Notions Fondamentales L1–L2
Feuille d'exercices n° 3 (2022).

3 Algèbre linéaire et un peu plus

3.1 Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices

Exercice 1.

1. On dit qu'un espace vectoriel est de dimension infinie s'il n'existe pas de famille génératrice finie. Montrer qu'un espace vectoriel est de dimension infinie si et seulement si il existe une famille libre infinie.
2. Soit E l'ensemble des suites réelles constantes à partir d'un certain rang. Montrer que E est un espace vectoriel, et trouver une base de E.

Exercice 2.

1. Montrer que $C^0(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la famille $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est libre dans l'espace $C^0(\mathbb{R})$.
3. En déduire que $C^0(\mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $F_1, \dots F_k$ des sous-espaces de dimensions $d_1, \dots, d_k$. Montrer que si $\sum\limits_{i=1}^{k} d_i > n(k-1)$ alors $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_i \neq 0$.

Exercice 4. Union de sous-espaces vectoriels.

1. Soit E un espace vectoriel, et F, G deux s.e.v. de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour que $F \cup G$ soit un s.e.v. de E.
2. ♠ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $(F_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si l'un d'eux contient tous les autres : $\exists i_0 \in [\![1, n]\!], \forall i \in [\![1, n]\!], F_i \subset F_{i_0}$.
3. ♣ Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et que $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont des sous-espace de même dimension, montrer qu'il existe un supplémentaire commun à tous les E_i.
4. (a) Montrer que le résultat de la question 2 n'est pas vrai pour une union infinie.
   (b) ♠ Montrer que les résultats des questions 2 et 3 ne sont pas forcément vrais pour un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un corps fini (un ensemble muni de deux opérations $+$ et $\times$ qui se comportent « comme dans $\mathbb{R}$ » : $+$ est commutative et associative, admet un élément neutre $0_\mathbb{K}$, tout élément admet un opposé, $\times$ est commutative, associative, admet un élément neutre $1_\mathbb{K} \neq 0_\mathbb{K}$, et tout élément non-nul admet un inverse, et enfin la loi $\times$ est distributive sur la loi $+$.)

Exercice 5. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ défini par $f : M \mapsto AM$.

1. Déterminer le noyau de f et en donner une base.
2. f est-il surjectif ?
3. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 6. On définit :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \qquad \text{et} \qquad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$$

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes (c'est-à-dire des applications linéaires définies et à valeurs dans un même espace vectoriel).
2. Etudiez l'injectivité et la surjectivité de f et de g.
3. Comparez avec la situation des endomorphismes en dimension finie.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel, sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient f et g deux endomorphismes de E, tels que $f \circ g = Id_E$.

1. Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.
3. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 8. ♣ Application multiplicative dans $M_n(\mathbb{K})$. Soit f une application non constante de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ telle que, pour toutes matrices A et B, on ait $f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que $f(A) = 0 \Leftrightarrow A$ n'est pas inversible.

Exercice 9. Endomorphisme itéré. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $N_p = \ker f^p$, $I_p = \mathrm{Im} f^p$, et $d_p = \dim N_{p+1} - \dim N_p$.

1. Montrer que (I_p) est décroissante et que (N_p) est croissante (pour l'inclusion).
2. ♠ Montrer que la suite (d_p) est décroissante.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé. On suppose qu'on a une famille libre $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dénombrable infinie de E.

1. ♣ Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, montrer qu'il est fermé.
2. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et que $x \in E \setminus F$, montrer que $\inf_{y\in F} \|x - y\|$ est strictement positif. On note $d(x, F)$ la valeur de cette borne inférieure. Montrer qu'il existe $y_0 \in F$ tel que pour tout $y \in F$ $\|x - y_0\| \leqslant 2\|x - y\|$. En déduire qu'en posant $u = \frac{1}{\|x-y_0\|}(x - y_0)$, on a $\|u\| = 1$, $\mathrm{Vect}(F \cup \{u\}) = \mathrm{Vect}(F \cup \{x\})$, et que $\forall y \in F, \|u - y\| \geqslant \frac{1}{2}$.
3. En déduire que l'on peut construire une famille libre $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E tels que $\forall i \in \mathbb{N}, \|u_i\| = 1$ et $\forall i, j \in \mathbb{N}, \|u_i - u_j\| \geqslant \frac{1}{2}$ si $i \neq j$.
   (a) En déduire que la boule unité fermée de E n'est pas compacte.
   (b) ♣ En posant $v_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{4^k} u_i$, montrer que (v_n) est de Cauchy, et que si $v \in \mathrm{Vect}(\{u_i\}_{i\in[\![0,p]\!]})$, alors pour $n \geqslant p + 1$,
   $$\|v_n - v\| \geqslant \frac{1}{2 \cdot 4^{p+1}} - \sum_{k\geqslant p+2} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{6 \cdot 4^{p+1}}.$$
   En déduire que si $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de E, alors il n'est pas complet.

