Notions Fondamentales L1–L2
Examen du 24 octobre 2017.

1 Questions de type « savoir-faire »

Ces questions seront notées sur 5 points. Un point est accordé par question, et l'évaluation sera particulièrement exigeante en termes de soin, de précision et de rigueur :

— écrivez des phrases proprement (dans tous les sens du terme),

— pensez à la concision (donnez tous les arguments nécessaires, mais n'en donnez pas de superflus),

— donnez des arguments clairs s'enchaînant dans une structure logique parfaitement compréhensible.

1.1. Soient E et F des ensembles, $f : E \to F$ une application injective. Si A et B sont des parties de E, montrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Montrer que l'une des deux inclusions ne requiert pas l'injectivité de f, mais que l'autre peut être fausse si f n'est pas injective, en considérant des ensembles de la forme $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$.

1.2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ (on traitera à part les cas où $e^{ix} = 1$).

1.3. Calculer la limite de $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$ lorsque $x \to 0$.

1.4. On définit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Montrer sans calcul que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Calculer la trace de A et le rang de $A - 9I_3$. En déduire les valeurs propres de A et les dimensions des sous-espaces propres associés, sans calculer le polynôme caractéristique.

1.5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[0, 1[$.
Donner les définitions, à l'aide de quantificateurs (plus précisément en utilisant seulement les caractères suivants : « $\forall\ \exists\ \in\ x\ \varepsilon\ n\ n_0\ f_n\ 0\ 1\ |\dots|\ >\ <\ \geqslant\ \leqslant\ [\ (\ )\ \mathbb{N}\ .\ ,$ » — donc pas de sup ni de lim, ni de $\to$), de

— la suite converge simplement vers 0 (la fonction nulle) sur $[0, 1[$,

— la suite converge uniformément vers 0 sur $[0, 1[$,

— la suite ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0, 1[$.

Montrer que si l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists\, x_n \in [0, 1[, f_n(x_n) \geqslant \tfrac{1}{2},$$

alors la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers 0, et donner un exemple d'une telle suite de fonctions continues sur $[0, 1[$ convergeant simplement mais pas uniformément vers 0 sur $[0, 1[$.

2 Problème : autour des polynômes de Legendre

Ce problème, comptant pour 15 points dans la note finale, est probablement long, mais le barème en tiendra compte. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir la note maximale. Chaque question n'est pas censée être bloquante pour la suite, on peut admettre son résultat pour répondre aux suivantes. Les deux dernières parties (sur la page suivante) sont indépendantes entre elles, et utilisent les résultats de la première partie.

Opérateur de Legendre, premières propriétés

Dans ce problème, un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ sera toujours identifié à la fonction polynômiale correspondante sur $\mathbb{R}$, ainsi on écrira sans ambiguïté que si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P \in C^\infty(\mathbb{R})$ par exemple.

On note $q(x) = 1 - x^2$, et à toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, on associe la fonction $\Lambda(f) = (q\ f')'$ soit encore, en développant $\Lambda(f)(x) = (1-x^2)f''(x) - 2xf'(x)$.

2.1. Montrer que Λ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R})$.
Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction (de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$) donnée par $x \mapsto \frac{ax+b}{1-x^2}$ ne se prolonge par continuité en -1 et en 1 que si $a = b = 0$.
En déduire que le noyau de Λ est constitué des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$, et que la seule fonction constante appartenant à l'image de Λ est la fonction nulle.

2.2. Montrer que la restriction de Λ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme, que l'on notera Λ_n.
Écrire sa matrice dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$, et en déduire que Λ_n est diagonalisable.

Dans les questions suivantes, pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n un vecteur propre de Λ_n, associé à la valeur propre $-n(n+1)$.

2.3. Calculer le degré de P_n et en déduire que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, constituée de vecteurs propres de Λ.
Montrer que $P_n(-X)$ est aussi un vecteur propre de Λ_n pour la valeur propre $-n(n+1)$, et en déduire que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$ (P_n est donc de la même parité que n).

