1. Matrices.

Exercice 1.1. Voici 7 matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Effectuez toutes les sommes et tous les produits possibles de deux de ces matrices. Calculer $\frac{1}{2}A$ et D^n pour $n \in \mathbb{N}$. Donner ${}^tA$ et ${}^tC$.

Exercice 1.2. Déterminer si les matrices suivantes sont colonnes équivalentes, lignes équivalentes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.3. Quelle est la matrice ligne échelonnée associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & a & -1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}?$$

Exercice 1.4. Calculer les inverses des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.5. Calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & -1 \\ 1 & -m & -1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix} \quad \text{avec } m \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1.6. Trouver les solutions des systèmes linéaires suivants :

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 5y + z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - z + t = -1 \\ ax + y + 2z = 2 \\ y - z + 2t = 0 \\ -x + 2z + t = 1 \end{cases}$.

2. Révisions: Sous-espaces vectoriels. Bases.

Exercice 2.1. Les familles suivantes sont-elles libres, génératrices de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$, des bases de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$?

a) $\{(1,0,1),(0,1,-2)\}$

b) $\{(1,2,0),(2,4,1),(1,2,2),(-1,-2,3)\}$

c) $\{(1,2,0),(2,-1,1),(1,1,-1)\}$.

d) $\{(1,1,8,-1),(1,0,3,0),(3,2,19,-2)\}$.

e) $\{(1,-1,-2,-4),(1,1,8,4),(3,-1,4,-4)\}$.

f) $\{(1,0,1,0),(2,1,4,3),(1,2,5,-2),(-1,3,5,4)\}$.

Exercice 2.2. Soit $u=(2,1,3,2)$, $e_1=(1,1,0,1)$, $e_2=(2,1,3,1)$, $e_3=(1,1,0,0)$, $e_4=(0,1,-1,-1)$.

Vérifier que la famille de vecteurs $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ puis trouver $[u]_{\mathcal{B}}$.

Exercice 2.3. Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base $\mathcal{B}=\{(0,1,1),(1,0,1),(0,1,0)\}$. Trouver v si $[v]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 2.4. Soit M l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer que c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont $(1,t,t^2,\cdots,t^n)$ est une base ; quelle est sa dimension ?

On fixe maintenant $n=3$

a) Trouver le rang du système de vecteurs
$$e_1(t)=1-t^3,\qquad e_2(t)=1-t^2,\qquad e_3(t)=t^2-t^3,\qquad e_4(t)=t+t^2+t^3.$$

b) Montrer que le système de vecteurs $(1,1+t,t+t^2,1+t+t^3)$ est une base et trouver dans cette base les coordonnées du vecteur $P(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$.

Exercice 2.5. Les sous ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? Si c'est le cas en donner une base et la dimension.

a) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y=4,\ z=2x\}$.

b) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - 2z = 0\}$.

c) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y - xz = 0\}$.

Exercice 2.6. Dans $\mathbb{R}^4$, soit

$$P = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ x_1 - x_3 + x_4 = 0,\ x_2 + x_3 = 0\}.$$

Montrer que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$; déterminer une base de P et compléter cette base pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

3. Applications linéaires.

Exercice 3.1. Les applications $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ suivantes sont-elles linéaires? Si oui, déterminer le noyau et de l'image de T et donner la matrice de T dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

a) $T(x, y, z) = (2x + y, x + z)$,

b) $T(x, y, z) = (x - y, x^2 - y^2)$,

c) $T(x, y, z) = (x + y + 1, x + z - 1)$,

d) $T(x, y, z) = x(1, 2)$,

e) $T(x, y, z) = (x + y + z, 0)$.

Exercice 3.2. Soit $T : \mathcal{M}_{\in\times\in}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \int_0^1 (3at^2 + b - d)\, dt$$

a) Vérifier que T est une application linéaire.

b) Déterminer une base éventuelle du noyau de T.

Exercice 3.3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (x - y + z, x - y + z, y - 2z, -x + y - z).$$

a) Vérifier que f est une application linéaire.

b) Déterminer des bases du noyau et de l'image de f. Quelle est la matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{A} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ et
$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 0), (0, -1, 1, 1)\}$. ?

Exercice 3.4. Soit l'application $T : \mathbb{R}_{2\times 2} \to \mathbb{R}_{2\times 2}$ définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{12} - a_{22} \\ a_{11} + a_{21} & 2a_{11} + 2a_{12} \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que T est linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau, son rang et une base de son image.