3.2 Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 11. ♣ Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = (1 - X^2)^3 + 8X^3$.

Exercice 12. Polynômes de $\mathbb{C}[X]$ conservant une partie donnée de $\mathbb{C}$.
Caractériser les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{A}) \subset \mathbb{A}$ dans les trois cas suivants :

1. $\mathbb{A} = \mathbb{Q}$.
2. ♣ $\mathbb{A} = \mathbb{U}$, où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ est le cercle unité.
   On pourra utiliser le polynôme réciproque $P^* = X^n \overline{P}(\frac{1}{X})$ (dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P pris dans l'ordre inverse).
3. ♠ $\mathbb{A} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On pourra s'inspirer de la question 1 pour une première étape de l'analyse.

Exercice 13. Primitive de $x \mapsto \frac{P(x)}{(x^2+1)^2}$.

1. En calculant $\frac{1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{1+x^2}$, à l'aide d'une intégration par parties, en déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^2}$.
2. En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+1)^2}$, puis donner une méthode pour calculer une primitive de $x \mapsto \frac{P(x)}{(x^2+1)^2}$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 14. Composée de fractions rationnelles polynômiale.

1. ♣ Si R est une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$, calculer son image, en tant que fonction de $\mathbb{C}$ privé de ses pôles dans $\mathbb{C}$.
2. ♣ Trouver tous les f et g de $\mathbb{C}(X)$ tels que $f \circ g \in \mathbb{C}[X]$.

3.3 Réduction d'endomorphismes

Exercice 15. ◇ Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ de rang r, représenté par sa matrice A dans les bases canoniques.

1. Montrer qu'il existe $J \subset [\![1,n]\!]$ de cardinal r tel que la famille des colonnes j pour $j \in J$ est libre.
2. Montrer qu'il existe $I \subset [\![1,p]\!]$ de cardinal $p-r$ tel que $\mathbb{R}^p = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Vect}(\{e_i\}_{i\in I})$.
   En notant π la projection sur $\mathrm{Vect}(\{e_i\}_{i\notin I})$ donnée par $\pi(e_i) = e_i$ si $i \notin I$ et $\pi(e_i) = 0$ si $i \in I$, montrer que $\pi \circ f(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Vect}(\{e_i\}_{i\notin I})$, et en déduire que la sous-matrice de A constituée des lignes i pour $i \notin I$ est de rang r.
3. En déduire que le rang d'une matrice est la taille maximale d'une sous matrice carrée dont le déterminant est non nul.

Exercice 16 (◇ Déterminant de Vandermonde)**.** Étant donnés $(a_1, \ldots, a_n)$ des réels, montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)$$

Exercice 17. Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible et $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 18. Déterminant de Hurwitz et applications

1. Calculer le déterminant suivant : $\begin{vmatrix} a_1 & a & a & \cdots & a \\ a & a_2 & a & \ldots & a \\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & a & \cdots & a & a_n \end{vmatrix}$
2. ♣ Dérangements pairs et impairs : on appelle dérangement une permutation de $\mathcal{S}_n$ sans point fixe. Y a-t-il plus de dérangements pairs ou impairs dans $\mathcal{S}_n$?
3. ♠ Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles non vides distincts deux à deux, inclus dans $[\![1,m]\!]$, et $a \geqslant 0$. On suppose que dès que $i \neq j$, on a $\mathrm{Card}(A_i \cap A_j) = a$. Montrer que $n \leqslant m$.

Exercice 19. Les petits cailloux.

