Vect}\vec{u}$ avec $\vec{u} = (1,0,-1)$.
Par le théorème du rang $\dim \text{Im} f = 2$ et donc $\text{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Exercice 30 : [énoncé]
Si $V = \{0\}$: ok
Sinon, soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de V.
$f(V) = f(\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$.
Donc $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension inférieure à p. Or $V \subset f(V)$ donc $\dim f(V) \geqslant p$ et par suite $\dim f(V) = p$. Par inclusion et égalité des dimensions : $f(V) = V$.

Exercice 31 : [énoncé]
$\text{rg}(f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_p)) = \dim \text{Vect}(f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_p)) = \dim f(\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p))$
or f est injective donc $\dim f(\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)) = \dim \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ et ainsi
$\text{rg}(f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_p)) = \text{rg}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$.

Exercice 32 : [énoncé]
a) Il existe $\vec{x} \notin \ker f^{p-1}$ car $f^{p-1} \neq 0$ par définition de p.
Supposons

$$\lambda_0 \vec{x} + \lambda_1 f(\vec{x}) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(\vec{x}) = \vec{0}$$

En composant par f^{p-1} la relation ci-dessus, on obtient

$$\lambda_0 f^{p-1}(\vec{x}) = \vec{0}$$

car

$$f^p(\vec{x}) = \ldots = f^{2p-2}(\vec{x}) = \vec{0}$$

Il s'ensuit $\lambda_0 = 0$.
En composant par $f^{p-2}, \dots, f^0$ la relation initiale, on obtient successivement $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-1} = 0$.
La famille $(\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^{p-1}(\vec{x}))$ est donc libre.
b) Comme cette famille est libre et composée de p vecteurs en dimension n on a $p \leqslant n$.
Puisque $f^p = 0$, $f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0$.

Exercice 33 : [énoncé]
a) Si $\vec{x} = \vec{o}$ alors n'importe quel $\lambda_{\vec{x}}$ convient..
Sinon, la famille $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ étant liée, il existe $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ tel que $\lambda\vec{x} + \mu f(\vec{x}) = \vec{o}$.
Si $\mu = 0$ alors $\lambda \vec{x} = \vec{o}$, or $\vec{x} \neq \vec{o}$ donc $\lambda = 0$ ce qui est exclu car $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$.
Il reste $\mu \neq 0$ et on peut alors écrire $f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}}\vec{x}$ avec $\lambda_{\vec{x}} = -\lambda/\mu$.
b) Cas $(\vec{x}, \vec{y})$ liée : on peut écrire $\vec{y} = \mu\vec{x}$ avec $\mu \neq 0$ (car $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{o}$).
D'une part $f(\vec{y}) = \lambda_{\vec{y}}\vec{y} = \mu\lambda_{\vec{y}}\vec{x}$. D'autre part $f(\vec{y}) = f(\mu\vec{x}) = \mu f(\vec{x}) = \mu\lambda_{\vec{x}}\vec{x}$.
Sachant $\mu \neq 0$ et $\vec{x} \neq \vec{o}$, on conclut : $\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$.
Cas $(\vec{x}, \vec{y})$ libre :
D'une part $f(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda_{\vec{x}+\vec{y}}(\vec{x} + \vec{y})$, d'autre part
$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \lambda_{\vec{x}}\vec{x} + \lambda_{\vec{y}}\vec{y}$.
Ainsi $\lambda_{\vec{x}+\vec{y}}(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda_{\vec{x}}\vec{x} + \lambda_{\vec{y}}\vec{y}$.
Par liberté de la famille $(\vec{x}, \vec{y})$, on peut identifier les coefficients et on obtient $\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{x}+\vec{y}} = \lambda_{\vec{y}}$.
c) L'application $\vec{x} \mapsto \lambda_{\vec{x}}$ est constante sur $E \setminus \{\vec{o}\}$. Notons λ la valeur de cette constante.
On a $\forall \vec{x} \in E\setminus\{\vec{o}\}, f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, de plus cette identité vaut aussi pour $\vec{x} = \vec{o}$ et donc $f = \lambda\text{Id}$.

Exercice 34 : [énoncé]
On a

$$f \circ (f+g) = \text{Id}$$

donc, par le théorème d'isomorphisme, $f+g$ est inversible et

$$f + g = f^{-1}.$$

On en déduit $(f+g) \circ f = \text{Id}$ qui donne

$$f \circ g = g \circ f$$

Exercice 35 : [énoncé]
On a $\text{Im} f + g \subset \text{Im} f + \text{Im} g$ donc
$\text{rg}(f+g) \leqslant \dim(\text{Im} f + \text{Im} g) = \dim \text{Im} f + \dim \text{Im} g - \dim \text{Im} f \cap \text{Im} g \leqslant \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.
$\text{rg}(f) = \text{rg}(f - g + g) \leqslant \text{rg}(f-g) + \text{rg}(g)$ donc $\text{rg}(f) - \text{rg}(g) \leqslant \text{rg}(f-g)$.
Donc $\text{rg}(f) - \text{rg}(g) \leqslant \text{rg}(f-g)$ puis on conclut par symétrie sachant $\text{rg}(f-g) = \text{rg}(g-f)$.

Exercice 24 [01647] [correction]
Soient D une droite vectorielle et H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $D \not\subset H$ alors D et H sont supplémentaires dans E.

Exercice 25 [01648] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, H un hyperplan de E et D une droite vectorielle de E. A quelle condition H et D sont-ils supplémentaires dans E ?

Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 26 [01650] [correction]
Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes de $\mathbb{R}^4$:
a) $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ avec $\vec{x}_1 = (1,1,1,1), \vec{x}_2 = (1,-1,1,-1)$ et $\vec{x}_3 = (1,0,1,1)$.
b) $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ avec $\vec{x}_1 = (1,1,0,1), \vec{x}_2 = (1,-1,1,0), \vec{x}_3 = (2,0,1,1)$ et $\vec{x}_4 = (0,2,-1,1)$.

Exercice 27 [01651] [correction]
Dans $E = \mathbb{R}^{]-1,1[}$ on considère :
$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
Quel est le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) ?

Exercice 28 [01652] [correction]
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que pour $p \leqslant n$: $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p) \geqslant \mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n) + p - n$.

Applications linéaires en dimension finie

Exercice 29 [01653] [correction]
Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :
$f(1,0,0) = (0,1)$, $f(1,1,0) = (1,0)$ et $f(1,1,1) = (1,1)$.
Exprimer $f(x,y,z)$ et déterminer noyau et image de f.

Exercice 30 [01654] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, V un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $V \subset f(V) \Rightarrow f(V) = V$.

Exercice 31 [01655] [correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ injective. Montrer que pour tout famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ de vecteurs de E, on a $\mathrm{rg}(f(\vec{x}_1), \ldots, f(\vec{x}_p)) = \mathrm{rg}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$.

Exercice 32 [01656] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme nilpotent non nul de E. Soit p le plus petit entier tel que $f^p = 0$.
a) Soit $\vec{x} \notin \ker f^{p-1}$. Montrer que la famille $(\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \ldots, f^{p-1}(\vec{x}))$ est libre.
b) En déduire que $f^n = 0$.

Exercice 33 [01658] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall \vec{x} \in E$, les vecteurs $\vec{x}$ et $f(\vec{x})$ sont colinéaires.
a) Justifier que $\forall \vec{x} \in E$, $\exists \lambda_{\vec{x}} \in \mathbb{K}$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}}.\vec{x}$.
b) Montrer que pour tout couple de vecteurs non nuls $\vec{x}$ et $\vec{y}$, on a $\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$.
(indice : on pourra distinguer les cas : $(\vec{x}, \vec{y})$ liée ou $(\vec{x}, \vec{y})$ libre.)
c) Conclure que f est une homothétie vectorielle.

Exercice 34 [01659] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que
$$f^2 + f \circ g = \mathrm{Id}$$
Montrer que f et g commutent.

Rang d'une application linéaire

Exercice 35 [01660] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que
$$\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$$
puis que
$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f-g)$$

$u = (x, y, z, t) \in F \Rightarrow$

$\exists\, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$

$u = \alpha(1, 0, 0, 1, 1) + \beta(-1, -2, 3, -1) + \gamma(-5, -3, 1, 5)$

$\gamma = \dfrac{x + t}{10}$

$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, -x + 2y + z = 0\}$

$G \subset F$

$\dim G = 2$ car les 2 vecteurs ne sont pas liés

donc forme base.

les 3 vecteurs qui engendrent F sont libre

donc $\dim F = 3$

$\begin{cases} G \subset F \\ \dim(G) < \dim(F) \end{cases}$ $\quad G \subsetneq F$

$4\beta + 6\gamma + 2\alpha - 2\beta \cancel{=} 10\gamma = 2x - x + z$

$\cancel{6\beta + 10\gamma + 2\beta}$

$6\beta - 4\gamma + 2\alpha = \cancel{x + z}\ x + z$

-2

$$\begin{cases} \alpha - \beta = -2 & (1) \\ -\alpha + 2\beta = x \\ \alpha + 3\beta = y \\ 2\alpha + \beta = 3 & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = -2 + \frac{1}{3} = -\frac{6}{3} + \frac{1}{3} \\ \quad = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

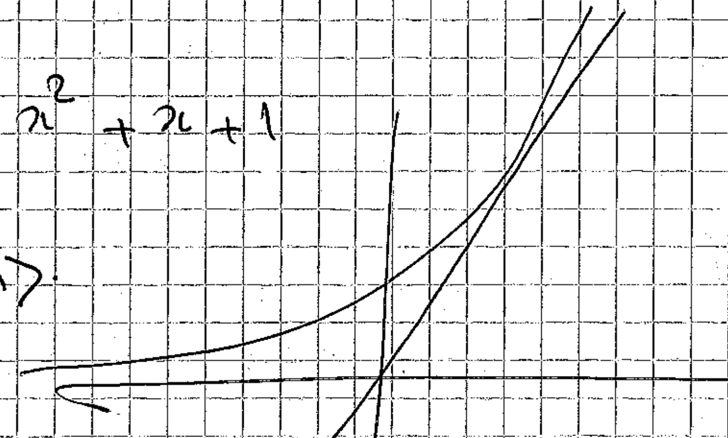
$(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

$-\frac{1}{3} + 2\beta = x$

$P(x) = x^2 + x + 1$

$=$

$F = \langle E_1 \rangle$



$x^2 =$

$x, y \quad x,$

$(x, y, z) = \alpha(1, 0, 2) + \beta(1, 2, 1)$

$\alpha + \beta = x$

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ libre dan $\mathbb{R}^2$.

$x^2 =$

$x = 7$

$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

libre dan $\mathbb{R}^2$

$\lambda + 4\beta = 0$

$\lambda + \beta = 0$

$4\beta = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = 0 \quad \beta = 0}$

$\vec{e}_1 \ (1, 1, 1)$

$\vec{e}_2 = (1, 1, 2)$

$\vec{e}_3 = (1, 2, 3)$.

$$V = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \vec{e}_i$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 7. \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 12 \end{cases} \qquad \Rightarrow \lambda_3 = 2.$$

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 5 \rightarrow \boxed{\lambda_2 = 3.}$$

$$\lambda_1 = 5 - 2 - 3 = 0.$$

$$\vec{V} = \cancel{0 \cdot (\vec{e}_1) + 3 \lambda_2 + 3}$$

$$= 0 \, \vec{e}_1 + 3 \, \vec{e}_2 + 2 \, \vec{e}_3.$$

$$E_m = \langle w \rangle = (m, 2m, m+1).C$$

$$G' = \langle e_1, \vec{e}_2 \rangle.$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ x \\ y \\ 3 \end{pmatrix} = \left(\alpha \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$E = \{(2,3)\}; (6, -9)\}$.

$\cancel{\alpha, \beta, \gamma}$

a, b, c

$\cancel{a}$ Σ

$\vec{V}_1 = (1,3,1)$

$\vec{V}_2 = (1,3,0)$

$\vec{V}_3 = (0,2,0)$.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{V}_i = 0$$

$$a_1(1,3,1) + a_2(1,3,0) + a_3(0,2,0) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 6 = 0 \\ 3a_1 + 3a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 & L_1 \\ a_1 + a_2 = 0 & L_2 \\ 3a_1 + 3a_2 + 2a_3 = 0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 = -a_2 \end{cases}$$

L_2 $L_1 \Rightarrow$ done $a_1 = 0$

$L_2 =$ $a_1 = -a_2 = 0$.

$(1,1)$ $(-2,-2)$.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq

$$\alpha(1,1) + \beta(-2,-2) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2\beta$$

$(1,1)$ et

Soit ~~$e_1 = (1,1)$~~. ~~$\vec{e}_2$~~ $\vec{V}_1 = (1,1)$.

$\vec{V}_2 = (-2,-2) = (-2)(1,1)$

$= (-2)\,\vec{V}_1$.

Liées

$(2,3)$; $(6,-9)$.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tq.

~~$2\alpha + 3\beta = 0$~~

$$\alpha(2,3) + \beta(6,-9) = 0.$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha + 6\beta = 0 \\ 3\alpha - 9\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \cancel{2(\alpha + 3\beta) = 0}.$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{L_1}{2} \\ L_2 \leftarrow \frac{L_2}{3} \end{matrix} \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha - 3\beta = 0 \end{cases}$$

$$L_1 + L_2 \Rightarrow 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

On remplace $(\alpha = 0)$ dans L_1 on obtient $(\beta = 0)$

$E = \{(1,3)\,;\,(1,2)\,;\,(1,1)\}$

$$\alpha(1,3) + \beta(1,2) + \gamma(1,1) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = -\gamma \\ 3\alpha + 2\beta - (\alpha + \beta) = 0 \end{array}\right.$$

$$2\alpha + \beta = 0$$

$$\beta = -2\alpha$$

$$\cancel{\beta = 0} \qquad \cancel{\alpha + \beta =}$$

$(1,1)$, $(3,1)$. dans $\mathbb{R}^2$.

$\cancel{\alpha}$

$u = (-1, 0, 1)$
$v = (1, 4, 0)$

$$E_m \subset E_2.$$

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 2m \\ m+1 \end{pmatrix}.$$

$$-\alpha + \beta = m.$$
$$4\beta = 2m$$
$$\alpha = m+1$$

$$\alpha = m+1$$
$$\beta = \frac{m}{2}$$

$$-\frac{m}{\cdot} - 1 + \frac{m}{2} = m.$$

$$-\frac{m}{2} = m+1.$$

$$\frac{-3m}{2} = 1.$$

$$m = \frac{-2}{3}$$

$\exists c$

$v_1\ (1,1,0) = c$

$v_2 = (4,1,4) = c\,(1,1,0).$

$= 4 = c$

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$

$\vec{e_1} = (1,0,0)$.

$\vec{e_2} =$

$= E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y \ , z \in \mathbb{R}\}$.

$= E_1 = \{(x, -x, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

$= \cancel{x(1,-1,0) + z(}$

$= (x, -x, 0) + (0, 0, z)$.

$= x(1,-1,0) + z(0,0,1)$. tel que

$x \in \mathbb{R}$

$z \in \mathbb{R}$

$E_1 = \mathrm{Vect}\{(1,-1,0), (0,0,1)\}$.

Sous vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$E_2 = \{((x,y,z),t) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0 \ , y=z \ , t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(0,y,y,t) \in \mathbb{R}^2$

$= (0,y,y,\cancel{0}) + \cancel{(0,1,1,0)} \ (0,0,0,t)$

$= y\underbrace{(0,1,1,0)} + t\underbrace{(0,0,0,1)}$.

~~x =~~ $x = 0$ ou $y = 0$.

$= \{\cancel{(x,y,z)}$

$= \underbrace{\{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3}_{E_1}\} \cup \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$= \{$

$E_2 = \underset{sp}{\underline{E_1}} \cup \underset{sp}{\underline{E_2}}$.

$($ $(0,1,1)$ et $(1,0,1)$.

$(1,1,2)$. $\in \mathbb{R}^2$

Sol. $\notin E_1$

$E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geq 0\}$.

