Nom : Prénom : Note attendue : A B C

Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$.

Montrer que si $A \subset E$, alors $A \subset f^{-1}(f(A))$, et que l'inclusion est une égalité si f est injective.

Montrer que si f n'est pas injective, alors il existe $A_0 \subset E$ tel que $A_0 \neq f^{-1}(f(A_0))$.

On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \arctan(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
On pourra utiliser (et démontrer) que pour tout x dans $]0, 1]$, on a $0 < \arctan(x) < x$.

Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $\Phi(P) = P(X + 1) - 2XP''(X)$. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ et représenter sa matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$. Peut-on diagonaliser Φ ?