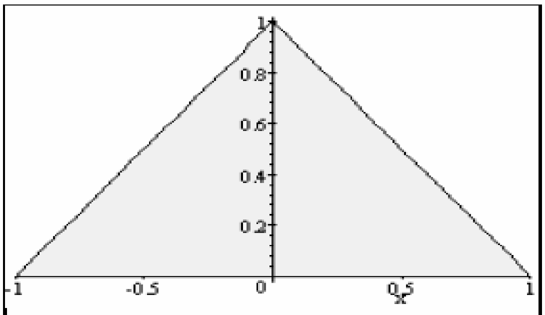
# *Correction Examen Statistique Session Contrôle CBA 2009/2010*

## ***Correction Exercice 1 :***

1. Soit $T$ le triangle de sommet $(-1,0)$ , $(1,1)$ et $(1,0)$ .
   Alors :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx &= A[T] \\ &= 1\end{aligned}$$



*Le triangle T*

**2.** la fonction de répartition de $X$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

d'où :

(i) pour $x \leq -1$ :

$$F(x) = 0$$

puisque :

$$f(x) = 0$$

pour tout $x \in ]-\infty, -1[$ .

(ii) pour $-1 \leq x \leq 0$ :

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{x} (1+t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}(1+x)^2\end{aligned}$$

(iii) pour $0 \leq x \leq 1$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{x} (1-|t|)\,dt \\ &= 1-\frac{1}{2}(1-x)^2 \end{aligned}$$

(iv) pour $x \geq 1$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} (1-|t|)\,dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

En résumé :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq -1 \\ \frac{1}{2}(1+x)^2 & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1-\frac{1}{2}(1-x)^2 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

**3.** L'espérance mathématique de $X$ est :

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} x(1-|x|)\,dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque la fonction :

$$x \longrightarrow x f(x)$$

est une fonction impaire sur l'intervalle $[-1,1]$.

D'où la variance de $X$ :

$$
\begin{aligned}
V[X] &= E\left[X^2\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 (1-|x|)\, dx \\
&= 2\int_0^1 x^2 (1-x)\, dx \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

**4.** La relation :

$$F(m) = \frac{1}{2}$$

équivaut à :

$$P[X \leq m] = P[X > m] = \frac{1}{2}$$

d'où la médiane :

$$m = 0$$

La valeur maximum de $f$ est 1, elle correspond au mode :

$$x_M = 0$$

**5.** On a :

$$
\begin{aligned}
P\left[-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4}\right] &= F\left(\frac{1}{4}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{19}{32}
\end{aligned}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
P\left[|X| \geq \frac{1}{2}\right] &= 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

***Correction Exercice 2 :***

Soit $N$ la variable aléatoire normale centrée réduite associée à $X$ :

$$N = \frac{X - 171}{4}$$

1. D'après la table de la loi normale centrée réduite on a :

**a)**
$$\begin{aligned} P[X < 160] &= P\left[N < \frac{160 - 171}{4}\right] \\ &= P[N < -2.75] \\ &= 1 - P[N < 2.75] \\ &= .003 \end{aligned}$$

**b)**
$$\begin{aligned} P[X > 195] &= 1 - P\left[N < \frac{195 - 171}{4}\right] \\ &= 1 - P[N < 6] \\ &= 0 \end{aligned}$$

**c)**
$$\begin{aligned} P[|X - 171| > 8] &= P[|N| > 2] \\ &= 1 - P[|N| < 2] \\ &= 2 - 2P[N < 2] \\ &= .0456 \end{aligned}$$

**2.** Soit $X_1, ..., X_n$ le $n$-échantillon tiré de la population.
On a :

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

$M_n$ est la moyenne empirique du $n$-échantillon.

$$E[M_n] = E[X] = 171\,\mathrm{cm}$$

$$V[M_n] = \frac{V[X]}{n} = \frac{16}{n}$$

$$\sigma[M_n] = \frac{\sigma[X]}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n}}$$

$M_n$ suit une loi normale $\mathcal{N}\left(171\,\mathrm{cm}, \frac{16}{n}\,\mathrm{cm}^2\right)$

a) On a :

$$\begin{aligned} P\left[|M_n - 171| > a\right] &= P\left[\frac{|M_n - 171|}{\sigma\left[M_n\right]} > \frac{a}{\sigma\left[M_n\right]}\right] \\ &= 2 - 2P\left[\frac{M - 171}{\sigma\left[M_n\right]} < \frac{a}{\sigma\left[M_n\right]}\right] \end{aligned}$$

d'où :

$$P\left[|M_n - 171| > a\right] = 0.1$$

équivaut à :

$$P\left[\frac{M_n - 171}{\sigma\left[M_n\right]} < \frac{a}{\sigma\left[M_n\right]}\right] = 0.95$$

d'où :

$$\frac{a}{\sigma\left[M_n\right]} = 1.65$$

et finalement :

$$a = \frac{6.6}{\sqrt{n}}$$

b) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $a$, $a > 0$, on a :

$$\begin{aligned} P\left[ M_n - 171| > a\right] &\leq \frac{V\left[M_n\right]}{a^2} \\ &\leq \frac{16}{na^2} \end{aligned}$$

d'où pour tout $a$, $a > 0$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} P\left[|M_n - 171| > a\right] = 0$$