$x^2(x+y) \geq 0$.

$x=0$ et $(x = -y)$

$x \geq 0$ $(x+y) \geq 0$

$x \geq 0$. $x \geq -y$. $\}$

$((1, y, z)$

$\cancel{(x^3 + \frac{1}{2} y^2}$

$\cancel{(x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{1}{2}y^2} \geq 0$.

x^2 $+$

$F_1 \cup F_2$ ssi $\cancel{F \subset G}$ ou $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

~~Théorème~~ :

$F_1 \cup F_2$ ssi $F_1 \subset F_2$. ou $F_2 \subset F_1$

~~Contre F~~ $F_1 \not\subset F_2$ et F_2 $F_2 \not\subset F_2$

$\Rightarrow$. non $B \Rightarrow$

$\Rightarrow$. $\underbrace{F_1 \cup F_2 \Rightarrow A \Rightarrow B}$

Si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1 \Rightarrow F_1 \cup F_2$ et

Contraposé : ~~Si F_1~~

$(\vec{x} \in F$ non et A $\Rightarrow \vec{x} \notin G)$ et $\exists y_1 \in F_1, y_2 \notin G$.

$\vec{x_1 + y_1} \notin F$.

$\lambda = 1.$ $(0,0)$

$\lambda = -2.$

(a_1, b)

$x_1^2 + x_1 x_2 \geq 0$

$(x_1, x_2) \in E_1$ $y_1^2 + y_1 y_2 \geq 0$

x_1

$x(x+y) \geq 0$

$x \geq 0$ et $(x+y) \geq 0.$

$(0, 1)$

$x_1 + y_1, x_2 + y_2$ $\cancel{(-1, -1)}$ $(x_1+y_1)^2 + (x_1+y_1)(x_2+y_2) \geq 0$

$(+1, -2)$ $x_1^2 + y_1^2$ $x_1 y_2 +$

$\cancel{(-1, 0)}$

$\cancel{(-1, -1)}$

$1 - 2 + 4.$

(x_1, y_1) $4 - 4 + 4$

$(0,1) \in \mathbb{R}^2.$

$0 + 0.1 + 1^2 = 1 \geq 0$

$1 - 2 + 4 \geq 0$

$(1, -1)$

$1 \cancel{-1} \cancel{+1}$

$f(0) = f(1)$.

$(f \cdot g)(0)$.

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$x \longmapsto f(x)$.

$x^2 + xy \geq 0$.

$(0, -1)$

$(1, -1)$

$f(0) = f(1)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall g \in F$.

$g(0) = g(1)$.

$(2, -2)$

$4 \quad -4$

$[f+g](0) = [f(0) + g(0)]$

$= f(1) + g(1)$.

$(f+g)(1) = f(1) + g(1)$.

$f + g$

$\cancel{f(0)} (f+g)(0) = f(0) + g(0) = 1 + 1 \neq \cancel{2} \neq 1$.

$f(0) + g$.

$\lambda f(0) =$

$(\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda f(1) = (\lambda f)(1)$.

$(1, y, z)$

$(1, 2, 2)$.

E_1'
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$(0, 0)$

$\cancel{(0, 0)}$. $\quad (-\frac{1}{2}, 0)$.

$(0, -1)$

$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

$(0, 1)$.

$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \leq 0$

$\cancel{\left(-\frac{1}{2}, 0\right)}$

$(-$

$\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq 0$

$x^2 + y^2 \geq$

$(0, -4)$

$(\quad , 0$

$\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq 0$

$-$ $\quad$ $-$

$(x_1, y_1) \in$

$(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$\left[x_1 + x_2 + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right]^2 + \frac{1}{2}\left[(y_1 + y_2)\right]^2$

4.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer P^{-1} on utilise l'algorithme de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

d'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelle relation relie A, B, P et P^{-1} ?
La matrice A est la matrice qui représente l'application T dans la base $\mathcal{E}$ et B est la matrice qui représente la même application dans la base $\mathcal{F}$; par conséquent $B = Q^{-1}AQ$ où Q est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$.
Par définition Q est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{E}$, c'est-à-dire

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

donc la matrice P est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ et $B = P^{-1}AP$.
On remarque que P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{F}$ à la base $\mathcal{E}$.

Exercice 8 EX 2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule le polynôme caractéristique de la matrice A.

$$\begin{aligned}
P(x) &= \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 4-x & 1 & -1 \\ 2 & 5-x & -2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-x \\ 2 & 5-x & -2 \\ 4-x & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-x \\ 0 & 3-x & -2(3-x) \\ 0 & -3+x & -(3-x)^2 \end{vmatrix} = \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-x \\ 0 & 3-x & -2(3-x) \\ 0 & 0 & -(3-x)(5-x) \end{vmatrix} = (3-x)^2(5-x)
\end{aligned}$$

donc les valeurs propres de A sont $a_1 = 3$ avec multiplicité 2 et $a_2 = 5$.
On sait que la matrice A est diagonalisable si et seulement si les vecteurs propres forment une base de $\mathbb{R}^3$; on cherche donc les vecteurs propres de A.

$$\begin{aligned}
E_1 &= \ker(A - 3I) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2 &= \ker(A - 5I) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, -2x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_3 = 0 \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Il reste, donc, à vérifier que la famille $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre ; pour cela on considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et on conclut que la famille $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, la matrice A est diagonalisable et dans la base des vecteurs propres $\mathcal{E}$ s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

ATTENTION : Je n'ai pas utilisé le théorème que j'ai introduit mardi en TD parce qu'il n'a pas été démontré. Donc, de préférence, utilisez la méthode ici expliquée pour résoudre les exercices.

Exercice 9 Ex 3'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour trouver les valeurs propres d'une matrice sans calculer le polynôme caractéristique on observe que $\det(A - xI) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A - xI) < n$ où n est la taille de la matrice.
Considérons la matrice $A - xI$

$$\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} \xrightarrow{l_i = l_i - l_1} \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ x & -x & 0 \\ x & 0 & -x \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 = c_1 + c_2 + c_3}$$
$$\begin{pmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}$$

- $x = 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A - xI) = 1 < 3$ et donc $a_1 = 0$ est une valeur propre de A ;
- $x = 3 \Rightarrow \operatorname{rg}(A - xI) = 2 < 3$ et donc $a_2 = 3$ est une valeur propre de A.

De plus, $\dim(E_1) = \dim(\ker(A - a_1 I)) = 3 - \operatorname{rg}(A - a_1 I) = 2$ et $\dim(E_2) = \dim(\ker(A - a_2 I)) = 3 - \operatorname{rg}(A - a_2 I) = 1$.
La matrice A est-elle diagonalisable ? Oui.

Première preuve

On démontre que si E_1 est le sous-espace propre associée à la valeur propre a_1 et E_2 est le sous-espace propre associée à la valeur propre a_2 avec $a_1 \neq a_2$ alors $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. En effet, soit $x \in E_1 \cap E_2$ alors

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in E_1 \\ x \in E_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ax = a_1 x \\ Ax = a_2 x \end{array} \right. \Rightarrow a_1 x = a_2 x \Rightarrow (a_1 - a_2)x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Dans l'exercice donc, E_1 et E_2 sont en somme directe et $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$ car $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) = 3$. Par conséquent, si on appelle $\mathcal{E}_1$ la base de E_1 et $\mathcal{E}_2$ la base de E_2 on remarque que $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$ qui est composée de vecteurs propres de A. Donc les vecteurs propres de A forment une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice est diagonalisable.

Deuxième preuve

Soit $\mathcal{E}_1 = \{v_1, v_2\}$ une base de E_1 et $\mathcal{E}_2 = \{v_3\}$ une base de E_2 ; alors $\mathcal{E} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Montrons que la famille $\mathcal{E}$ est libre ; soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0; \tag{1}$$

en multipliant (1) par a_2 et en appliquant la matrice A à (1), on trouve les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_2 v_1 + \lambda_2 a_2 v_2 + \lambda_3 a_2 v_3 &= 0 \qquad (2) \\ \lambda_1 a_1 v_1 + \lambda_2 a_1 v_2 + \lambda_3 a_2 v_3 &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

or, si on soustrait l'équation (3) à (2) on a

$$\lambda_1 (a_2 - a_1) v_1 + \lambda_2 (a_2 - a_1) v_2 = 0$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 (a_2 - a_1) = 0 \\ \lambda_2 (a_2 - a_1) = 0 \end{array} \right.$$

car la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre. Étant donné que $a_1 \neq a_2$, on peut en conclure $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$ grâce à (1). Donc les vecteurs propres de A forment une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice est diagonalisable.

Exercice 10 Exo5 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 2 & 4-x & 2 \\ 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3-x \\ 0 & 2-x & -2(2-x) \\ 0 & 0 & -(2-x)(6-x) \end{vmatrix} = (2-x)^2(6-x). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont $a_1 = 2$ et $a_2 = 6$. On étudie maintenant la dimension de $E_1 = \ker(A - a_1 I)$.

$$A - a_1 I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(A - a_1 I) = 1$ et $\dim(E_1) = 2$. Par conséquent (voir l'exercice 9 pour la démonstration) la matrice A est diagonalisable et dans la base des vecteurs propres s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= \det(B - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 1 & 2-x & -1 \\ -1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = \\ &= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4-x \\ 0 & 3-x & 3-x \\ 0 & 0 & (3-x)(1-x) \end{vmatrix} = (3-x)^2(1-x). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont $a_1 = 3$ et $a_2 = 1$. On étudie maintenant la dimension de $E_1 = \ker(A - a_1 I)$.

$$B - a_1 I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(B - a_1 I) = 1$ et $\dim(E_1) = 2$. Par conséquent (voir l'exercice 9 pour la démonstration) la matrice B est diagonalisable et dans la base des vecteurs propres s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x) = \det(C - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3.$$

La seule valeur propre de C est $a_1 = 1$ avec multiplicité 3. On étudie maintenant la dimension de $E_1 = \ker(A - a_1 I)$.

$$C - a_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(C - a_1 I) = 1$ et $\dim(E_1) = 2$. Soit $\mathcal{E}_1 = \{v_1, v_2\}$ une base de E_1 ; $\mathcal{E}_1$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ parce qu'elle contient seulement deux vecteurs. Par conséquent, il n'existe pas une base de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs propres de C (on ne peut pas trouver trois vecteurs propres linéairement indépendants) et la matrice C n'est pas diagonalisable.

Bon courage à tous pour l'examen !

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ Base

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ & -1 & 1 \\ 1 & & \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

rg = 1.

Ker A = 2.

et a pour base la famille

$(e_2 - e_1 , e_3 - e_1)$

$\cancel{A(e_2 - e_1)}$

$\vec{V}_1 = e_2 - e_1 \to 0$

$\vec{V}_2 = e_3 - e_1 \to 0$ Soit $a(e_1, e_2 - e_1, e_3 - e_1)$.

Soit f l'endomorphisme de A dans la base can

$f(e_1) =$

Ex 1 :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 5$ les valeurs propre avec le polynôme caractéristique

Notons.

E_1 et E_5 les sous espace propre

$E_1 = \{ u \in E \text{ tq } A \cdot u = -u \}$. $\begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_5 = \{ \cdot \in E \text{ tq } Au = 5 \cdot u \}$.

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1$; $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

$4y = -2x.$ $\left\{ \begin{array}{l} x + 4y = -x. \\ 2x + 3y = -y \end{array} \right.$ $\Longleftrightarrow$ ~~$4y = 0$~~

$-4y = 2x$ $2\cancel{x + 2y} = 0.$

$2y = -x.$ ~~$x = 0$~~

$E_1 = \langle (0,0)$

$E_5 : \left\{ \begin{array}{l} x + 4y = 5x. \\ 2x + 3y = 5y \end{array} \right.$ $\Longleftrightarrow$ $4y = 4x.$ $\quad = P^{-1} A P = D$

$2x = 2y.$

$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y$

$P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \; L_2 + \frac{L_1}{2}$

$P = \begin{pmatrix} \cancel{0}2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$

Solutions de l'exercice IV de la feuille d'exercices n°5: diagonalisation de matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$.

   (a) Le système $A\vec{V} = \vec{V}$ a un degré de liberté: $\vec{V}$ est de la forme $a\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

   On peut choisir $\vec{V}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   (b) Le système $A\vec{V} = 4\vec{V}$ a un degré de liberté: $\vec{V}$ est de la forme $a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

   On peut choisir $\vec{V}_1^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   On a donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et on vérifie que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Une seule valeur propre pour A : $\lambda_1 = 3$.

   Le système $A\vec{V} = 3\vec{V}$ a un degré de liberté: $\vec{V}$ est de la forme $a\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

   Cette matrice n'est pas diagonalisable.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

   (a) Le système $A\vec{V} = \vec{V}$ a deux degrés de liberté: $\vec{V}$ est de la forme $a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

   On peut choisir $\vec{V}_1^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Le système $A\vec{V} = 2\vec{V}$ a un degré de liberté: $\vec{V}$ est de la forme $a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

   On peut choisir $\vec{V}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   On a donc $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 2$.

   (a) Le système $A\vec{V} = -4\vec{V}$ a un degré de liberté: $\vec{V}$ est de la forme $a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

   On peut choisir $\vec{V}_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Le système $A\vec{V} = 2\vec{V}$ a un degré de liberté: $\vec{V}$ est de la forme $a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

On peut choisir $\vec{V}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice n'est pas diagonalisable.

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$.

(a) Le système A$\vec{V} = -3\vec{V}$ a un degré de liberté: $\vec{V}$ est de la forme $a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

On peut choisir $\vec{V}_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Le système A$\vec{V} = 3\vec{V}$ a trois degrés de liberté: $\vec{V}$ est de la forme $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

On peut choisir $\vec{V}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{V}_2^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_3^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. .

On a donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et on vérifie que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemples et exercices corrigés de diagonalisation de matrices

Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

1. Le système $A\vec{V} = \vec{V}$ a un degré de liberté: $\vec{V}$ est de la forme $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

   On choisit $\vec{V}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Le système $A\vec{V} = -\frac{1}{2}\vec{V}$ a deux degrés de liberté: $\vec{V}$ est de la forme $a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

   On choisit $\vec{V}_1^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ATTENTION: le choix des vecteurs propres n'est jamais unique, cela dépend de la manière dont on mène le calcul pour la résolution du système. Les seuls critères objectifs sont que ces vecteurs doivent être solution du système considéré, doivent former une famille libre et que l'on doit en choisir autant que de degrés de liberté. Ceci est nécessaire et suffisant.

On a donc $\mathcal{F} = \{\vec{V}_1^1, \vec{V}_1^2, \vec{V}_2^2\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

La matrice associée à cette famille est donc $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On trouve $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et on vérifie que $F^{-1}AF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

1. Le système $A\vec{V} = \vec{0}$ a un degré de liberté: $\vec{V}$ est de la forme $a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

   On choisit $\vec{V}_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Le système $A\vec{V} = 2\vec{V}$ a un degré de liberté: $\vec{V}$ est de la forme $a \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

   On choisit $\vec{V}_1^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Le système $A\vec{V} = 3\vec{V}$ a un degré de liberté: $\vec{V}$ est de la forme $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

   On choisit $\vec{V}_1^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a donc $\mathcal{F} = \{\vec{V}_1^1, \vec{V}_1^2, \vec{V}_1^3\} = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

La matrice associée à cette famille est donc $F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On trouve $F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $F^{-1}AF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Valeurs propres: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$.

$\vec{V}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{V}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{V}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $F^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Exercice 2

$A = \begin{pmatrix} \frac{19}{20} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{20} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.2 \\ 0.05 & 0.8 \end{pmatrix}$ (voir un problème d'évolution vu en classe).

Valeurs propres: $\lambda_1 = \frac{3}{4}, \lambda_2 = 1$.

$\vec{V}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{V}_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

Exercice 3

$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Valeurs propres: $\lambda_1 = 15, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5$.

$\vec{V}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{V}_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{V}_3^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{V}_3^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Valeurs propres: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2$.

