Nom : Prénom : Note attendue : A B C

Soient E, F, et I des ensembles, $f : E \to F$ une application. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles de E et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de F, montrer que $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

Que peut-on dire de $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ et $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$?

Décomposer $\dfrac{2X}{(X+1)(X^2+1)}$ en éléments simples (dans $\mathbb{R}$).

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln(x+1)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donner les définitions à l'aide de quantificateurs, de

— f est continue sur $\mathbb{R}$,

— f est Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$,

— f n'est pas Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Donner un exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais pas Lipschitzienne.

♣ Existe-t-il une fonction bornée, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, mais pas Lipschitzienne ?