

NOM :

PRÉNOM :

Note attendue : A B C

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . S'il existe  $x$  tel que  $f^{n-1}(x) \neq 0$  et  $f^n(x) = 0$ , montrer par récurrence sur  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  que la famille  $(f^{n-k}(x), \dots, f^{n-1}(x))$  est libre (pour un tel  $x$ ).  
Exprimer la matrice de  $f$  dans la base  $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$  et montrer que  $f^n = 0$ .

Soient  $A, B, C$  trois sous-ensembles d'un ensemble  $E$ .

On pose  $F = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$  et  $G = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$ .

Donner une phrase (courte) en français pour décrire  $F$  (sans utiliser « et » ni « ou », on pourra utiliser « deux ».)

---

Montrer que si  $x \in A$ , alors  $x \in F \Leftrightarrow x \in G$ . Montrer la même chose si  $x \in E \setminus A$ . Qu'en déduit-on ?

Calculer  $\int_1^9 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$  à l'aide d'un changement de variable (faire « disparaître » les  $\sqrt{x}$ ).