$\vec{V}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{V}_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{V}_3^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Université Paris Dauphine 2013
MI2E feuille n° 5

Algèbre 2- DU1

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondant. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver une base de diagonalisation de A.

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique.
2. Donner une base de diagonalisation de A.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les réduire.

Exercice 6 Soit A une matrice 2×2. Soit d le déterminant de A, et a sa trace.

1. Montrer que le polynome caractéristique de A est $P(x) = x^2 - ax + d$.
2. Montrer l'identité matricielle suivante : $A^2 - aA + dI = 0$.

On rappelle que le polynome $P(x)$ a deux racines réelles distinctes a_1 et a_2 si et seulement si son discriminant $\Delta = a^2 - 4d$ est strictement positif. Dans ce cas, montrer que la matrice A est diagonalisable.
Si $\Delta < 0$, le polynome P n'a pas de racine réelle, mais il a deux racines complexes $\frac{a \pm i\delta}{2}$, où δ est la racine de $-\Delta$. En utilisant l'identité matricielle ci-dessus, montrer que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\frac{2A - aI}{\delta}\right)^2 = -Id.$$

En utilisant l'un des exercices ci-dessus, montrer alors qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle A s'écrit

P.

$$\begin{bmatrix} a/2 & -\delta/2 \\ \delta/2 & a/2 \end{bmatrix}.$$

Il reste a traiter le cas où $\Delta = 0$. Le polynome P a alors une racine double $a/2$. Montrer que $(A - (a/2)I)^2 = 0$. Conclure que, soit $A = aI/2$ soit il existe une base dans laquelle A est représentée par la matrice

$$\begin{bmatrix} a/2 & 1 \\ 0 & a/2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 7 Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de A. Si A est diagonalisable, exhiber une base de diagonalisation et les valeurs propres associées. Si A n'est pas diagonalisable, exhiber une base dans laquelle la matrice de A est triangulaire supérieure. Calculer A^k quelque soit $k \geqslant 2$. Même question avec $B = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ est toujours diagonalisable quelque soit a, b dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8 Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1+x & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & . & . & 1 \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ . & & & & . & 1 \\ 1 & . & & . & 1 & 1+x \end{bmatrix}$ avec x un réel quelconque.

Montrer que A est une matrice diagonalisable sans calculer son polynôme caractéristique (on pourra remarquer que x est valeur propre de la matrice). $.(x+n).$

Exercice 9 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Diagonaliser l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ défini par $X \in M_2(\mathbb{R}) \mapsto AX \in M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 10 Soit $A \in M_k(\mathbb{R})$ avec k impair.
- Quel est le degré du polynôme caractéristique de la matrice A ? Montrer que A admet au moins un vecteur propre.
- On suppose que l'espace propre associé est de dimension 1. Donner un exemple d'une telle matrice pour $k = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 On suppose que f est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$−espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que si f est diagonalisable, alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des réels deux à deux distincts tels que $\prod_{i=1}^{k}(f - \lambda_i id) = 0$.
2. On suppose que $(f - \lambda_1 id) \circ (f - \lambda_2 id)$ est non injectif pour des réels λ_1, λ_2 distincts. On rappelle que F_{λ_1} et F_{λ_2} sont alors en somme directe (rappeler pourquoi). On suppose que ces deux espaces sont non réduits à $\{0\}$. En utilisant le théorème du rang sur $f - \lambda_1 id$, montrer que $F_{\lambda_1} \oplus F_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}\,((f - \lambda_1 id) \circ (f - \lambda_2 id))$.
3. Généraliser la question précédente à $\prod_{i=1}^{k}(f - \lambda_i id) = 0$.
4. Montrer la réciproque de la première question.

Exercice 12 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. On suppose qu'un sous-espace vectoriel F est stable par f.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors il existe un polynôme non nul P à racines simples tel que $P(f) = 0$.
2. Montrer que le polynôme caractéristique de $f_{|F}$ divise celui de f.
3. Montrer que si f est diagonalisable, alors toute restriction de f à un sous-espace stable est diagonalisable. Pour cela, on pourra utiliser l'exercice précédent et la question précédente.

Exercice 13 Dans cet exercice, on suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie.

1. La somme de deux endomorphismes diagonalisables est-elle diagonalisable ?
2. Le produit de deux endomorphismes diagonalisables est-il diagonalisable ?
3. Montrer que si f et g sont diagonalisables dans une même base alors $fg = gf$ et que fg est diagonalisable.

On cherche à montrer que si f et g sont diagonalisables et $fg = gf$ alors ils sont diagonalisables dans une même base.

1. Montrer que si $f(V_\lambda(g)) \subset V_\lambda(g)$ avec $V_\lambda(g)$ le sous-espace propre de g associé à la valeur propre λ (ceci quelque soit λ).
2. En déduire que g et f sont diagonalisables dans une même base. (On peut admettre le résultat de l'exercice précédent).
3. Que pouvez-vous dire (proposer une réduction possible pour h et g) si on retire l'hypothèse que g est diagonalisable.

ex 8 :

$$A = \begin{pmatrix} 1+n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+n & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & 1+n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1+n & 1 & 1 \\ 1 & 1+n & 1 \\ 1 & 1 & 1+n \end{pmatrix}$$

$0 \quad | \; +1$

$\boxed{2}$ n Vap le.

$n-1$

$$\det(A - nI_3) = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

n V propre :

$$E_n = \operatorname{Ker}(A - I_3) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{E_2 : \dim 2}$

$(\vec{V_1}, \vec{V_2})$

$z + y + t = 0$

$\forall u \in \mathbb{R}$

$y =$

$$A^n = (A - I + I)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (A - I)^p I^{n-p}$$

$$= C_n^0 (\cancel{A-I}) I^n + C_n^1 (A - I) +$$

$$= I + n(A - I) = nA + (1-n) I$$

---

lundi 03/06/2013 Clal à PD 8

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 9-\cancel{\lambda} \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-2-\lambda) + 9$$

$$= [-8 - 4\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 9$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + 9y = 0 \\ -x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \boxed{x = -3y}$$

$$u = \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3 \end{pmatrix}}$$

$$E_1 = \langle (-3, 1) \rangle$$

$$\vec{e}_1 (1, 0)$$

$$\{\vec{v}_1, \vec{e}_1\} \quad \text{b.b.e.}$$

$$\begin{array}{cc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

$\vec{v}_1 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

$\vec{v}_2 = \vec{e}_1$

$$P^{-1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{v}_2 \\ \vec{e}_2 = \vec{v}_1 + 3\vec{e}_1 = \vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 \end{cases}$$

$$\overline{A} = P^{-1} A P =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A P =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 3 & - \\ 10 & - \end{pmatrix}$$

$$P(A) = \cancel{\det}(A - I)^2$$

$$G_1 \quad A^{p} = (A - I + I)^{p}$$

$$= (A - I) \sum_{p=0}^{n} C_n^p (A - I)^p I^{n-p}$$

$$\begin{bmatrix} a-x & 1 \\ 1 & b-x \end{bmatrix} \quad P_A(x) = \cancel{ab - 1}$$

$$(a-x)(b-x) - 1 = ab - ax - xb + x^2 - 1$$

$$= x^2 - (a+b)x + ab - 1$$

$$D : (a+b)^2 - 4(ab - 1)$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab + 4 = (a-b)^2 + 4 > 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1+n & 1 & 1 \\ 1 & 1+n & 1 \\ 1 & 1 & 1+n \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I_2)$,

$\det(A -$

$$\begin{vmatrix} 1+x-\lambda & 1 \\ 1 & 1+x-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(1+x-\lambda)^2 - 1$$

$$(1+x-\lambda+1)\,\cancel{(1+x-\lambda-1)}$$

$$(x-\lambda)$$

$$(2+x-\lambda)$$

$$\boxed{\begin{cases} \lambda = x+2 \\ \lambda = x \end{cases}}$$

$(x+n)$

$$\begin{vmatrix} 1-3 & \phi & \phi \\ 1 & 1-3 & \phi \\ \phi & \phi & 1-3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+x-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+x-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+x-\lambda \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_2$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-\lambda & 1 & 1 \\ -x+\lambda & 1+x-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1+x-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \pm\left[(x-\lambda) - (-x+\lambda)\right] + (1+x-\lambda)\left[(x-\lambda)(1+x-\lambda) + (x-\lambda)\right]$$

$$= \pm\left[-2(x-\lambda)\right] + (1+x-\lambda)(x-\lambda)\left[1+x-\lambda+1\right].$$

$$= (x-\lambda)\left[-2 + (1+x-\lambda)(2+x-\lambda)\right].$$

$$\left[-2 + (1+\cancel{x}-\cancel{x}-3)(2+\cancel{x}-\cancel{x}-3)\right].$$

$$(-2) \qquad (-1)$$

$x+n$ V. P.

$$|A-(x+n)I|$$

$$= \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1-n & & & \vdots \\ & & \ddots & & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{n} C_i$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-n & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1-n \end{vmatrix}$$

Mr. BEY

Exercices Corrigés

Exercice 1 :

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 2y + z = 0\} \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - y + 2z = 0\}. \end{aligned}$$

1. Donner une base de F, une base de G, en déduire leur dimension respective.
2. Donner une base de $F \cap G$, et donner sa dimension.
3. Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base de F trouvée en 1 et des vecteurs de la base de G trouvée en 2. est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Est-elle libre ?
4. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 2 :

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par

$$\begin{aligned} F &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ b - 2c + d = 0\} \\ G &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ a = d \text{ et } b = 2c\}. \end{aligned}$$

Donner une base de F, de G et de $F \cap G$. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 3 :

On considère dans $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{lll} v_1 = (1,3,-2,2) & v_2 = (2,7,-5,6) & v_3 = (1,2,-1,0) \\ w_1 = (1,3,0,2) & w_2 = (2,7,-3,6) & w_3 = (1,1,6,-2). \end{array}$$

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3) et G celui engendré par (w_1, w_2, w_3).

1. Montrer que v_3 est une combinaison linéaire de v_1 et v_2. En déduire une base de F.
2. Montrer que w_3 est une combinaison linéaire de w_1 et w_2. En déduire une base de G.
3. Montrer que (v_1, v_2, w_1, w_2) est liée. En déduire une base de $F + G$.
4. Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3;\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$. Donner une base de E.
5. Montrer que $F + G = E$. La somme est-elle directe ? Quelle est la dimension de $F \cap G$?

Exercice 4 :

On considère dans $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1,2,0,1) \quad v_2 = (1,0,2,1) \quad v_3 = (2,0,4,2)$$
$$w_1 = (1,2,1,0) \quad w_2 = (-1,1,1,1) \quad w_3 = (2,-1,0,1) \quad w_4 = (2,2,2,2).$$

1. Montrer que (v_1, v_2) est libre et que (v_1, v_2, v_3) est liée.
2. Montrer que (w_1, w_2, w_3) est libre et que (w_1, w_2, w_3, w_4) est liée.
3. Montrer que (v_1, v_2, w_1, w_2) est libre.
4. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3).
   (a) Déterminer une base de F.
   (b) Donner un supplémentaire de F.
5. Soit G le sous-espace vectoriel engendré par (w_1, w_2, w_3, w_4). Déterminer une base de G.
6. (a) A l'aide des bases trouvées en 4. et 5. construire un système générateur de $F+G$.
   (b) En déduire que $F+G=\mathbb{R}^4$.
7. (a) Montrer que v_1+v_2 est dans $F \cap G$.
   (b) Calculer la dimension de $F \cap G$.
   (c) Donner une base de $F \cap G$.
8. F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 5 :

On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x+y=0 \text{ et } x+z=0\}.$$

1. Donner une base de F.
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On pose $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3,4)$ et $u_3 = (-1,0,-1,0)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?
4. On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3. Quelle est la dimension de G ?
5. Donner une base de $F \cap G$.
6. En déduire que $F+G=\mathbb{R}^4$.
7. Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

Exercice 1

1. On trouve d'abord une famille génératrice de F. On a :

$$(x,y,z)\in F \iff x-2y+z=0 \iff \begin{cases} x &= y\times 2 + z\times(-1) \\ y &= y\times 1 + z\times 0 \\ z &= y\times 0 + z\times 1. \end{cases}$$

Les vecteurs $(2,1,0)$ et $(-1,0,1)$ engendrent donc F. De plus, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, dont la famille est libre. C'est une base de F qui est de dimension 2.
On procède de même pour G :

$$(x,y,z)\in F \iff 2x-y+2z=0 \iff \begin{cases} x &= x\times 1 + z\times 0 \\ y &= x\times 2 + z\times 2 \\ z &= x\times 0 + z\times 1. \end{cases}$$

On trouve cette fois que $((1,2,0),(0,2,1))$ est une base de G qui est de dimension 2.

2. C'est la même chose, mais cette fois on a deux équations.

$$(x,y,z)\in F\cap G \iff \begin{cases} x-2y+z &= 0 \\ 2x-y+2z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-2y+z &= 0 \\ 3y &= 0 \\ z &= z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z &= x\times(-1) \\ y &= z\times 0 \\ z &= z\times 1 \end{cases}$$

Ainsi, le vecteur $(-1,0,1)$ engendre $F\cap G$. Comme une famille constituée d'un vecteur non-nul est libre, $(-1,0,1)$ est une base de $F\cap G$ qui est de dimension 1.

3. Notons $u=(2,1,0)$, $v=(-1,0,1)$, $w=(1,2,0)$ et $t=(0,2,1)$. Il s'agit de montrer que (u,v,w,t) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
Méthode 1. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et essayons d'écrire $(x,y,z)=au+bv+cw+dt$. Alors on doit résoudre le système

$$\begin{cases} 2a-b+c &= x \\ a+2c+2d &= y \\ b+d &= z \end{cases} \iff \begin{cases} 2a-b+c &= x \\ -2b+2d &= y-2x \\ b+d &= z \end{cases}$$

Les deux dernières équations permettent de calculer b et d. Dans la première, on peut trouver une solution en imposant $c=0$, et on obtient une valeur pour a.
Méthode 2. L'espace vectoriel engendré par la réunion des deux bases est $F+G$. On doit démontrer que $F+G=\mathbb{R}^3$, et pour cela il suffit de démontrer que $\dim(F+G)=3$. Par le théorème des quatre dimensions, on a

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)=2+2-1=3,$$

ce qu'il fallait démontrer.
La famille (u,v,w,t) n'est pas libre car une famille libre de $\mathbb{R}^3$ a toujours moins de trois éléments.

4. F et G ne sont pas supplémentaires car $F\cap G\neq\{0\}$.

Exercice 2

F est donné par une équation. Il faut d'abord en trouver un système générateur. On a

$$(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \iff b-2c+d=0 \iff \begin{cases} a &= a\times 1 & & \\ b &= & c\times 2 & +d\times(-1) \\ c &= & c\times 1 & \\ d &= & & d\times 1. \end{cases}$$

La famille constituée par les vecteurs $(1,0,0,0)$, $(0,2,1,0)$ et $(0,-1,0,1)$ est donc une famille génératrice de F. On vérifie aisément qu'elle est libre. C'est donc une base de F.
Pour G, la situation est plus simple, car G est déjà donné sous la forme d'un espace vectoriel engendré. En effet, on a

$$(a,b,c,d)\in G \iff \begin{cases} a &= & & d\times 1 \\ b &= & c\times 2 & \\ c &= & c\times 1 & \\ d &= & & d\times 1 \end{cases}$$

1. On va déterminer une base de F. Pour cela, on écrit que

$$(x,y,z,t)\in F \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ 2x+y+z-t &=& 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ x-t &=& 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x\\ y &=& -x-z\\ z &=& z\\ t &=& x\end{array}\right.$$

   On en déduit qu'une base de F est donnée par les vecteurs $u_1=(1,-1,0,1)$ et $u_2=(0,-1,1,0)$.