1. Soit A une matrice telle que $a_{ii} = 1$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $a_{ij} = 2$ ou 0 pour $i,j \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$. Montrer que A est inversible.
2. ♣ On dispose de $2n+1$ cailloux, qui ont la propriété suivante : quel que soit le caillou que l'on retire, on peut séparer les autres en deux tas de n cailloux, ces deux tas étant de même masse totale. Montrer qu'alors tous les cailloux ont la même masse.

Exercice 20. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}$, et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \ldots = f(e_n) = v$ où v est un vecteur donné de E. Donner le rang de f, et discuter le caractère diagonalisable de f.

Exercice 21.

1. (a) ♣ Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente (i.e. il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$) d'ordre q (i.e. q est le plus petit entier naturel tel que $N^q = 0$). Montrer que $I_n - N$ est inversible et donner son inverse *(penser à la formule $(1-x)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$).*

   (b) *(Application)* Montrer l'inversibilité et calculer l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   où $a \in \mathbb{K}$.

2. (a) Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'ordre 2. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $(I_n + N)^p$.

   (b) *(Application)* On considère $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Calculer M^{100}.

Exercice 22 (Mines 2015)**.** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $M^T M = I_2$. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, dire si M est diagonalisable, dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$. Interpréter géométriquement.

Exercice 23. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle. Dans le cas où f n'est pas diagonalisable, montrez que $f^2 = 0$.

Exercice 24. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $B \in M_{2n}(\mathbb{K})$ la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. On suppose que B est diagonalisable. On sait alors qu'il existe P un polynôme annulateur de B, scindé à racines simples (sur $\mathbb{K}$).

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $B^p = \begin{pmatrix} A^p & pA^p \\ 0 & A^p \end{pmatrix}$
3. En déduire une expression de $P(B)$, et montrer que 0 est la seule valeur propre de A.
4. Conclure.

Exercice 25. Soit u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$ alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. En supposant que E est de dimension finie, montrer que le résultat précédent reste valable si $\lambda = 0$.
3. En étudiant les endomorphismes "dérivée" et "primitive nulle en 0" sur $\mathbb{R}[X]$, montrer que le résultat n'est plus valable si $\lambda = 0$ et $E = \mathbb{R}[X]$.

Exercice 26. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie.

1. Montrer que si f est inversible, alors f^{-1} est un polynôme en f.
2. ♣ On définit
$$\exp(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} f^n.$$
   Justifier que cette somme est bien définie et que $\exp(f) \in \mathcal{L}(E)$. Montrer également que $\exp(f)$ est un polynôme en f.

Exercice 27. ♠ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $e^A = A$ *(voir l'exercice précédent pour une définition de l'exponentielle matricielle).* Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 28. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par g.
2. ♣ Montrer que si f et g sont diagonalisables, alors il existe une base commune de diagonalisation de f et g *(on dit que f et g sont codiagonalisables).*
3. ♣ Montrer que si f et g sont trigonalisables, alors il existe une base commune de trigonalisation de f et g *(on pourra commencer par montrer que f et g ont un vecteur propre commun).*

Exercice 29. Valuation du polynôme minimal. Soit E de dimension finie, $u \in L(E)$, on note P son polynôme minimal et p la valuation de P (le plus grand entier n tel que X^n divise P).

1. On suppose $p = 0$, que dire de u ?
2. ♣ On suppose $p = 1$, montrer que $E = \ker u \oplus \mathrm{Im}\ u$.
3. ♠ Montrer que $E = \ker u^p \oplus \mathrm{Im}\ u^p$, et que p est le plus petit entier tel que l'on ait cette propriété.

3.4 Algèbre bilinéaire

Exercice 30.

1. Quelle est la dimension de l'espace des matrices carrées $M_n(\mathbb{R})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) ? En déduire que $M_n(\mathbb{R})$ est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel, à $\mathbb{R}^p$ pour un entier p que l'on précisera.
2. En déduire un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$, exprimé soit en fonction des coefficients des matrices, soit sous forme matricielle.
3. Décrire en fonction des coefficients la signification de A_k converge vers $A \in M_n(\mathbb{R})$ quand $k \to +\infty$ pour des matrices A_k dans $M_n(\mathbb{R})$.
4. ♣ Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble ouvert et dense dans $M_n(\mathbb{R})$ *(pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on pourra regarder $A - \varepsilon I_n$ pour ε bien choisi suffisamment petit).*