Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2013/2014

feuille de travaux dirigés

Formules de quadrature

Le symbole $\diamond$ indique un exercice optionnel et/ou difficile.

Exercice 1. On considère la formule de quadrature sur l'intervalle $[-1,1]$ donnée par

$$I_{ap}(f) = \alpha_0\, f\left(-\frac{1}{2}\right) + \alpha_1\, f(0) + \alpha_2\, f\left(\frac{1}{2}\right),\ \forall f \in \mathscr{C}^0([-1,1]).$$

1. Déterminer α_0, α_1 et α_2 de sorte que la formule soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux.
2. Quel est le degré d'exactitude de la formule ainsi obtenue ?

Exercice 2. Étant donnés deux points x_0 et x_1 dans l'intervalle $[-1,1]$ tels que $x_0 < x_1$ et deux réels α_0 et α_1, on considère la formule de quadrature suivante sur l'intervalle $[-1,1]$:

$$I_{ap}(f) = \alpha_0\, f(x_0) + \alpha_1\, f(x_1),\ \forall f \in \mathscr{C}^0([-1,1]).$$

Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs x_0, x_1, α_0 et α_1 conduisant à une formule de quadrature de degré d'exactitude le plus élevé possible.

1. Construire les polynômes de lagrange l_0 et l_1 associés aux points x_0 et x_1.
2. Déterminer les poids α_0 et α_1 tels que la formule soit exacte pour ces deux polynômes. En déduire qu'elle est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à un.
3. Déterminer une relation entre les nœuds x_0 et x_1 pour que la formule soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux.
4. Répondre à la même question pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois.
5. Montrer que le degré d'exactitude de la formule de quadrature est au plus égal à trois.
   Indication : on pourra utiliser le polynôme $\omega(x) = ((x-x_0)(x-x_1))^2$.
6. En déduire la formule de quadrature à deux nœuds sur l'intervalle $[-1,1]$ et de degré d'exactitude égal à trois.

Exercice 3 (erreur pour la formule de quadrature de Simpson). Soit $[a,b]$ un intervalle fermé, borné et non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. La formule de Simpson est une formule de quadrature interpolatoire pour laquelle une approximation de l'intégrale de la fonction f entre a et b est obtenue en remplaçant f par son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré deux aux nœuds $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$, noté $\Pi_2 f$.

1. Définir et expliciter le polynôme d'interpolation $\Pi_2 f$, puis déterminer

$$I_2(f) = \int_a^b \Pi_2 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i\, f(x_i).$$

2. On suppose maintenant que $f \in \mathscr{C}^4([a,b])$ et on introduit l'erreur de quadrature $E_2(f) = \int_a^b (f(x) - \Pi_2 f(x))\,\mathrm{d}x$. On va montrer que

$$E_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(c), \text{ avec } c \in]a,b[.$$

Pour t appartenant à $[-1,1]$, on pose $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$, $F(t) = f(x)$ et

$$G(t) = \int_{-t}^{t} F(u)\,\mathrm{d}u - \frac{t}{3}\left[F(-t) + 4F(0) + F(t)\right].$$

   a. Montrer que $E_2(f) = \frac{1}{2}(b-a)G(1)$.
   b. Soit $H(t) = G(t) - t^5 G(1)$. Montrer qu'il existe $\zeta \in]-1,1[$ tel que $H'''(\zeta) = 0$.
   c. En déduire qu'il existe $\xi \in]-\zeta,\zeta[$ tel que

   $$H'''(\zeta) = -\frac{2\zeta^2}{3}\left[F^{(4)}(\xi) + 90G(1)\right],$$

   et, par suite, que

   $$G(1) = -\frac{1}{90}F^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^4}{1440} f^{(4)}(c),$$

   avec $c \in]a,b[$.

3. Quel est le degré d'exactitude de cette formule de quadrature ?

Exercice 4 (erreur de quadrature et noyau de Peano). On note $\mathbb{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k.

1. Soit une fonction $f \in \mathscr{C}([-1,1])$. On note $\Pi_2 f \in \mathbb{P}_2$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points -1, 0 et 1. Donner l'expression des polynômes de Lagrange l_i, $i = 0,1,2$, tels que

   $$\Pi_2 f(x) = f(-1)\,l_0(x) + f(0)\,l_1(x) + f(1)\,l_2(x).$$

   En déduire les valeurs des poids α_i, $i = 0,1,2$, telles que la formule de quadrature

   $$I_2(f) = \alpha_0\, f(-1) + \alpha_1\, f(0) + \alpha_2\, f(1), \tag{1}$$

   approchant l'intégrale de f entre -1 et 1, soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux.

2. On suppose que $f \in \mathbb{P}_3$ et on note $s \in \mathbb{P}_3$ le polynôme tel que

   $$f(x) = \Pi_2 f(x) + s(x).$$

   Montrer que s est de la forme

   $$s(x) = a(x^2-1)x,\ a \in \mathbb{R},$$

   et en déduire que la formule (1) est en fait exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois.