2. On commence par vérifier que les vecteurs qui engendrent G, à savoir $(1,-2,1,1)$, $(1,2,-3,1)$ et $(5,-3,-2,5)$ sont éléments de F, ce qui est très facile en utilisant l'équation de F. Ceci prouve alors que $G\subset F$. Pour prouver que $G=F$, il suffit de prouver que $\dim F=\dim G$. Mais F a pour dimension 2, et G est de dimension supérieure ou égale à 2 car les deux vecteurs $(1,-2,1,1)$ et $(1,2,-3,1)$ ne sont pas colinéaires. Comme $G\subset F$, on sait que la dimension de G est inférieure ou égale à la dimension de F. On trouve finalement que $\dim F=\dim G=2$, et puisque $G\subset F$, ceci entraine $F=G$.

3. En utilisant le théorème de la base incomplète, on va trouver deux vecteurs u_3 et u_4 de sorte que (u_1,u_2,u_3,u_4) soit une base de $\mathbb{R}^4$. Alors, $H=\operatorname{vect}(u_3,u_4)$ sera un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$. D'après le théorème de la base incomplète, on sait qu'on peut choisir les vecteurs u_3 et u_4 parmi les vecteurs de la base canonique. On vérifie facilement ici que $u_3=e_1$ et $u_4=e_4$ convient. Donc $H=\operatorname{vect}(e_1,e_4)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3

1. v_1 et v_2 ne sont pas proportionnels, donc la famille (v_1,v_2) est libre. En revanche, $v_3=2v_1$ et donc (v_1,v_2,v_3) est liée.

2. Soit $aw_1+bw_2+cw_3=0$. On trouve le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-b+2c &=& 0\\ 2a+b-c &=& 0\\ a+b &=& 0\\ b+c &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b+2c &=& 0\\ 3b-5c &=& 0\\ 2b-2c &=& 0\\ b+c &=& 0\end{array}\right.$$

   Les deux dernières équations donnent immédiatement $b=c=0$ et en revenant à la première on obtient aussi $a=0$. Ainsi, la famille (w_1,w_2,w_3) est libre. Étudions maintenant $aw_1+bw_2+cw_3+dw_4=0$. On trouve le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-b+2c+2d &=& 0\\ 2a+b-c+2d &=& 0\\ a+b+2d &=& 0\\ b+c+2d &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b+2c+2d &=& 0\\ 3b-5c-2d &=& 0\\ 2b-2c &=& 0\\ b+c+2d &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b+2d & = & 0 \\ -2b-2d & = & 0 \\ c & = & b \\ 2b+2d & = & 0 \end{array}\right.$$

La seconde et la dernière équation sont identiques, et on trouve que le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & b \\ b & = & b \\ c & = & b \\ d & = & -b \end{array}\right.$$

Ainsi, $w_1 + w_2 + w_3 - w_4 = 0$: la famille (w_1, w_2, w_3, w_4) est liée. Bien sûr, on pouvait remarquer dès le départ que $w_4 = w_1 + w_2 + w_3 \dots$.

3. On résoud toujours l'équation $av_1+bv_2+cw_1+dw_2 = 0$ et on prouve que $a = b = c = d = 0$. Le détail des calculs est laissé au lecteur courageux...
4. (a) (v_1, v_2, v_3) est une famille génératrice de F mais ce n'est pas une base de F car elle n'est pas libre. Puisque v_3 est C.L de v_1 et v_2, la famille (v_1, v_2) engendre aussi F. Elle est libre : c'est une base de F.

   (b) Puisque (v_1, v_2, w_1, w_2) est une famille libre de 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, c'est une base de $\mathbb{R}^4$. Si F_0 est le sous-espace vectoriel engendré par w_1 et w_2, alors F_0 est un supplémentaire de F. En effet, $F \cap F_0 = \{0\}$, puisqu'un élément x de $F \cap F_0$ s'écrit à la fois $x = av_1 + bv_2 = av_1 + bv_2 + 0w_1 + 0w_2$ et $x = cw_1 + dw_2 = 0v_1 + 0v_2 + cw_1 + dw_2$ ce qui entraine, par unicité de l'écriture dans une base, $a = b = c = d = 0$ et $x = 0$. De plus, $\dim(F \oplus F_0) = \dim(F) + \dim(F_0) = 4$, et donc $F \oplus F_0$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 4 : $F \oplus F_0 = \mathbb{R}^4$.
5. En raisonnant comme à la question précédente, mais en utilisant cette fois le résultat de la question 2. on trouve que (w_1, w_2, w_3) est une base de G.
6. (a) Un système générateur de $F + G$ est obtenu en faisant la réunion d'un système générateur de F et d'un système générateur de G. La famille $(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3, w_4)$ est donc un système générateur de $F + G$.

   (b) D'après la question 3, (v_1, v_2, w_1, w_2) est une famille libre. Puisqu'elle comporte quatre éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^4$. Ainsi, le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est égal à $\mathbb{R}^4$. Or, on a $\mathrm{vect}(v_1, v_2, w_1, w_2) \subset F + G$, et donc $F + G = \mathbb{R}^4$ puisqu'il contient $\mathbb{R}^4$ (et est évidemment contenu dans $\mathbb{R}^4$).
7. (a) Puisque v_1 et v_2 sont dans F et que F est un espace vectoriel, $v_1 + v_2$ est dans F. De plus, $v_1 + v_2 = w_4 \in G$.

   (b) Par le théorème des quatre dimensions, on a

   $$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

   d'où on tire $4 = 2 + 3 - \dim(F \cap G)$, soit $\dim(F \cap G) = 1$.

   (c) Posons $v = v_1 + v_2$. Alors la famille (v) est une famille libre de un vecteur dans un espace de dimension 1. C'est une base de $F \cap G$.
8. Non, $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 4 :

1. On a $v_3 = 3v_1 - v_2$. Ainsi, F est engendré simplement par v_1 et v_2. Comme v_1 et v_2 ne sont pas proportionnels, la famille (v_1, v_2) est libre. C'est une base de F.
2. On a $w_3 = 5w_1 - 2w_2$. Ainsi, G est engendré par w_1 et w_2. De même, la famille (w_1, w_2), qui est libre, forme une base de G.
3. On a $v_1 - w_1 = v_2 - w_2$, soit $v_1 - v_2 - w_1 + w_2 = 0$. Ainsi, la famille (v_1, v_2, w_1, w_2) est liée. On sait que (v_1, v_2, w_1, w_2) est une famille génératrice de $F+G$. Elle n'est pas libre donc ce n'est pas une base. Montrons en revanche que (v_1, v_2, w_1) est libre. En effet, si $av_1 + bv_2 + cw_1 = 0$, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+2b+c &=& 0 \\ 3a+7b+3c &=& 0 \\ -2a-5b &=& 0 \\ 2a+6b+2c &=& 0 \end{array}\right.$$

dont on montre facilement que la seule solution est $a = b = c = 0$. Ainsi, (v_1, v_2, w_1) engendre $F+G$ (rappelons que w_2 est C.L de (v_1, v_2, w_1)) et est une famille libre. C'est une base de $F+G$ qui est donc de dimension 3.
4. On a

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \iff \left\{\begin{array}{rcllll} x_1 &=& x_1 \times 1 & & \\ x_2 &=& & x_2 \times 1 & \\ x_3 &=& & & x_3 \times 1 \\ x_4 &=& x_1 \times (-4) & +x_2 \times 2. & \end{array}\right.$$

Une famille génératrice de E est donc donnée par $((1,0,0,-4),(0,1,0,2),(0,0,1,0))$. On vérifie très facilement que cette famille est libre. C'est donc une base de E.
5. Remarquons que $\dim(F+G) = \dim(E) = 3$. Pour montrer que $F+G = E$, il suffit donc par exemple de démontrer que $F+G \subset E$. Et puisque $F+G$ est engendré par v_1, v_2 et w_1, il suffit de démontrer que ces trois vecteurs sont éléments de E. C'est une vérification immédiate. Remarquons qu'on a trouvé $F+G = E$ même si les bases obtenues aux questions précédentes sont très différentes.
La somme n'est pas directe, sinon on aurait $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ ie $3 = 2+2$, ce qui n'est pas le cas. Par le théorème des quatre dimensions, on a

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

c'est-à-dire $3 = 2 + 2 - \dim(F \cap G)$ qui donne $\dim(F \cap G) = 1$.

Exercice 5.

1. On a :

$$(x,y,z,t) \in F \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 0 \\ y-z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -y \\ y &=& y \\ z &=& y \\ t &=& t \end{array}\right.$$

Une base de F est donc donnée par les deux vecteurs $v_1 = (1,-1,-1,0)$ et $v_2 = (0,0,0,1)$.

2. D'après le théorème de la base incomplète, on sait que l'on peut compléter la famille (v_1, v_2) par deux vecteurs de la base canonique pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. On vérifie facilement que (v_1, v_2, e_1, e_2) est une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}^4$.
3. L'équation $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ donne le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b-c & = & 0 \\ a+2b & = & 0 \\ a+3b-c & = & 0 \\ a+4b & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui donne facilement $b = 0$ (comparer la deuxième et la quatrième équation), puis $a = 0$ et $c = 0$. La famille est libre.
4. La famille (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de G. C'est aussi une famille libre d'après la question précédente. C'est donc une base de G qui est de dimension 3.
5. Soit $au_1 + bu_2 + cu_3$ un vecteur de G. On cherche les conditions sur a, b, c pour qu'il soit élément de F. Il vient

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a+3b-c & = & 0 \\ 2a+4b-2c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a & = & -3b+c \\ b & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -c \\ b & = & c \\ c & = & c \end{array}\right.$$

Ainsi, les vecteurs de F et G sont ceux qui s'écrivent $c(-u_1 + u_2 + u_3) = c(-1, 1, 1, 3)$. Une base de $F \cap G$ est donc donné par le seul vecteur $(-1, 1, 1, 3)$.
6. D'après le théorème des quatre dimensions,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Ainsi, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4, et donc $F+G = \mathbb{R}^4$.
7. Non, car $F \cap G$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Mr. BEY

Exercices Corrigés

Exercice 1 :

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 2y + z = 0\} \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - y + 2z = 0\}. \end{aligned}$$

1. Donner une base de F, une base de G, en déduire leur dimension respective.
2. Donner une base de $F \cap G$, et donner sa dimension.
3. Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base de F trouvée en 1 et des vecteurs de la base de G trouvée en 2. est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Est-elle libre ?
4. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 2 :

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par

$$\begin{aligned} F &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ b - 2c + d = 0\} \\ G &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ a = d \text{ et } b = 2c\}. \end{aligned}$$

Donner une base de F, de G et de $F \cap G$. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 3 :

On considère dans $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{lll} v_1 = (1,3,-2,2) & v_2 = (2,7,-5,6) & v_3 = (1,2,-1,0) \\ w_1 = (1,3,0,2) & w_2 = (2,7,-3,6) & w_3 = (1,1,6,-2). \end{array}$$

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3) et G celui engendré par (w_1, w_2, w_3).

1. Montrer que v_3 est une combinaison linéaire de v_1 et v_2. En déduire une base de F.
2. Montrer que w_3 est une combinaison linéaire de w_1 et w_2. En déduire une base de G.
3. Montrer que (v_1, v_2, w_1, w_2) est liée. En déduire une base de $F + G$.
4. Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3;\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$. Donner une base de E.
5. Montrer que $F + G = E$. La somme est-elle directe ? Quelle est la dimension de $F \cap G$?

Exercice 4 :

On considère dans $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1,2,0,1) \quad v_2 = (1,0,2,1) \quad v_3 = (2,0,4,2)$$
$$w_1 = (1,2,1,0) \quad w_2 = (-1,1,1,1) \quad w_3 = (2,-1,0,1) \quad w_4 = (2,2,2,2).$$

1. Montrer que (v_1, v_2) est libre et que (v_1, v_2, v_3) est liée.
2. Montrer que (w_1, w_2, w_3) est libre et que (w_1, w_2, w_3, w_4) est liée.
3. Montrer que (v_1, v_2, w_1, w_2) est libre.
4. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3).
   (a) Déterminer une base de F.
   (b) Donner un supplémentaire de F.
5. Soit G le sous-espace vectoriel engendré par (w_1, w_2, w_3, w_4). Déterminer une base de G.
6. (a) A l'aide des bases trouvées en 4. et 5. construire un système générateur de $F + G$.
   (b) En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7. (a) Montrer que $v_1 + v_2$ est dans $F \cap G$.
   (b) Calculer la dimension de $F \cap G$.
   (c) Donner une base de $F \cap G$.
8. F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 5 :

On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Donner une base de F.
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On pose $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3,4)$ et $u_3 = (-1,0,-1,0)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?
4. On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3. Quelle est la dimension de G ?
5. Donner une base de $F \cap G$.
6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7. Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

Exercice 1

1. On trouve d'abord une famille génératrice de F. On a :

$$(x,y,z) \in F \iff x-2y+z=0 \iff \left\{\begin{array}{lllll} x & = & y\times 2 & + & z\times(-1) \\ y & = & y\times 1 & + & z\times 0 \\ z & = & y\times 0 & + & z\times 1. \end{array}\right.$$

Les vecteurs $(2,1,0)$ et $(-1,0,1)$ engendrent donc F. De plus, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, dont la famille est libre. C'est une base de F qui est de dimension 2. On procède de même pour G :

$$(x,y,z) \in F \iff 2x-y+2z=0 \iff \left\{\begin{array}{lllll} x & = & x\times 1 & + & z\times 0 \\ y & = & x\times 2 & + & z\times 2 \\ z & = & x\times 0 & + & z\times 1. \end{array}\right.$$

On trouve cette fois que $((1,2,0),(0,2,1))$ est une base de G qui est de dimension 2.

2. C'est la même chose, mais cette fois on a deux équations.

$$(x,y,z) \in F \cap G \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x-2y+z & = & 0 \\ 2x-y+2z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x-2y+z & = & 0 \\ 3y & = & 0 \\ z & = & z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & x \times (-1) \\ y & = & z \times 0 \\ z & = & z \times 1 \end{array} \right.$$

Ainsi, le vecteur $(-1,0,1)$ engendre $F \cap G$. Comme une famille constituée d'un vecteur non-nul est libre, $(-1,0,1)$ est une base de $F \cap G$ qui est de dimension 1.

3. Notons $u = (2,1,0)$, $v = (-1,0,1)$, $w = (1,2,0)$ et $t = (0,2,1)$. Il s'agit de montrer que (u,v,w,t) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
Méthode 1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et essayons d'écrire $(x,y,z) = au + bv + cw + dt$. Alors on doit résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2a-b+c & = & x \\ a+2c+2d & = & y \\ b+d & = & z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2a-b+c & = & x \\ -2b+2d & = & y-2x \\ b+d & = & z \end{array} \right.$$

Les deux dernières équations permettent de calculer b et d. Dans la première, on peut trouver une solution en imposant $c=0$, et on obtient une valeur pour a.
Méthode 2. L'espace vectoriel engendré par la réunion des deux bases est $F+G$. On doit démontrer que $F+G = \mathbb{R}^3$, et pour cela il suffit de démontrer que $\dim(F+G) = 3$. Par le théorème des quatre dimensions, on a

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2+2-1 = 3,$$

ce qu'il fallait démontrer.
La famille (u,v,w,t) n'est pas libre car une famille libre de $\mathbb{R}^3$ a toujours moins de trois éléments.

4. F et G ne sont pas supplémentaires car $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 2

F est donné par une équation. Il faut d'abord en trouver un système générateur. On a

$$(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \iff b-2c+d=0 \iff \left\{ \begin{array}{rcllll} a & = & a \times 1 & & \\ b & = & & c \times 2 & +d \times (-1) \\ c & = & & c \times 1 & \\ d & = & & & d \times 1. \end{array} \right.$$

La famille constituée par les vecteurs $(1,0,0,0)$, $(0,2,1,0)$ et $(0,-1,0,1)$ est donc une famille génératrice de F. On vérifie aisément qu'elle est libre. C'est donc une base de F.
Pour G, la situation est plus simple, car G est déjà donné sous la forme d'un espace vectoriel engendré. En effet, on a

$$(a,b,c,d) \in G \iff \left\{ \begin{array}{rcll} a & = & & d \times 1 \\ b & = & c \times 2 & \\ c & = & c \times 1 & \\ d & = & & d \times 1 \end{array} \right.$$

1. On va déterminer une base de F. Pour cela, on écrit que

$$(x,y,z,t)\in F \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ 2x+y+z-t &=& 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ x-t &=& 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x\\ y &=& -x-z\\ z &=& z\\ t &=& x\end{array}\right.$$

On en déduit qu'une base de F est donnée par les vecteurs $u_1=(1,-1,0,1)$ et $u_2=(0,-1,1,0)$.