3. Donner la matrice de T dans la base canonique de $\mathbb{R}_{2\times 2}$.

Exercice 3.5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (2y - z, x - 3y, -5x - y + 5z).$$

a) Vérifier que f est une application linéaire.

b) Déterminer des bases du noyau et de l'image de f.

c) Donner la matrice de f dans la base $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

d) Donner la matrice de f dans les bases $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 2)\}$ et $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.6. Trouver la matrice de passage de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ avec

$\mathcal{A} = \{(1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$ et

$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 2)\}$.

Exercice 3.7. Trouver la matrice de passage de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ avec

$\mathcal{A} = \{(1, 2, -1, 0), (1, -1, 1, 1), (-2, 1, 1, 2), (-1, -1, 0, 1)\}$ et

$\mathcal{B} = \{(2, 1, 0, 1), (0, 1, 2, 2), (-2, 1, 1, 2), (1, 3, 1, 2)\}$.

Exercice 3.8. Soit $P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{A} = \{(-4, 2), (10, -6)\}$ de $\mathbb{R}^2$ vers la base $\mathcal{B}$.

a) Trouver $\mathcal{B}$.

b) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{A}$.

Exercice 3.9. Soit $\mathcal{A}$ une base de $\mathbb{R}^3$ donnée par $\mathcal{A} = \{(0, 1, 1), (2, 1, 0), (1, 0, 0)\}$. Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$, trouver la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3.10. Trouver la matrice de passage de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ avec

$\mathcal{A} = \{1 + X, 1 - X, 1 + X + X^2, X - X^3\}$ et $\mathcal{B} = \{1, 1 + 2X, X + 2X^2, X^2 + 2X^3\}$.

Exercice 3.11. Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ Quelle est la matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{A} = \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ et $\mathcal{B} = \{(1, -1), (2, 0)\}$ (utiliser la formule de changement de bases)?

Exercice 3.12. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (0, 1, -1)$, $u_2 = (-1, -1, 3)$, $u_3 = (1, 0, -1)$. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté, dans la base canonique $\mathcal{B}_0$, par la matrice A.

1. Montrer que le système $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de changement de base R de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{B}$ et la matrice de changement de base S de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_0$.

2. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$ puis la matrice M^n, pour tout entier $n \geq 0$.

3. Déterminer les matrices M^{-1} et A^{-1}.

Exercice 3.13. Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(a_0 + a_1X + a_2X^2) = (a_1, a_2 - a_1 + a_0).$$

a) Déterminer des bases du noyau et de l'image de f.

b) Donner la matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{A} = \{1 + X + X^2, X + X^2, X^2\}$ et $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$.

c) Donner la matrice de passage Q de la base $\mathcal{A}$ vers la base $\mathcal{A}' = \{1, 1 + X, 1 + X^2\}$ et la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}' = \{(0, 1), (1, 1)\}$. Puis donner la matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$.

4. Déterminants.

Exercice 4.1. Calculer les déterminants en développant en cofacteurs

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ -4 & -6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.2. Calculer et factoriser (éventuellement) les déterminants de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & a' & b & a'b \\ 1 & a & b' & ab' \\ 1 & a' & b' & a'b' \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & x^2-3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & x^2-5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} x+1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & x+2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & x+3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & x+4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.3. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.4. Résoudre l'équation

$$\begin{vmatrix} 1-x & -1 & -1 \\ -1 & 1-x & -1 \\ -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 4.5. Résoudre l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-2 \\ 1 & x-2 & 1 & 1 \\ x-2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 4.6. Calculer les inverses des matrices suivantes si possible :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ -2 & m & -2 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.7. Résoudre les systèmes linéaires avec la méthode de Cramer:

a) $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 5x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 5y + 2z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y + 6z = 1 \\ 9x + 8y - 12z = 3 \\ 9x - 4y + 12z = 4 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} ax + y + z = -1 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$. d) $\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ x + by + b^2 z = b^3 \\ x + cy + c^2 z = c^3 \end{cases}$.

5. Réduction d'endomorphismes.

Exercice 5.1. Pour chaque matrice, déterminer si elle est diagonalisable, et si possible, trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.2. Pour chaque matrice, trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice de Jordan J. Calculer J^n.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -5 \\ 5 & 8 & -5 \\ 15 & 15 & -12 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -8 & -4 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.3. Pour toute valeur du paramètre réel m, on définit la matrice A_m par

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-m & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer, selon les valeurs de m, les valeurs propres de la matrice A_m.

Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle diagonalisable?

Exercice 5.4.

1) Trouver les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est-elle diagonalisable? Si oui, trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

2) Soient $(a_n),\ (b_n),\ (c_n)$ trois suites définies par les relations:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3b_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 2b_n - c_n \\ c_{n+1} = -b_n + c_n \end{cases} \qquad (a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3.$$

Calculer $a_n,\ b_n,\ c_n$ en fonction de $a_0,\ b_0,\ c_0$.