3. On supposera dans toute la suite que $f \in \mathscr{C}^4([-1,1])$ et on rappelle que, par la formule de Taylor avec reste intégral, on a

   $$f(x) = p(x) + \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} f^{(4)}(t)(x-t)_+^3\,\mathrm{d}t,$$

avec $p \in \mathbb{P}_3$ et

$$(x-t)_+ = \begin{cases} x-t & \text{si } t \leq x \\ 0 & \text{si } t > x \end{cases}.$$

En déduire dans ce cas que l'erreur $E_2(f)$ de la formule de quadrature s'écrit

$$E_2(f) = \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} K(t) f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

où K est une fonction définie sur $[-1,1]$ dont on précisera l'expression générale [1].

4. On admet le fait que la fonction K est paire. Calculer explicitement $K(t)$ pour $t \in [0,1]$ et montrer que l'on trouve

$$K(t) = \begin{cases} -\frac{1}{12}(1-t)^3(1+3t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ K(-t) & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \end{cases}.$$

5. Vérifier que la fonction K ne change pas de signe sur l'intervalle $[-1,1]$, puis utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'il existe $\xi \in [-1,1]$ tel que

$$E_2(f) = \frac{1}{6} f^{(4)}(\xi) \int_{-1}^{1} K(t)\,\mathrm{d}t.$$

En déduire enfin l'expression

$$E_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}.$$

6. On considère maintenant l'intervalle $[-h,h]$, avec $h > 0$. Déduire de ce qui précède une formule de quadrature

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,\mathrm{d}x = b_1\, f(-h) + b_2\, f(0) + b_3\, f(h) + E_{2,h}(f),$$

pour toute fonction f continue sur $[-h,h]$, exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois et dont on déterminera l'erreur de quadrature $E_{2,h}(f)$ lorsque $f \in \mathscr{C}^4([-h,h])$. *Indication : on pourra introduire la fonction $g(u) = f(h\,u)$, $\forall u \in [-1,1]$.*

Exercice 5 (règle du trapèze et formule d'Euler–Maclaurin). Soit une fonction $f \in \mathscr{C}^1([0,1])$. On note

$$I_1(f) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right),$$

l'approximation de l'intégrale de f sur $[0,1]$ par la règle du trapèze.

1. En écrivant

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 f'(t) q(x,t)\,\mathrm{d}t,$$

avec

$$q(x,t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \leq x, \\ 0 \text{ si } t > x \end{cases},$$

montrer que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = I_1(f) + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - t\right) f'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

1. La fonction K est le noyau de Peano associée à la formule de quadrature considérée.

2. On cherche à présent à généraliser le résultat (2) en supposant que $f \in \mathscr{C}^{m+1}([0,1])$, $m \geq 1$. On note $f^{(j)}$ la dérivée $j^{\text{ème}}$ de f, $1 \leq j \leq m+1$. Montrer par récurrence que l'on peut, pour tout $1 \leq n \leq m$, écrire

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = I_1(f) + \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^1 f^{(j)}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 P_{n+1}(x) f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

où les fonctions P_j, $1 \leq j \leq m+1$, sont polynomiales de degré j et les coefficients a_j, $1 \leq j \leq m$ sont des nombres réels, définis par des relations de récurrence suivantes :

$$P_1(x) = \frac{1}{2} - x,\ a_1 = 0,$$

$$P_{j+1}(x) = \int_0^x (a_j - P_j(t))\,\mathrm{d}t,\ a_{j+1} = \int_0^1 P_{j+1}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Indication : on opérera une intégration par parties dans (2) *en remarquant que*

$$P_j = a_j - P'_{j+1} \text{ et } P_{j+1}(0) = P_{j+1}(1) = 0.$$

3. Montrer par récurrence que les fonctions P_j, $1 \leq j \leq m+1$, définies par (4) vérifient la relation de symétrie

$$P_j(x) = (-1)^j P_j(1-x),\ \forall x \in [0,1],$$

et que les coefficients a_j, $1 \leq j \leq m$, d'indice impair sont nuls.
Indication : on observera que si la relation de symétrie est vérifiée alors, par définition, $a_{2i+1} = 0$.

4. Soit un intervalle $[a,b]$, une fonction f de $\mathscr{C}^{2m+2}([a,b])$ et N un entier strictement positif. On pose $H = (b-a)/N$ et on rappelle que la règle du trapèze composée à N sous-intervalles est donnée par

$$I_{N,1}(f) = H\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} f(a + j\,H)\right].$$

En posant $x_j = a + j\,H$, $0 \leq j \leq N$, et en considérant les sous-intervalles $[x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq N-1$, de $[a,b]$, montrer, à l'aide de la relation (3) et en tenant compte du résultat de la question précédente, que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_{N,1}(f) + \sum_{j=1}^{m} a_{2j} H^{2j} \int_a^b f^{(2j)}(x)\,\mathrm{d}x + H^{2m+2} \int_a^b \overline{P}_{2m+2}(x) f^{(2m+2)}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5}$$

où $\overline{P}_{2m+2}(x) = P_{2m+2}\left((x-x_j)/H_N\right)$, $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq N-1$, les coefficients a_{2j}, $1 \leq j \leq m$ et les fonctions polynomiales P_{2j+2}, $1 \leq j \leq m$, étant définis par les relations (4). La formule (5) est appelée formule d'Euler–Maclaurin.

5. **Application :** montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

à l'aide de la formule d'Euler–Maclaurin (5).