2. On commence par vérifier que les vecteurs qui engendrent G, à savoir $(1,-2,1,1)$, $(1,2,-3,1)$ et $(5,-3,-2,5)$ sont éléments de F, ce qui est très facile en utilisant l'équation de F. Ceci prouve alors que $G\subset F$. Pour prouver que $G=F$, il suffit de prouver que $\dim F=\dim G$. Mais F a pour dimension 2, et G est de dimension supérieure ou égale à 2 car les deux vecteurs $(1,-2,1,1)$ et $(1,2,-3,1)$ ne sont pas colinéaires. Comme $G\subset F$, on sait que la dimension de G est inférieure ou égale à la dimension de F. On trouve finalement que $\dim F=\dim G=2$, et puisque $G\subset F$, ceci entraine $F=G$.
3. En utilisant le théorème de la base incomplète, on va trouver deux vecteurs u_3 et u_4 de sorte que (u_1,u_2,u_3,u_4) soit une base de $\mathbb{R}^4$. Alors, $H=\mathrm{vect}(u_3,u_4)$ sera un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$. D'après le théorème de la base incomplète, on sait qu'on peut choisir les vecteurs u_3 et u_4 parmi les vecteurs de la base canonique. On vérifie facilement ici que $u_3=e_1$ et $u_4=e_4$ convient. Donc $H=\mathrm{vect}(e_1,e_4)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3

1. v_1 et v_2 ne sont pas proportionnels, donc la famille (v_1,v_2) est libre. En revanche, $v_3=2v_1$ et donc (v_1,v_2,v_3) est liée.
2. Soit $aw_1+bw_2+cw_3=0$. On trouve le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-b+2c &=& 0\\ 2a+b-c &=& 0\\ a+b &=& 0\\ b+c &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b+2c &=& 0\\ 3b-5c &=& 0\\ 2b-2c &=& 0\\ b+c &=& 0\end{array}\right.$$

Les deux dernières équations donnent immédiatement $b=c=0$ et en revenant à la première on obtient aussi $a=0$. Ainsi, la famille (w_1,w_2,w_3) est libre. Étudions maintenant $aw_1+bw_2+cw_3+dw_4=0$. On trouve le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-b+2c+2d &=& 0\\ 2a+b-c+2d &=& 0\\ a+b+2d &=& 0\\ b+c+2d &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b+2c+2d &=& 0\\ 3b-5c-2d &=& 0\\ 2b-2c &=& 0\\ b+c+2d &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} a+b+2d &= 0 \\ -2b-2d &= 0 \\ c &= b \\ 2b+2d &= 0 \end{cases}$$

La seconde et la dernière équation sont identiques, et on trouve que le système est équivalent à

$$\begin{cases} a &= b \\ b &= b \\ c &= b \\ d &= -b \end{cases}$$

Ainsi, $w_1 + w_2 + w_3 - w_4 = 0$: la famille (w_1, w_2, w_3, w_4) est liée. Bien sûr, on pouvait remarquer dès le départ que $w_4 = w_1 + w_2 + w_3 \dots$.

3. On résoud toujours l'équation $av_1+bv_2+cw_1+dw_2 = 0$ et on prouve que $a = b = c = d = 0$. Le détail des calculs est laissé au lecteur courageux...

4. (a) (v_1, v_2, v_3) est une famille génératrice de F mais ce n'est pas une base de F car elle n'est pas libre. Puisque v_3 est C.L de v_1 et v_2, la famille (v_1, v_2) engendre aussi F. Elle est libre : c'est une base de F.

   (b) Puisque (v_1, v_2, w_1, w_2) est une famille libre de 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, c'est une base de $\mathbb{R}^4$. Si F_0 est le sous-espace vectoriel engendré par w_1 et w_2, alors F_0 est un supplémentaire de F. En effet, $F \cap F_0 = \{0\}$, puisqu'un élément x de $F \cap F_0$ s'écrit à la fois $x = av_1 + bv_2 = av_1 + bv_2 + 0w_1 + 0w_2$ et $x = cw_1 + dw_2 = 0v_1 + 0v_2 + cw_1 + dw_2$ ce qui entraine, par unicité de l'écriture dans une base, $a = b = c = d = 0$ et $x = 0$. De plus, $\dim(F \oplus F_0) = \dim(F) + \dim(F_0) = 4$, et donc $F \oplus F_0$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 4 : $F \oplus F_0 = \mathbb{R}^4$.

5. En raisonnant comme à la question précédente, mais en utilisant cette fois le résultat de la question 2. on trouve que (w_1, w_2, w_3) est une base de G.

6. (a) Un système générateur de $F + G$ est obtenu en faisant la réunion d'un système générateur de F et d'un système générateur de G. La famille $(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3, w_4)$ est donc un système générateur de $F + G$.

   (b) D'après la question 3, (v_1, v_2, w_1, w_2) est une famille libre. Puisqu'elle comporte quatre éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^4$. Ainsi, le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est égal à $\mathbb{R}^4$. Or, on a $\mathrm{vect}(v_1, v_2, w_1, w_2) \subset F + G$, et donc $F + G = \mathbb{R}^4$ puisqu'il contient $\mathbb{R}^4$ (et est évidemment contenu dans $\mathbb{R}^4$).

7. (a) Puisque v_1 et v_2 sont dans F et que F est un espace vectoriel, $v_1 + v_2$ est dans F. De plus, $v_1 + v_2 = w_4 \in G$.

   (b) Par le théorème des quatre dimensions, on a

   $$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

   d'où on tire $4 = 2 + 3 - \dim(F \cap G)$, soit $\dim(F \cap G) = 1$.

   (c) Posons $v = v_1 + v_2$. Alors la famille (v) est une famille libre de un vecteur dans un espace de dimension 1. C'est une base de $F \cap G$.

8. Non, $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 4 :

1. On a $v_3 = 3v_1 - v_2$. Ainsi, F est engendré simplement par v_1 et v_2. Comme v_1 et v_2 ne sont pas proportionnels, la famille (v_1, v_2) est libre. C'est une base de F.
2. On a $w_3 = 5w_1 - 2w_2$. Ainsi, G est engendré par w_1 et w_2. De même, la famille (w_1, w_2), qui est libre, forme une base de G.
3. On a $v_1 - w_1 = v_2 - w_2$, soit $v_1 - v_2 - w_1 + w_2 = 0$. Ainsi, la famille (v_1, v_2, w_1, w_2) est liée. On sait que (v_1, v_2, w_1, w_2) est une famille génératrice de $F + G$. Elle n'est pas libre donc ce n'est pas une base. Montrons en revanche que (v_1, v_2, w_1) est libre. En effet, si $av_1 + bv_2 + cw_1 = 0$, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a + 2b + c & = & 0 \\ 3a + 7b + 3c & = & 0 \\ -2a - 5b & = & 0 \\ 2a + 6b + 2c & = & 0 \end{array}\right.$$

dont on montre facilement que la seule solution est $a = b = c = 0$. Ainsi, (v_1, v_2, w_1) engendre $F + G$ (rappelons que w_2 est C.L de (v_1, v_2, w_1)) et est une famille libre. C'est une base de $F + G$ qui est donc de dimension 3.
4. On a

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \iff \left\{\begin{array}{rcllll} x_1 & = & x_1 \times 1 & & \\ x_2 & = & & x_2 \times 1 & \\ x_3 & = & & & x_3 \times 1 \\ x_4 & = & x_1 \times (-4) & +x_2 \times 2. & \end{array}\right.$$

Une famille génératrice de E est donc donnée par $((1, 0, 0, -4), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0))$. On vérifie très facilement que cette famille est libre. C'est donc une base de E.
5. Remarquons que $\dim(F + G) = \dim(E) = 3$. Pour montrer que $F + G = E$, il suffit donc par exemple de démontrer que $F + G \subset E$. Et puisque $F + G$ est engendré par v_1, v_2 et w_1, il suffit de démontrer que ces trois vecteurs sont éléments de E. C'est une vérification immédiate. Remarquons qu'on a trouvé $F + G = E$ même si les bases obtenues aux questions précédentes sont très différentes.
La somme n'est pas directe, sinon on aurait $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ ie $3 = 2 + 2$, ce qui n'est pas le cas. Par le théorème des quatre dimensions, on a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

c'est-à-dire $3 = 2 + 2 - \dim(F \cap G)$ qui donne $\dim(F \cap G) = 1$.

Exercice 5.

1. On a :

$$(x, y, z, t) \in F \iff \left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y \\ y & = & y \\ z & = & y \\ t & = & t \end{array}\right.$$

Une base de F est donc donnée par les deux vecteurs $v_1 = (1, -1, -1, 0)$ et $v_2 = (0, 0, 0, 1)$.

2. D'après le théorème de la base incomplète, on sait que l'on peut compléter la famille (v_1, v_2) par deux vecteurs de la base canonique pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. On vérifie facilement que (v_1, v_2, e_1, e_2) est une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}^4$.

3. L'équation $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ donne le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b-c & = & 0 \\ a+2b & = & 0 \\ a+3b-c & = & 0 \\ a+4b & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui donne facilement $b = 0$ (comparer la deuxième et la quatrième équation), puis $a = 0$ et $c = 0$. La famille est libre.

4. La famille (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de G. C'est aussi une famille libre d'après la question précédente. C'est donc une base de G qui est de dimension 3.

5. Soit $au_1 + bu_2 + cu_3$ un vecteur de G. On cherche les conditions sur a, b, c pour qu'il soit élément de F. Il vient

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a+3b-c & = & 0 \\ 2a+4b-2c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a & = & -3b+c \\ b & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -c \\ b & = & c \\ c & = & c \end{array}\right.$$

Ainsi, les vecteurs de F et G sont ceux qui s'écrivent $c(-u_1 + u_2 + u_3) = c(-1, 1, 1, 3)$. Une base de $F \cap G$ est donc donné par le seul vecteur $(-1, 1, 1, 3)$.

6. D'après le théorème des quatre dimensions,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Ainsi, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4, et donc $F+G = \mathbb{R}^4$.

7. Non, car $F \cap G$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

DIAGONALISATION

EXERCICE 1.

$E = R^3$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. f est l'endomorphisme de matrice M dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Calculer ses valeurs propres.
3. Donner une base des sous-espaces propres.
4. Décider si f est diagonalisable.
5. Donner éventuellement l'expression diagonalisée.
6. Vérifier en utilisant les matrices de changement de base.

SOLUTION.

1°/ Polynôme caractéristique.

Le polynôme caractéristique de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est le déterminant de la matrice $M - \lambda\, id_E$.

$$P(\lambda) = Dét\,(M - \lambda\, id_E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant la 2^e ligne à la 1^e :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

On peut mettre $-(1+\lambda)$ en facteur dans la 1^e ligne :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la 1^e colonne de la 2^e.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1^e ligne.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1^e colonne.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

$$\boxed{\text{Le polynôme caractéristique de la matrice } M \text{ est } P(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)}$$

2°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice M sont les racines du polynôme caractéristique : -1, 1, 2. Ces racines sont toutes trois réelles et simples.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de la matrice } M \text{ sont } \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2.}$$

3°/ Sous-espaces propres.

Comme les valeurs propres sont réelles et distinctes, chaque sous-espace propre est de dimension 1 et engendré par un vecteur propre quelconque pour la valeur propre correspondante.
Le sous-espace propre pour une valeur propre λ est le noyau de la matrice $M - \lambda I$.

- pour la valeur propre $\lambda_1 = -1$, $M - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons la 2[e] colonne à la 3[e], et ajoutons deux fois la 2[e] colonne à la 1[e]

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $M - \lambda_1 I$ est de rang 2 (les deux premières colonnes de la matrice réduite forment une famille libre de vecteurs), et son noyau a pour base par le vecteur $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- pour la valeur propre $\lambda_2 = 1$, $M - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons de la 1[e] colonne la somme des deux autres, puis ajoutons à la 2[e] colonne la 3[e] :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $M - \lambda_2 I$ est de rang 2 (les deux dernières colonnes de la matrice réduite forment une famille libre de vecteurs), et son noyau a pour base par le vecteur $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- pour la valeur propre $\lambda_3 = 2$, $M - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons de la 1e colonne la 2e, puis ajoutons à la 2e colonne la 3e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $M - \lambda_3 I$ est de rang 2 (les deux dernières colonnes de la matrice réduite forment une famille libre de vecteurs), et son noyau a pour base par le vecteur $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4°/ Diagonalisation.

Le ***polynôme minimal*** de M est $(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Ses racines sont réelles et d'ordre 1 : la matrice M est donc diagonalisable.

Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice des vecteurs propres $\{a_1, a_2, a_3\}$: $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice P est la matrice du changement de base $[id_E, \{a\}, \{e\}]$. La relation précédente montre que l'on a :

$$[f, \{a\}, \{a\}] = [id_E, \{e\}, \{a\}][f, \{e\}, \{e\}][id_E, \{a\}, \{e\}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme f se décompose donc en :

- une homothétie de rapport -1 (symétrie) sur l'axe défini $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2 + e_3$;
- une homothétie de rapport 1 (identité) sur l'axe défini par $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = e_1 - e_2 - e_3$;
- une homothétie de rapport 2 sur l'axe défini par $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 - e_2$.

Les vecteurs de la base canonique sont donnés, en fonction de la base propre, par :

$$e_1 = a_1 + a_2$$
$$e_2 = a_1 + a_2 - a_3$$
$$e_3 = a_3 - a_2$$

EXERCICE 2.

Faire, pour la matrice A suivante, une étude semblable à celle de l'exercice 1 pour la matrice M :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

SOLUTION.

1°/ Polynôme caractéristique.

$$P^{\cdot}(\lambda) = Dét\,(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 & -5 \\ -5 & -7-\lambda & 5 \\ -5 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant la 3^e colonne à la 2^e.

$$P^{\cdot}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ -5 & -2-\lambda & 5 \\ -5 & -2-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut mettre en facteur dans le déterminant le facteur commun $-(2+\lambda)$ de la 2^e colonne.

$$P^{\cdot}(\lambda) = -(2+\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ -5 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant 5 fois la 2^e colonne à la 1^e colonne.

$$P^{\cdot}(\lambda) = -(2+\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la 2^e ligne de la 3^e.

$$P^{\cdot}(\lambda) = -(2+\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1^e colonne.

$$P^{\cdot}(\lambda) = -(2+\lambda)(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1^e colonne.
$P^{\cdot}(\lambda) = (2+\lambda)(3-\lambda)(2+\lambda)$.

$$\boxed{P(\lambda) = -(\lambda+2)^2(\lambda-3)}$$

2°/ Polynôme minimal.

Le théorème de Hamilton-Cailey donne : $(A + 2I)^2(A - 3I) = 0$. On a, en fait : $(A + 2I)(A - 3I) = 0$. Ceci signifie que le ***polynôme minimal*** de la matrice A est $(\lambda + 2)(\lambda - 3)$. Les racines du polynôme minimal sont simples et réelles. Il en résulte que la matrice A est diagonalisable.

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice A sont les racines de son polynôme caractéristique : $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 3$. Le ***spectre*** de A est $\{-2 ; 3\}$.

4°/ Vecteurs propres.

- Le sous-espace propre relativement à la valeur propre $\lambda_1 = -2$ est le noyau de la matrice

$$A + 2I = 5\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons la 3e colonne à la 1e et à la 2e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $A + 2I$ est de rang 1, et que les vecteurs $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de son noyau. On peut donc prendre les vecteurs a_1 et a_2 comme base du sous-espace propre pour la valeur propre $\lambda_1 = -2$.