2.4. Montrer que pour $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} \Lambda(f)(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\Lambda(g)(x)\mathrm{d}x$.
En déduire que si f et g sont des vecteurs propres de Λ pour des valeurs propres différentes, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$.
En conclure que pour tout $Q \in \mathbb{R}_k[X]$ où $k < n$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

L'objet de la question suivante est de montrer que P_n a n racines simples dans $]-1,1[$.

2.5. On note $-1 < x_1 < \cdots < x_m < 1$ les racines réelles de P_n de multiplicité impaire qui appartiennent à $]-1,1[$ et on pose $Q = \prod_{i=1}^{m}(X - x_i)$ (on pose $m = 0$ et $Q = 1$ s'il n'y a pas de telles racines). Montrer que QP_n ne change pas de signe sur $[-1,1]$. Si $m < n$, obtenir une contradiction grâce à la question précédente, et conclure.

D'après la question précédente, on a donc $P_n(1) \neq 0$. On suppose, pour la suite, que l'on a donc choisi les vecteurs propres P_n de telle sorte que $P_n(1) = 1$. Ces polynômes sont appelés polynômes de Legendre.

2.6. Calculer P_0, P_1 et P_2.

Séries de Legendre

2.7. Montrer que $\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 \mathrm{d}x = 2 - 2\int_{-1}^{1} xP_n'(x)P_n(x)\mathrm{d}x$. En montrant que $XP_n' - nP_n$ est un polynôme de degré strictement inférieur à n, en déduire que $\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\mathrm{d}x = (n+\frac{1}{2})^{-1}$.
En utilisant que $\Lambda(P_n) = -n(n+1)P_n$, montrer que la fonction $x \mapsto P_n(x)^2 + \frac{1-x^2}{n(n+1)}P_n'(x)^2$ est croissante sur $[0,1]$. En déduire que $\sup_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| = 1$.

Pour une fonction continue f sur $[-1,1]$, on pose $a_n(f) = (n+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\mathrm{d}x$, et on pose $S_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(f)P_k(x)$.

2.8. Si f est continue sur $[-1,1]$ et que la série $\sum a_n(f)$ est absolument convergente, montrer que $S_n(f)$ converge uniformément vers une fonction g continue sur $[-1,1]$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(g) = a_n(f)$.
En déduire que l'on a $\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))P(x)\mathrm{d}x = 0$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.
En utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass, en conclure que $g = f$.

2.9. Si $f \in C^\infty([-1,1])$, calculer $a_n(f)$ en fonction de $a_n(\Lambda(f))$, puis en fonction de $a_n(\Lambda(\Lambda(f)))$, pour $n \geqslant 1$. En conclure que $S_n(f)$ converge uniformément vers f.

Remarque : On peut en fait montrer que f est de classe C^∞ sur $[-1,1]$ si et seulement si les coefficients $a_n(f)$ sont un $O(n^{-\alpha})$ pour tout $\alpha > 0$.

Interpolation et quadratures de Gauss-Legendre

On note $x_1 < \cdots < x_n$ les n racines réelles de P_n dans $]-1,1[$. L'objet de cette partie est de montrer qu'il existe des poids w_i positifs telle que la formule $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)w_i$ soit une très bonne approximation, en particulier qu'elle donne des résultats exacts lorsque f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$.

2.10. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$.
Montrer qu'il existe des réels $(w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tels que pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on ait $\int_{-1}^{1} R(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{i=1}^{n} w_iR(x_i)$.

2.11. En utilisant la division euclidienne, montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a $\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{i=1}^{n} w_iP(x_i)$.
En considérant les polynômes L_i^2, en déduire que $w_i > 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

2.12. Supposons que l'on ait des points $y_1 < \cdots < y_n$ et des « poids » $v_1, \ldots v_n$ qui satisfassent la même propriété : $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{i=1}^{n} v_iP(y_i)$.
En posant $Q_n = \prod\limits_{i=1}^{n}(X-y_i)$, montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q(x)\mathrm{d}x = 0$.
En déduire que Q_n est colinéaire à P_n, puis que $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $y_i = x_i$, et que $\forall i \in [\![1,n]\!], v_i = w_i$.