- Le sous-espace propre relativement à la valeur propre $\lambda_1 = 3$ est le noyau de la matrice

$$A - 3I = 5\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retranchons de la 1e colonne, la somme des deux autres, puis ajoutons à la 2e colonne la 3e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $A - 3I$ est de rang 2, et que le vecteur $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forme une base de son noyau. On peut donc prendre le vecteur a_3 comme base du sous-espace propre pour la valeur propre $\lambda_2 = 3$.

5°/ Diagonalisation.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ une matrice de vecteurs propres de A. Son inverse est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

C'est la matrice diagonale des valeurs propres de la matrice A. La matrice A est donc diagonalisable, ce qui résulte aussi du fait qu'il existe une base formée de vecteurs propres.

EXERCICE 3.

$E = R^3$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. f est l'endomorphisme de matrice B dans cette base :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Calculer ses valeurs propres.
3. Donner une base des sous-espaces propres.
4. Décider si f est diagonalisable.
5. Donner éventuellement l'expression diagonalisée.
6. Vérifier en utilisant les matrices de changement de base.

SOLUTION.

1°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét\,(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1[e] colonne :

$$P(\lambda) = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)^2 + (1-\lambda) = (1-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda)+1]$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$$\boxed{P(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2}$$

2°/ Polynôme minimal.

Le théorème de Hamilton-Cailey donne : $(B - I)(B - 2I)^2 = 0$. On a : $(B - I)(B - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc le polynôme minimal de la matrice B est le polynôme $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. Les racines du polynôme minimal sont réelles, mais ne sont pas simples. Il en résulte que la matrice B n'est pas diagonalisable.

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice B sont les racines de son polynôme caractéristique : 1 et 2. Le spectre est l'ensemble $\{1 ; 2\}$.

4°/ Vecteurs propres.

- Les vecteurs propres pour la valeur propre $\lambda_1 = 1$ forment le noyau de la matrice $B - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retranchons de la 1^e colonne la somme des deux autres ; retranchons de la 3^e colonne, la 2^e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $B - I$ est de rang 2 et que son noyau, de dimension 1, est engendré par le vecteur propre

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Les vecteurs propres pour la valeur propre $\lambda_2 = 2$ forment le noyau de la matrice $B - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retranchons de la 1^e colonne la 2^e, puis retranchons de la 2^e colonne la 3^e:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $B - 2\,I$ est de rang 2 et que son noyau, de dimension 1, est engendré par le vecteur propre

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5°/ Diagonalisation.

Comme $E = \mathbb{R}^3$ n'est pas somme directe de sous-espace propres, la matrice B n'est pas diagonalisable. On peut cependant la triangulariser en prenant, pour compléter la famille $\{a_1 , a_2\}$ de vecteur propres en une base de E, un vecteur a_3 dans l'image de $B - I$ mais n'appartenant pas au noyau de $B - 2\,I$, par exemple, le vecteur

$$a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6°/ Triangularisation.

Soit $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice des vecteurs de la famille $a = \{a_1 , a_2 , a_3\}$. Comme la famille a est une base de E, la matrice P est inversible, son inverse est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'on a :

$$P^{-1} B P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le résultat n'est pas une matrice diagonale, mais une matrice dont la restriction au sous-espace engendré par les vecteurs $\{a_2 , a_3 \}$ est triangulaire.

EXERCICE 4.

Faire, pour la matrice C suivante, une étude semblable à celle de l'exercice 3 pour la matrice B :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUTION.

1°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét\,(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant la 3^e colonne à la 2^e et à la 4^e.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & -1-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut mettre en facteur $(1 - \lambda)$ dans la 2^e colonne et dans la 4^e colonne.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la 2^e ligne de la 3^e.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 2^e colonne.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la 3^e ligne de la 2^e.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 3^e colonne.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1^e colonne.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2\,(-\lambda\,(3-\lambda)+2) = (\lambda-1)^2\,(\lambda^2-3\,\lambda+2) = (\lambda-1)^3\,(\lambda-2)$$

$$\boxed{P(\lambda) = (\lambda-1)^3\,(\lambda-2)}$$

2°/ Polynôme minimal.

Le théorème de Hamilton-Cailey donne : $(C-I)^3\,(C-2\,I) = 0$. Le produit $(C-I)(C-2\,I)$ est nul, donc le polynôme minimal de la matrice C est $(\lambda-1)(\lambda-2)$. Ses racines sont réelles et simples. Il en résulte que :

1. la matrice C est diagonalisable,
2. il existe une base formée de vecteurs propres.
3. la matrice $C-2\,I$ est de rang 3 ; son noyau, sous-espace propre pour la valeur propre 2, est de dimension 1, c'est l'image de la matrice $C-I$: $Im\,(C-2\,I) = Ker\,(C-I)$
4. la matrice $C-I$ est de rang 1 : son noyau, sous-espace propre pour la valeur propre 1, est de dimension 3, c'est l'image de la matrice $C-2\,I$: $Im\,(C-I) = Ker\,(C-2\,I)$.
5. $\mathbb{R}^4 = Ker\,(C-2\,I) \oplus Ker\,(C-I)$

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice C sont les racines du polynôme caractéristique $P(\lambda)$: $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Le spectre de C est $\{1\,;\,2\}$.

4°/ Vecteurs propres.

- $(C-I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On peut la réduire de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter à la 1e colonne 2 fois la 2e, ajouter à la 2e colonne la 3e, ajouter à la 4e colonne la 3e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $C-I$ est de rang 1. Son noyau a pour base les vecteurs :

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs sont vecteurs propres pour la valeur propre triple 1.

Son image a pour base le vecteur $a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ce vecteur est vecteur propre pour la valeur propre simple 2.

- La famille $\{a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,,\,a_4\}$ forme une base de E constituée de vecteurs propres. $E = \mathbb{R}^4$ est somme directe de sous-espaces propres de dimension 1.

5°/ Diagonalisation.

Comme il existe une base formée de vecteurs propres, la matrice C est diagonalisable. Soit P la matrice des vecteurs propres $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme la famille $a = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est une base, la matrice P est la matrice de changement de base :

$$P = [id_E, \{a\}, \{e\}]$$

Cette matrice est inversible, son inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'on a :

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

C'est la matrice diagonale des valeurs propres. Cette diagonalisation montre que l'endomorphisme f de matrice C sur la base canonique de $\mathbb{R}^4$ peut se décomposer en :

— application identique dans le sous-espace propre engendré par les vecteurs $\{a_1, a_2, a_3\}$,

— homothétie de rapport 2 dans le sous-espace propre engendré par le vecteur a_4.

EXERCICE 5.

Soit M une matrice 5×5 réelle dont le polynôme caractéristique est :

$$P(X) = (X+1)^2 (X-2)^3.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de M ?
2. M est-elle diagonalisable ?
3. On suppose de plus que les sous-espaces propres sont de dimension 2. Que conclure ?

SOLUTION.

1°/ Valeurs propres.

La matrice M a, par hypothèse, pour polynôme caractéristique : $P(\lambda) = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 2)^3$. Les valeurs propres de la matrice M sont les racines du polynôme caractéristique, ce sont donc les nombres -1 et 2. La valeur propre -1 est d'ordre de multiplicité 2, la valeur propre 2 est d'ordre de multiplicité 3. La matrice M possède donc un sous-espace propre pour la valeur propre -1 et un sous-espace propre pour la valeur propre 2.

2°/ Diagonalisation.

Cependant le polynôme caractéristique ne permet pas de conclure quand au caractère diagonalisable ou non de la matrice M. Pour que la matrice M soit diagonalisable, il faudrait que le polynôme minimal de la matrice M soit

$$P_u(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

de telle sorte que la matrice $(M + I)$ soit de rang 3 et la matrice $(M - 2I)$ de rang 2. Dans ce cas, le noyau de la matrice $(M + I)$, c'est-à-dire le sous-espace propre relativement à la valeur propre -1, serait de dimension 2 et le noyau de la matrice $(M - 2I)$, c'est-à-dire le sous-espace propre relativement à la valeur propre 2, serait de dimension 3.

3°/ Dimension des sous-espaces propres.

La matrice M n'est diagonalisable que si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre correspondant est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre dans le polynôme caractéristique de la matrice.

Dans le cas où les sous-espaces propres sont tous deux de dimension 2, la dimension du sous-espace propre relatif à la valeur propre -1 est égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre dans le polynôme caractéristique, de sorte que la restriction de M à ce sous-espace propre est diagonalisable et sa diagonalisée comportera uniquement des -1 sur la diagonale.

La dimension du sous-espace propre relatif à la valeur propre 2, par contre, n'est pas égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre 2 dans le polynôme caractéristique et la restriction de M au noyau de la matrice $(M + I)^2$ conservera une partie triangulaire.

Le polynôme minimal de la matrice M est $(\lambda + 1)^2 (\lambda - 2)^2$ et il est possible de trouver une base de $\mathbb{R}^5$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique prend la forme :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 6.

$E = \mathbb{R}^4$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. f est l'endomorphisme de matrice M dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la matrice de $g = f^2$ dans la base $\{e\}$?
2. Quels sont les vecteurs propres et les valeurs propres de g ?
3. Montrer que si λ est une valeur propre de f, alors $\mu = \lambda^2$ est valeur propre de g.
4. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.
5. Pour un vecteur x quelconque de E, montrer que :
$$f(x) + 2\,x \in Ker\,(f - 2\,id_E)$$
$$f(x) - 2\,x \in Ker\,(f + 2\,id_E)$$
6. Construire un système de générateurs de E formé de vecteurs propres de f.
7. Diagonaliser f, soit directement, soit en utilisant ce qui précède.

SOLUTION.

1°/ Carré de la matrice *M*.

Si f est l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, l'endomorphisme $g = f^2$ a pour matrice dans la base canonique le carré M^2 de la matrice M.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4\,I.$$

$$\boxed{M^2 = 4\,I.}$$

Cette relation montre que l'on a : $(M - 2\,I)(M + 2\,I) = 0$, donc le polynôme minimal de la matrice M est :

$$P_u\,(X) = (X - 2)(X + 2)$$

2°/ Valeurs propres du carré de *M*.

Les valeurs propres de M^2 sont les racines du polynôme caractéristique $(X - 4)^4$ de M^2. Il y en a une seule, 4, d'ordre de multiplicité 4.

$$\boxed{\text{La matrice } M^2 \text{ a une seule valeur propre, 4.}}$$

3°/ Valeurs propres de la matrice *M*.

Soit λ une valeur propre de M. Pour tout vecteur propre x relativement à cette valeur propre on a $f\,(x) = \lambda\,x$, donc $g\,(x) = f\,(f\,(x)) = f\,(\lambda\,x) = \lambda f\,(x) = \lambda^2\,x$. Il en résulte que $\mu = \lambda^2$ est valeur propre de g, donc de la matrice M^2 et que x est vecteur propre pour cette valeur propre.

Comme la seule valeur propre de M^2 est 4, les valeurs propres de M vérifient $\lambda^2 = 4$. Les seules valeurs propres possibles de M sont donc -2 et 2.

On a déjà observé que le polynôme minimal de la matrice M est

$$P_u\,(X) = (X - 2)(X + 2)$$

Les racines du polynôme minimal de M sont aussi des racines du polynôme caractéristique de M, de sorte que les deux valeurs -2 et 2 sont des racines du polynôme caractéristique de M : ce sont toutes deux des valeurs propres de M. Comme ce sont les seules valeurs possibles pour les valeurs propres, on en conclue :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de la matrice } M \text{ sont } -2 \text{ et } 2.}$$

4°/ Sous-espaces propres.

Pour tout vecteur x de E, on a :

$$(f-2\,id_E)(f(x)+2\,x) = (M-2\,I)(M+2\,I)\,x = 0$$
$$(f+2\,id_E)(f(x)-2\,x) = (M+2\,I)(M-2\,I)\,x = 0$$

puisque $(M-2\,I)(M+2\,I) = (M+2\,I)(M-2\,I)\,x = 0.$
d'où les relations :

$$f(x)+2\,x \in Ker\,(f-2\,id_E)$$
$$f(x)-2\,x \in Ker\,(f+2\,id_E)$$

Ces relations montrent que l'image de $(f+2\,id_E)$ est dans le noyau de $(f-2\,id_E)$ et inversement, l'image de $(f-2\,id_E)$ est dans le noyau de $(f+2\,id_E)$.
Considérons alors, par exemple, la matrice $M-2\,I$. On peut réduire cette matrice pour calculer son rang. On arrivera à une matrice comportant un certain nombre de colonnes de zéros qui définissent le noyau de $(f-2\,id_E)$, c'est-à-dire le sous-espace propre pour la valeur propre 2. Les autres colonnes donnent l'image de $(f-2\,id_E)$, c'est-à-dire le sous-espace complémentaire du sous-espace propre pour la valeur propre 2. Ce sous-espace est le noyau de $(f+2\,id_E)$, c'est-à-dire le sous-espace propre pour la valeur propre -2.

5°/ Base de vecteurs propres.

Comme le polynôme minimal de la matrice M ne comporte que des racines simples, la matrice M est diagonalisable et l'on peut trouver une base formée de vecteurs propres. Pour déterminer une telle base, réduisons la matrice $M-2\,I$.

$$M-2\,I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire la 1[e] colonne de la 4[e]. Ajouter la somme de la 1[e] et de la 3[e] colonnes à la 2[e].

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que :

- La matrice $M-2\,I$ est de rang 2 : son image est de dimension 2, son noyau est de dimension 2.
- On peut prendre pour vecteurs propres relativement à la valeur propre 2 les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- On peut prendre pour vecteurs propres pour la valeur propre -2 les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Les valeurs propres -2 et 2 sont toutes deux des valeurs propres doubles. Le polynôme caractéristique de la matrice M est donc $P(\lambda) = (\lambda^2-4)^2 = (\lambda-2)^2\,(\lambda+2)^2$.

Les vecteurs $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres.

6°/ Diagonalisation de la matrice *M*.

Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice formée des vecteurs propres. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue est diagonale, avec, sur la diagonale, les valeurs propres avec leurs ordres de multiplicité.

EXERCICE 7.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

SOLUTION.

1°/ Réduction de la matrice A.

Réduisons la matrice A.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter la 1^e^ colonne à la 2^e^ et à la 3^e^.

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplier par −2 la 1^e^ colonne. Multiplier par −1 la 2^e^ colonne. Retrancher la 2^e^ colonne de la 1^e^.
Echanger la 1^e^ et la 2^e^ colonnes.

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que :

- La matrice A est de rang 3 : son image est $\mathbb{R}^3$, son noyau est $\{0\}$.
- La matrice A est inversible et son inverse est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét\,(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -0{,}5-\lambda & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5-\lambda & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 3^e^ ligne.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -0{,}5-\lambda & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\,[\,(\lambda-0{,}5)(\lambda+0{,}5) - 0{,}5^2\,]$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\times 0{,}5^2) = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 0{,}5)$$

$$\boxed{P(\lambda) = -(\lambda + \frac{\sqrt{2}}{2})(\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2})(\lambda - 1)}$$

3°/ Valeurs propres.

La matrice A a trois valeurs propres simples distinctes, $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$.

4°/ Polynôme minimal.

Comme le polynôme caractéristique est produit de facteurs de premier degré distincts, ces facteurs forment aussi le polynôme minimal de la matrice, c'est-à-dire le polynôme unitaire de degré minimal tel que $P_u(A) = 0$.

$$\boxed{P_u(\lambda) = (\lambda + \frac{\sqrt{2}}{2})(\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2})(\lambda - 1)}$$

5°/ Vecteurs propres.

Les trois valeurs propres sont réelles et distinctes. Les sous-espaces propres sont donc de dimension 1, leur somme est directe et égale à $\mathbb{R}^3$.

- Pour vecteur propre relativement à la valeur propre $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire non nulle des colonnes de la matrice

$$(A - \frac{\sqrt{2}}{2} I)(A - I) = A(A - I) - \frac{\sqrt{2}}{2}(A - I) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

par exemple 2 fois la différence entre la 1[e] et la 2[e] colonnes :

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Pour vecteur propre relativement à la valeur propre $\frac{\sqrt{2}}{2}$, on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire non nulle des colonnes de la matrice

$$(A + \frac{\sqrt{2}}{2} I)(A - I) = A(A - I) + \frac{\sqrt{2}}{2}(A - I) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

par exemple 2 fois la différence entre la 1[e] et la 2[e] colonnes :

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Pour vecteur propre relativement à la valeur propre 1, on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire non nulle des colonnes de la matrice

$$(A + \frac{\sqrt{2}}{2} I)(A - \frac{\sqrt{2}}{2} I) = A^2 - \frac{1}{2} I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

par exemple le vecteur $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6°/ Diagonalisation.

Soit P la matrice des vecteurs propres,

$$P = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; P^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ -1 & 1+\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} ;$$

$$P^{-1} A \, P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 8.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

SOLUTION.

1°/ Réduction de la matrice *B*.

Réduisons la matrice B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter la somme de 1[e] et de la 2[e] colonnes à la 3[e].

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que :

- La matrice B est de rang 2 : son image est de dimension 2, son noyau est de dimension 1.
- L'image de B est engendrée par la famille libre $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, tirée de la la matrice de gauche.
- Le noyau de B est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tiré de la matrice de droite.
- Si f est l'endomorphisme de matrice B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f^2(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f^2(e_2) = f(e_2) - f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, f^2(e_3) = -f(e_1) - 2f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2B^2.$
- $B^2(B - 2I) = 0$
- $B(B - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

2°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét\,(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e ligne.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) - (\lambda - 2) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 2)$$

$$\boxed{P(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2)}$$

Ce résultat confirme le résultat obtenu pour la matrice B : $B^2(B - 2I) = 0$, c'est le théorème de Hamilton-Cailey.

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice B sont les racines du polynôme caractéristique, 0 et 2. La valeur propre 0 est racine double. La valeur propre 2 est racine simple.

4°/ Polynôme minimal.

La relation $B(B - 2I) \neq 0$ confirme que le polynôme minimal de la matrice B est $\lambda^2(\lambda - 2)$.

5°/ Vecteurs propres.

- Pour vecteur propre pour la valeur propre 0, on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire non nulle des colonnes de la matrice $B(B - 2I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, par exemple le vecteur $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Le noyau de la matrice $B(B - 2I)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2, mais le noyau de B est de dimension 1, comme on l'a vu plus haut.
- Pour vecteur propre relativement à la valeur propre 2, on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire non nulle des colonnes de la matrice $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, par exemple le vecteur $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. La matrice B^2 est de rang 1, son noyau est de dimension 2, engendré par les vecteurs e_1 et $e_2 + e_3$, comme on le voit en faisant la somme des 2e et 3e colonnes de la matrice B^2.
- Comme le vecteur $a_2 = e_1$ est linéairement indépendant des vecteurs a_1 et a_3, on peut compléter la famille libre $\{a_1, a_3\}$ en une base de R^3 avec le vecteur $a_2 = e_1$.
- Les vecteurs propres $\{a_1, a_2, a_3\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$, mais ce n'est pas une matrice de vecteurs propres, de sorte que la matrice B n'est pas diagonalisable.

6°/ Triangularisation.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, la matrice de la base a. $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue comporte sur la diagonale les valeurs propres de B avec leur ordre de multiplicité : double pour 0, simple pour 2.

Dans le sous-espace de base $\{a_1 , a_2\}$, la restriction de l'endomorphisme f défini par la matrice B n'est pas diagonal, il a pour matrice sur $\{a_1 , a_2\}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: pour un $x = x_1 a_1 + x_2 a_2$ du plan engendré par a_1 et a_2 ,

$$B x = x_2 a_1 .$$

Dans le sous-espace de base a_3 , la restriction de l'endomorphisme f défini par la matrice B est une homothétie de rapport 2.

$$\mathbb{R}^3 = Ker\, B \oplus \mathbb{R}\, e_1 \oplus Ker\,(B - 2\, I)$$

EXERCICE 9.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

SOLUTION.

1°/ Déterminant.

$\begin{vmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 12 - 14 = -2 \neq 0$. La matrice C est inversible. 0 n'est pas valeur propre. La matrice C est de rang 3, son image est $\mathbb{R}^3$ tout entier, son noyau est réduit à 0.

2°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét\,(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 7 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la première colonne :

$P(\lambda) = -\lambda\,(\lambda - 4)(\lambda + 2) + (-14 - 7\,\lambda + 12) = -\lambda\,(\lambda^2 - 2\,\lambda - 8) - 2 - 7\,\lambda = -\lambda^3 + 2\,\lambda^2 + \lambda - 2$

$P(\lambda) = -\lambda^2\,(\lambda - 2) + (\lambda - 2) = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$

$$\boxed{P(\lambda) = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2)}$$

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice C sont les racines du polynôme caractéristique : -1, 1, 2. Il y a trois valeurs propres réelles simples distinctes.

4°/ Vecteurs propres.

Comme les trois valeurs propres sont distinctes, il y a trois sous-espaces propres de dimension 1.

$$(C - I)(C - 2\,I) = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 30 \\ -1 & -1 & 6 \\ -2 & -2 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sous-espace propre pour } \lambda_1 = -1 : \mathbb{R}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$(C + I)(C - 2\,I) = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 18 \\ -3 & 3 & 6 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sous-espace propre pour } \lambda_2 = 1 : \mathbb{R}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$(C + I)(C - I) = \begin{pmatrix} -8 & 16 & 12 \\ -4 & 8 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sous-espace propre pour } \lambda_3 = 2 : \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5°/ Diagonalisation.

Les vecteurs $a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, forment une base. Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme f, de matrice C dans la base canonique, est diagonale car $f(a_1) = -a_1$, $f(a_2) = a_2$, $f(a_3) = 2a_3$.

$$[f,\{a\},\{a\}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & -6 \\ -4 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 10.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

SOLUTION.

1°/ Déterminant.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ car la } 1^e \text{ et la } 4^e \text{ colonnes sont proportionnelles.}$$

2°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét\,(D - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Développons par rapport à la 2^e colonne :

$$P(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -4 & 8 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Développons par rapport à la 3^e colonne :

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda\,(\lambda - 1)(2-\lambda)^2$$

$$\boxed{P(\lambda) = \lambda\,(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2}$$

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice D sont les racines du polynôme caractéristique : 0, 1, 2 (racine double).

4°/ Vecteurs propres.

$$D\,(D - I)(D - 2\,I) = 0$$

Donc le polynôme minimal de la matrice D est $\lambda\,(\lambda - 1)(\lambda - 2)$.

$$(D - I)(D - 2\,I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre pour la valeur propre 0.}$$

Réduisons la matrice D.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter 2 fois la 4[e] colonne à la 1[e]. Retrancher la 2[e] colonne de la 4[e].

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice D est de rang 3. Son noyau, qui est le sous-espace propre pour la valeur propre 0, est de dimension 1, donc la vecteur a_1 forme à lui seul une base du sous-espace propre pour la valeur propre 0.

$D\,(D-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base du sous-espace propre pour la valeur propre 1.

$D\,(D-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment une base du sous-espace propre pour la valeur propre 2, qui est de dimension 2.

5°/ Diagonalisation.

Comme il existe une base $a = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ formée de vecteur propres, la matrice D est diagonalisable :

$$[f,\{a\},\{a\}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice du changement de base est :

$$[id_E,\{a\},\{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci traduit les formules :

$a_1 = e_1 + 2\,e_4$
$a_2 = e_2$
$a_3 = e_2 + e_4$
$a_4 = 2\,e_1 + e_3$

On a alors :

$e_2 = a_2$
$e_4 = a_3 - e_2 = a_3 - a_2$
$e_1 = a_1 - 2\,e_4 = a_1 - 2\,(a_3 - a_2)$
$e_3 = a_4 - 2\,e_1 = a_4 - 2\,(a_1 + 2\,a_2 - 2\,a_3)$

$$[id_E,\{e\},\{a\}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = [id_E,\{a\},\{e\}]^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 11.

Etudier la matrice à n lignes et n colonnes :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUTION.

La matrice F, à n lignes et n colonnes, est de rang 1. Son noyau est donc de dimension $n-1$. et a pour base la famille $\{e_2 - e_1 , e_3 - e_1 , \dots , e_n - e_1 \}$. Dans la base $a = \{e_1 , e_2 - e_1 , e_3 - e_1 , \dots , e_n - e_1 \}$, la matrice de l'endomorphisme f de matrice F dans la base canonique est donnée par les images des vecteurs de base :

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + \dots + e_n = n\, e_1 + (e_2 - e_1) + \dots + (e_n - e_1)$$
$$f(e_i - e_1) = 0$$

$$[f,\{a\},\{a\}] = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = (n-\lambda)(-\lambda)^{n-1}$

Les valeurs propres de f sont donc 0 (valeur propre d'ordre $n-1$) et n, valeur propre simple.

La relation :

$$f(e_1) = n\, e_1 + (e_2 - e_1) + \dots + (e_n - e_1)$$

donne

$$f(f(e_1)) = f(ne_1) + f(e_2 - e_1) + \dots + f(e_n - e_1) = n f(e_1)$$

et cette relation montre que le vecteur non nul :

$$f(e_1) = n\, e_1 + (e_2 - e_1) + \dots + (e_n - e_1) = e_1 + e_2 + \dots + e_n$$

est vecteur propre pour la valeur propre n.

Dans la base $b = \{e_1 + e_2 + \dots + e_n , e_2 - e_1 , e_3 - e_1 , \dots , e_n - e_1 \}$, la matrice de l'endomorphisme f de matrice F dans la base canonique est diagonale :

$$[f,\{b\},\{b\}] = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

et la matrice du changement de base est :

$$[\, id_E ,\{b\},\{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Son inverse est la matrice des composantes des e_i sur la base b :

$$b_1 - (b_2 + \dots + b_n) = n\, e_1$$

$$e_1 = \frac{1}{n}\, b_1 - \frac{1}{n}\, b_2 - \dots - \frac{1}{n}\, b_n$$

$$e_i = b_i + e_1 = b_i + \frac{1}{n}(b_1 - b_2 - \dots - b_n) = \frac{1}{n}\, b_1 - \frac{1}{n}\, b_2 - \dots + \frac{n-1}{n}\, b_i - \dots - \frac{1}{n}\, b_n$$

$$[\, id_E ,\{e\},\{b\}] = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisation.

$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 12.

Etudier la matrice à n lignes et n colonnes :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUTION.

Remarques générales.

G est une matrice réelle symétrique. Son déterminant est $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, comme on le voit par récurrence :

$Dét\,(G_1) = 1$

$Dét\,(G_n) = (-1)^n\, Dét\,(G_{n-1})$

On remarque aussi que $G^2 = I$.

Soit f l'endomorphisme de matrice G dans la base canonique. Le changement de base $a_i = e_{n+1-i}$, soit

$$[id_E, \{a\}, \{e\}] = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = G$$

donne :

$$f(a_i) = f(e_{n+1-i}) = e_i$$

d'où :

$$[f, \{a\}, \{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

La relation $G^2 = I$ montre que $G^{-1} = G$, donc :

$$[id_E, \{e\}, \{a\}] = [id_E, \{a\}, \{e\}] = G$$
$$[f, \{a\}, \{a\}] = [id_E, \{e\}, \{a\}][f, \{a\}, \{e\}] = G$$

La matrice de G est invariante dans ce changement de base.

On a aussi $(G - I)(G + I) = 0$, donc le polynôme minimal de G est $P_u(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$. Les valeurs propres de G sont donc -1 et 1.

On a

$$f(e_1 + e_2 + \ldots + e_n) = e_1 + e_2 + \ldots + e_n,$$

donc $e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ est toujours vecteur propre pour la valeur propre 1.

Polynôme caractéristique et valeurs propres.

1^er cas : n est pair, $n = 2k$.

Dans ce cas, il n'y a pas de 1 sur la diagonale de G. Le polynôme caractéristique de G est :

$$P(\lambda) = Dét(G - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant λ fois la dernière colonne à la première :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-\lambda^2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e colonne, puis le déterminant restant par rapport à la 1e ligne :

$$P_n(\lambda) = (-1)^n (1-\lambda^2) \times (-1)^{n-1} P_{n-2}(\lambda) = -(1-\lambda^2) P_{n-2}(\lambda).$$

Avec $P_2(\lambda) = (\lambda^2 - 1) = -(1-\lambda^2)$, il vient par récurrence :

$$P_n(\lambda) = (-1)^k (1-\lambda^2)^k = (\lambda+1)^k (\lambda-1)^k$$

Les valeurs propres de G sont donc -1 et 1, avec, pour chacune un ordre de multiplicité égal à $k = \frac{n}{2}$.

2e cas : *n* est impair, $n = 2k + 1$.

Dans ce cas, il y a un 1 sur la diagonale de G.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à la 1e colonne λ fois la dernière colonne :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-\lambda^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

Développons le déterminant par rapport à la 1e colonne, puis le déterminant restant par rapport à la 1e ligne :

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \ (1-\lambda^2) \times (-1)^{n-1} P_{n-2}(\lambda) = -(1-\lambda^2) P_{n-2}(\lambda)$$

Avec $P_1(\lambda) = (1-\lambda)$, il vient par récurrence :

$$P_n(\lambda) = (-1)^k (1-\lambda^2)(1-\lambda) = (-1)^k (1+\lambda)^k (1-\lambda)^{k+1} = -(\lambda+1)^k (\lambda-1)^{k+1}.$$

Les valeurs propres de G sont -1 et 1, -1 est d'ordre $k = \frac{n-1}{2}$, 1 est d'ordre $k + 1 = \frac{n+1}{2}$.

Vecteurs propres.

En raison de la symétrie de la matrice de G, nous allons considérer les vecteurs $e_i + e_{n+1-i}$.

$$f(e_i + e_{n+1-i}) = f(e_i) + f(e_{n+1-i}) = e_{n+1-i} + e_i = e_i + e_{n+1-i}$$

Le vecteur $e_i + e_{n+1-i}$ est toujours vecteur propre pour la valeur propre 1, pour tout i de 1 à $\left[\frac{n}{2}\right]$ (partie entière de $\frac{n}{2}$). Nous obtenons ainsi k vecteurs propres si $n = 2k$ ou si $n = 2k + 1$. A ces k vecteurs, il convient d'ajouter le vecteur d'indice central e_{k+1} lorsque n est impair : ce vecteur est invariant par la matrice G, il correspond au 1 de la diagonale de G, donc il est vecteur propre pour la valeur propre 1.

Ces k ou $k + 1$ vecteurs forment une famille libre de façon évidente car la matrice de leurs composantes sur la base canonique comporte une diagonale de 1 avec des 0 au-dessus.

Si l'on considère maintenant les vecteurs $e_i - e_{n+1-i}$, il vient :

$$f(e_i - e_{n+1-i}) = f(e_i) - f(e_{n+1-i}) = e_{n+1-i} - e_i = -(e_i - e_{n+1-i})$$

Le vecteur $e_i - e_{n+1-i}$ est vecteur propre pour la valeur propre -1, pour tout i de 1 à $\left[\frac{n}{2}\right]$.

Nous obtenons ainsi k vecteurs propres si $n = 2\,k$ ou si $n = 2\,k + 1$. Les k vecteurs obtenus forment aussi une famille libre.

Les n vecteurs ainsi définis forment une base de vecteurs propres.

Diagonalisation.

Comme il existe une base formée de vecteurs propres, la matrice G est diagonalisable, avec, sur la diagonale, k fois la valeur propre -1 et k (n pair) ou $k + 1$ (n impair) fois la valeur propre 1.

EXERCICE 13.

Etudier la matrice à n lignes et n colonnes :

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

SOLUTION.

La matrice H est une matrice symétrique. Ses valeurs propres sont donc réelles.

Déterminant.

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à la 1e colonne la somme des $n-1$ autres colonnes :

$$\text{Dét}\,(H) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+(n-1)\,\beta & \beta & \cdots & \beta \\ \alpha+(n-1)\,\beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \beta \\ \alpha+(n-1)\,\beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

On peut mettre en facteur $\alpha + (n-1)\,\beta$ dans la 1e colonne :

$$\text{Dét}\,(H) = (\alpha + (n-1)\,\beta) \begin{vmatrix} 1 & \beta & \cdots & \beta \\ 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ 1 & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant β fois la 1e colonne de chacune des $(n-1)$ autres :

$$\text{Dét}\,(H) = (\alpha + (n-1)\,\beta) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e ligne :

$$\text{Dét}\,(H) = (\alpha + (n-1)\,\beta)\,(\alpha-\beta)^{n-1}$$

Polynôme caractéristique.

$P(\lambda) = \text{Dét}\,(H - \lambda I)$ s'obtient en remplaçant α par $(\alpha - \lambda)$ dans le déterminant de H :

$$\boxed{P(\lambda) = (\alpha + (n-1)\,\beta - \lambda)\,(\alpha - \beta - \lambda)^{n-1}}$$

Valeurs propres.

La matrice H a 2 valeurs propres :

— $\lambda_1 = \alpha + (n-1)\,\beta$, d'ordre 1.

— $\lambda_2 = \alpha - \beta$, d'ordre $n-1$.

Polynôme minimal.

$$H - (\alpha-\beta)\,I = \begin{pmatrix} \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & \beta \end{pmatrix}.$$

Or $H\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ est le vecteur dont les composantes sont les sommes des lignes de la matrice H, donc :

$H\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = (\alpha + (n-1)\beta)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, soit $(H - (\alpha + (n-1)\beta)I)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ et, par conséquent,

comme toutes les colonnes de la matrice $H - (\alpha-\beta)I$ sont proportionnelles au vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, le produit de matrices $(H - (\alpha + (n-1)\beta)I)(H - (\alpha-\beta)I)$ est nul. Le polynôme minimal de la matrice H est donc :

$$\boxed{P_u(\lambda) = (\lambda - (\alpha + (n-1)\beta))(\lambda - (\alpha - \beta))}$$

Vecteurs propres.

Réduisons la matrice $H - (\alpha + (n-1)\beta)I = \begin{pmatrix}-(n-1)\beta & \beta & \cdots & \beta\\ \beta & -(n-1)\beta & \cdots & \beta\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta & \beta & \cdots & -(n-1)\beta\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}-(n-1)\beta & \beta & \cdots & \beta\\ \beta & -(n-1)\beta & \cdots & \beta\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta & \beta & \cdots & -(n-1)\beta\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

Ajouter à la 1e colonne la somme des $(n-1)$ autres colonnes

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix}0 & \beta & \cdots & \beta\\ 0 & -(n-1)\beta & \cdots & \beta\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \beta & \cdots & -(n-1)\beta\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que le vecteur $a_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ est dans le noyau de $H - (\alpha + (n-1)\beta)I$. Comme la valeur propre $(\alpha + (n-1)\beta)$ est simple, le sous-espace propre correspondant est de dimension 1 : le vecteur a_1 est donc une base du noyau de $H - (\alpha + (n-1)\beta)I$.

La matrice $H - (\alpha - \beta)I$ a toutes ses colonnes identiques. Pour $\beta \neq 0$, on voit, en soustrayant la 1e colonne de chacune des autres que :

— cette matrice est de rang 1,

— son noyau a pour base la famille de vecteurs $\{e_2 - e_1, e_3 - e_1, \ldots, e_n - e_1\}$: ces vecteurs sont donc des vecteurs propres de la matrice H pour la valeur propre $\alpha - \beta$. On note $a_i = e_i - e_1$, pour $i \geq 2$.

Diagonalisation.

Les vecteurs $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ forment (comme pour la matrice F) une base de R^n. Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme f de matrice H dans la base canonique est diagonale :

$$[f,\{a\},\{a\}]=\begin{pmatrix} \alpha+(n-1)\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 14.

Soit A une matrice symétrique réelle à n lignes et n colonnes telle qu'il existe un entier k vérifiant $A^k = I_n$ .Montrer que

$$A^2 = I_n .$$

SOLUTION.

Soit A une matrice réelle symétrique à n lignes et n colonnes telle qu'il existe un entier $k > 1$ vérifiant $A^k = I_n$. A est la matrice d'une endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$. On sait qu'alors existe dans R^n une base formée de vecteurs propres. Soit $a = \{a_1 , \dots , a_n \}$ une telle base. On sait aussi que toutes les racines du polynôme caractéristique sont réelles, donc toutes les valeurs propres sont réelles. Soit λ_i ces valeurs propres, $i = 1, \dots , n$. Certaines des valeurs propres peuvent être multiples.

Soit $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i a_i$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$. On a :

$$f^k(x) = x \text{ donc } \sum_{i=1}^{i=n} x_i \lambda_i^k a_i = \sum_{i=1}^{i=n} x_i a_i$$

Comme les a_i forment une base, on obtient , pour tout i ,

$$\lambda_i^k = 1.$$

Comme λ_i est réel, c'est que $\lambda_i = \pm 1$, donc

$$\lambda_i^2 = 1.$$

On a alors :

$$f^2(x) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \lambda_i^2 a_i = \sum_{i=1}^{i=n} x_i a_i = x$$

d'où $f^2 = id_E$ et

$$A^2 = I_n .$$

EXERCICE 15.

Vrai ou Faux.

E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps de nombres complexes K. Soit f un endomorphisme de E. Id est l'application identique. Donnez votre opinion sur les assertions suivantes (à justifier par une démonstration).

01. Si $f^2 = f$, alors f est inversible.
02. Si f est inversible, alors f^{-1} est diagonalisable.
03. Si f est diagonalisable, alors f est inversible.
04. Si f est inversible, alors f^2 l'est aussi.
05. Si f est diagonalisable, alors f^2 l'est aussi.
06. Si $f^2 = f$, alors f est diagonalisable.
07. Si $f^2 = Id$, alors f est inversible.
08. Si f est inversible et diagonalisable, alors f^{-1} est diagonalisable.
09. Si la matrice de f par rapport à une base $\{u\}$ est symétrique, alors f est diagonalisable.
10. Le noyau de f est un sous-espace propre de f.
11. L'image et le noyau d'un endomorphisme diagonalisable et non inversible forment une somme directe.
12. Si une matrice à éléments dans $\mathbb{R}$ est diagonalisable et inversible, son inverse est diagonalisable.
13. La somme de deux endomorphismes diagonalisables dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas forcément diagonalisable.
14. La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

SOLUTION.

01. Endomorphisme idempotent.

Faux.

Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = f$. On a alors $Dét\,(f^2) = Dét\,(f)$, soit :

$$(Dét\,(f))^2 = Dét\,(f)$$

d'où $Dét\,(f) = 0$ ou $Dét\,(f) = 1$. Si $Dét\,(f) = 1$, f est inversible, mais si $Dét\,(f) = 0$, f n'est pas inversible.
Par exemple, si l'on prend pour f le projecteur sur le premier axe canonique :

$$f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, 0, \dots, 0)$$

on a bien :

$$f^2(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = f(x_1, 0, \dots, 0) = (x_1, 0, \dots, 0) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

donc $f^2 = f$, mais le noyau de f est l'ensemble des vecteurs dont la première composante est nulle : c'est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$: il n'est pas réduit à 0 dès que n est strictement plus grand que 1. Comme le noyau n'est pas réduit à 0, f n'est pas inversible.

$$\boxed{f^2 = f \not\Rightarrow f \text{ est inversible}}$$

02. Endomorphisme inversible.

Faux.

L'endomorphisme inverse f^{-1} possède les mêmes sous-espaces propres que f avec pour valeurs propres les inverses des valeurs propres de f, ce qui résulte de :

$$f(x) = \lambda x \Longleftrightarrow f^{-1}(x) = \lambda^{-1} x$$

Dire que E possède une base formée de vecteurs propres pour f est donc équivalent à dire que E possède une base formée de vecteurs propres pour f^{-1}. Donc, pour un endomorphisme inversible, f^{-1} est diagonalisable si et seulement si, f est diagonalisable. Or il existe des endomorphismes inversibles non diagonalisables, par exemple une rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$, donc :

$$\boxed{f \text{ inversible} \not\Rightarrow f^{-1} \text{ diagonalisable}}$$

03. Endomorphisme diagonalisable.

Faux.

Il existe des endomorphismes diagonalisables non inversibles. Exemple : le projecteur sur l'axe des x dans R^2. Sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est diagonale, mais comme 0 est valeur propre (le déterminant est nul), elle n'est pas inversible.

$$\boxed{f \text{ diagonalisable} \not\Rightarrow f \text{ inversible}}$$

04. Carré d'un endomorphisme inversible.

Vrai.

$$f \text{ inversible} \Longleftrightarrow Dét\, f \neq 0 \Longleftrightarrow (Dét\, f)^2 \neq 0 \Longleftrightarrow Dét\, f^2 \neq 0 \Longleftrightarrow f^2 \text{ inversible}$$

$$\boxed{f \text{ inversible} \Longleftrightarrow f^2 \text{ inversible}}$$

05. Carré d'un endomorphisme diagonalisable.

Vrai.

$$f(x) = \lambda x \Longrightarrow f^2(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$$

Tout vecteur propre pour f est vecteur propre pour f^2. Donc s'il existe une base formée de vecteurs propres pour f, cette base est formée de vecteurs propres pour f^2. Il en résulte que :

$$\boxed{f \text{ diagonalisable} \Longrightarrow f^2 \text{ diagonalisable}}$$

06. Endomorphisme idempotent.

Vrai.

Un endomorphisme idempotent est, par définition, un projecteur. Tout projecteur f est diagonalisable car E est somme directe du noyau et de l'image du projecteur, et, dans le noyau, f est nul, et, dans l'image, f est l'application identique, donc

$$\boxed{f^2 = f \Longrightarrow f \text{ est diagonalisable}}$$

07. Endomorphisme involutif.

Vrai.

$$f^2 = Id \Longleftrightarrow f \circ f = Id \Longleftrightarrow f = f^{-1} \Longrightarrow f \text{ est inversible}$$

$$\boxed{f^2 = Id \Longrightarrow f \text{ est inversible}}$$

08. Endomorphisme inversible et diagonalisable.

Vrai.

Dans 3.02, nous avons vu que, pour un endomorphisme inversible, f^{-1} est diagonalisable si et seulement si, f est diagonalisable. Donc

$$\boxed{f \text{ inversible et diagonalisable} \Longrightarrow f^{-1} \text{ diagonalisable}}$$

09. Endomorphisme symétrique.

Faux.

On sait que toute matrice réelle symétrique est diagonalisable, mais que dire des matrices complexes symétriques ? L'extension des matrices réelles symétriques au cas complexe est constitué par les matrices hermitiennes (c'est-à-dire dont la transposée est égale à la conjuguée) : toute matrice hermitienne est diagonalisable, et, plus généralement, tout endomorphisme normal est diagonalisable (un endomorphisme est normal si, et seulement si, il commute avec son adjoint ; tout endomorphisme unitaire, c'est-à-dire inversible et de déterminant 1, est normal ; tout endomorphisme hermitien est normal)

Considérons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$. C'est une matrice symétrique. Son polynôme caractéristique est $-\lambda(2-\lambda) - i^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. Il y a donc une seule valeur propre $\lambda = 1$. On a :

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 1 et son noyau a pour base le vecteur $e_1 - i\, e_2$. Le sous-espace propre pour la valeur propre 1, est de dimension 1, différente de l'ordre de multiplicité 2 de la valeur propre dans le polynôme caractéristique : donc la matrice A n'est pas diagonalisable, et on a construit un exemple de matrice symétrique non diagonalisable.

$$\boxed{f \text{ symétrique} \not\Longrightarrow f \text{ diagonalisable}}$$

10. Noyau d'un endomorphisme.

Faux.

$$x \in Ker f \Longleftrightarrow f(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0.x$$

On voit donc que, pour que $Ker\, f$ soit sous-espace propre pour la valeur propre 0, il faut et il suffit qu'il ne soit pas réduit à 0, donc il faut et il suffit que $Dét\, f = 0$.

$$\boxed{Ker\, f \text{ sous-espace propre de } f \Longleftrightarrow Dét\, f = 0}$$

Comme il existe évidement des endomorphismes dont le déterminant n'est pas nul, il existe des endomorphismes dont le noyau n'est pas un sous-espace propre.

11. Somme directe de l'image et du noyau d'un endomorphisme.

Vrai.

$x \in Ker f \cap Im f \Longrightarrow (f(x) = 0$ et $(\exists\, y \in E)(x = f(y)))$

f diagonalisable $\Longrightarrow$ Il existe une base $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ formée de vecteurs propres

$y \in E \Longrightarrow y = \Sigma_i\ y_i\, a_i$

$x = f(y) = \Sigma_i\ y_i\, f(a_i) = \Sigma_i\ y_i\ \lambda_i\, a_i \Longrightarrow f(x) = \Sigma_i\ y_i\ \lambda_i f(a_i) = \Sigma_i\ y_i\ \lambda_i^2\, a_i$

$f(x) = 0 \Longrightarrow (\forall i)(y_i\ \lambda_i^2 = 0) \Longrightarrow (\forall i)(y_i = 0$ ou $\lambda_i = 0) \Longrightarrow (\forall i)(y_i\ \lambda_i = 0) \Longrightarrow x = 0.$

L'image et le noyau de f forment donc une somme directe.

12. Inverse d'une matrice diagonalisable.

Vrai.

Soit M une matrice inversible et diagonalisable. Elle est semblable à une matrice diagonale : il existe donc une matrice P telle que :

$$M = P^{-1} A\, P$$

où A est une matrice diagonale, ayant pour éléments de la diagonale principale, les valeurs propres de M. Comme M est inversible, son déterminant, produit des valeurs propres, n'est pas nul, donc 0 n'est pas valeur propre : aucun élément de la diagonale principale de A n'est nul. Alors A est inversible et son inverse est la matrice diagonale dont les éléments de la diagonale principale sont les inverses des éléments de la diagonale principale de A.

$$M^{-1} = (P^{-1} A P)^{-1} = P^{-1} A^{-1} P$$

Comme la matrice A^{-1} est une matrice diagonale, la matrice M^{-1} est diagonalisable.

13. Somme de deux endomorphismes diagonalisables.

Vrai.

Considérons par exemple l'endomorphisme f_1, de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, et l'endomorphisme f_2, de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Le polynôme caractéristique de f_1 est $P_1(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$: f_1 a deux valeurs propres réelles distinctes, c'est un endomorphisme diagonalisable.
Le polynôme caractéristique de f_2 est $P_2(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$: f_2 a deux valeurs propres réelles distinctes, c'est un endomorphisme diagonalisable.
La somme $f = f_1 + f_2$ a pour matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $P(\lambda) = (1 - \lambda)^2 + 1$. Il n'est jamais nul, donc f n'a pas de valeur propre réelle et n'est donc pas diagonalisable.

14. Matrice diagonalisable ?

Faux.

Le polynôme caractéristique de la matrice A est :

$$P(\lambda) = (3 - \lambda)(1 - \lambda)(-5 - \lambda) + 16(1 - \lambda) = (1 - \lambda)((3 - \lambda)(-5 - \lambda) + 16) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1)$$

$$P(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$$

Le polynôme minimal est donné par :

$$(A + I)(A - I) \neq 0 \Longrightarrow P_u(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$$

La matrice $A + I$ a sa première et sa troisième colonnes proportionnelles : elle est de rang 2, le sous-espace propre pour la valeur propre -1 est de dimension 1, différente de l'ordre de multiplicité de la valeur propre -1 dans le polynôme caractéristique, donc la matrice A n'est pas diagonalisable.