Notions Fondamentales L1–L2
Résumé de cours.

Amic Frouvelle

5 septembre 2022

Avant-propos

Que sont ces notes ?

Ces notes constituent un résumé de ce qui est abordé pendant les séances de cours. Elles ne remplacent pas du tout la présence au cours, mais sont un complément. La plupart des notions ayant été déjà vues les années passées, il y aura peu de preuves dans ce document (et dans le cours également), mais toutes les notions indiquées dans le document doivent être acquises.

Certaines notions sont nouvelles et constituent en quelque sorte des compléments aux cours de L1 et L2, qui seront utiles pour les autres cours de L3. Autant que possible, ces notions seront un peu plus détaillées dans ces notes. Elles font évidemment partie du programme de ce cours et de l'examen.

Pourquoi travailler ce cours ?

Bien que le coefficient de ce cours soit faible, par expérience il est « rentable » de travailler ce cours, au sens où c'est un bon investissement pour tous les autres cours. Cela permet d'une part de réviser les notions importantes qui seront utiles ailleurs, mais aussi de travailler la rigueur et la rédaction (et pouvoir ainsi déterminer vous-mêmes si vos preuves sont correctes) sur des exercices ne portant pas sur de nouvelles notions toutes fraîches. Enfin c'est un cours qui vous fera prendre du recul sur les notions anciennes mais dont vous aurez besoin tout le temps, et vous permettra de voir à quel point il y a des exercices transverses faisant intervenir toutes les notions.

Comment travailler ce cours ?

Venir en cours et à l'heure, pour pouvoir profiter des quiz interactifs et des tests en début de séances... Travailler régulièrement d'un cours à l'autre, à l'aide des feuilles d'exercices, et se replonger dans les exercices donnés en L1 et L2. Travailler à plusieurs, pour relire des démonstrations d'autres étudiant·e·s, et être capable de dire si les preuves sont correctes ou non. Ne pas hésiter à venir poser des questions, en fin de séance, ou à d'autres moments.

1 Retour aux bases

1.1 Symboles, français et rédaction

— Lisibilité en français d'une preuve : introduire les notations avant d'en parler, être capable de pouvoir lire des formules mathématiques en français (pouvoir traduire à la volée les symboles, quantificateurs, virgules, en comprenant où est le verbe et obtenant une véritable structure de phrase grammaticalement correcte). Reconnaître les ambiguïtés de la langue française et ne pas les utiliser. Exemple : « Un élève lève le doigt pour parler », est-ce la description d'une action présente (« Il y a un élève qui... », quantificateur $\exists$) ou une vérité générale (« Tout élève doit lever le doigt... », quantificateur $\forall$) ?

— Notion de « durée de vie » d'une variable (dans les phrases, les propositions avec quantificateurs, et les formules mathématiques telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$), et d'« erreur de syntaxe » (parallèle entre structure d'un code informatique et structure d'une démonstration).

— Abus de notations : c'est courant, et souvent utile ! Comprendre quand on peut et ne peut pas. Exemples :

$\exists x > 0, P(x)$	$\exists x \in \mathbb{R}, x > 0$ et $P(x)$
$\forall x > y, f(x) \leqslant f(y)$	$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x > y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
Pour $x, y \in \mathbb{R}$	Pour des réels x et y

— Digression sur les théories axiomatiques : ensemble des conséquences (théorèmes) pouvant être obtenues (construites/démontrées) à partir des axiomes de bases et des principes de raisonnement logique. Exemple des postulats d'Euclide. Cadre dans lequel on travaille dans ce cours (et dans la plupart des mathématiques actuelles) : théorie ZFC (Zermelo—Fraenkel—Axiome du Choix).

— Forme d'un théorème : essentiellement sous la forme « Si on a H (hypothèses), alors on a C (conclusions) » (écrit plutôt rarement sous la forme condensée $H \Rightarrow C$). Très rarement sous la forme « ceci » équivaut à « cela » : il y a souvent des hypothèses principales avant d'énoncer l'équivalence. Exemple : *Si* E est un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, (tout ceci constituant H, les hypothèses), *alors*

$$\begin{aligned} F + G = E \text{ et } F \cap G = 0 &\Leftrightarrow F + G = E \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E \\ &\Leftrightarrow F \cap G = 0 \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E, \end{aligned}$$

ces équivalences étant les conclusions C.

— Structure d'une démonstration : suite de raisonnements logiques partant de H (on suppose vraiment H, à ce moment de la lecture H est vraie), et arrivant à C (on obtient vraiment C). Cela peut être plus complexe qu'un simple enchainement de raisonnements se suivant en série l'un après l'autre, on a souvent besoin de montrer plusieurs choses en parallèle, mais sur une rédaction on doit énoncer les raisonnements les uns après les autres, et donc rappeler des résultats obtenus précédemment. Quoi qu'il en soit, la structure finale doit être claire lors de la lecture.

— Un raisonnement aura toujours plus ou moins la même tête, et doit utiliser des mots, pas des symboles ! Bannir le symbole $\Rightarrow$ lorsqu'il s'agit d'un raisonnement (la répétition de multitude de « donc » ne sera jamais sanctionnée, une démonstration n'est pas un concours de style littéraire), et ne l'utiliser (avec parcimonie) que pour citer un théorème sous forme condensée. Même pour faire un raisonnement par équivalence et espérer économiser de l'encre, ne jamais oublier l'adage « plus de deux symboles équivalents enchaînés, c'est une erreur ou une arnaque cachée ».

Introduction des hypothèses	*Utilisation d'une hypothèse ou d'un fait précédent*	*Énoncé d'un théorème, lemme, axiome, proposition, etc. ou justification d'un argument*	*Conclusion*
Posons…	On a…	D'après…	Donc…
Prenons…	Or…	… car…	D'où…
On suppose…	Mais on avait…	Comme…	Alors…
Soit…	De plus…	Puisque…	Ainsi…
Si (démo courte)…	Comme…	Par le théorème…	On obtient…
		En effet…	

FIGURE 1 – Des mots dans une démo ! L'ordre des deux dernières colonnes peut parfois être échangé.

1.2 Logique et raisonnements

— Connecteurs logiques : « non », « et », « ou », « $\Rightarrow$ ». Ordre des quantificateurs : important ! Ne change pas lors de la négation. Distributivité du « et » sur le « ou » (et dans l'autre sens) : P et (Q ou R) équivaut à [(P et Q) ou (P et R)], de même P ou (Q et R) équivaut à [(P ou Q) et (P ou R)].

Énoncé	Négation
non(P)	P
P ou Q	non(P) et non(Q)
P et Q	non(P) ou non(Q)
$P \Rightarrow Q$	P et non(Q)
$\exists x \in A, P(x)$	$\forall x \in A, \text{non}(P(x))$
$\forall x \in A, P(x)$	$\exists x \in A, \text{non}(P(x))$

— Raisonnement par déduction : pour montrer $P \Rightarrow Q$, on suppose qu'on a P (et à partir de ce moment de la démonstration, P est alors effectivement vraie), et après plusieurs raisonnement logiques, on en déduit que Q est vraie.

— Raisonnement pour montrer $P \Leftrightarrow Q$? Par double implication ! Ne pas oublier l'adage…
— Raisonnement par contraposée. On montre non(Q)$\Rightarrow$non(P) (par raisonnement déductif). On en conclut que $P \Rightarrow Q$, les deux formulations étant équivalentes.
— Raisonnement par l'absurde. Pour montrer que P est vraie, on suppose que P est fausse, puis on aboutit à une contradiction. On en conclut alors que P est vraie. Souvent utile pour montrer l'unicité (mais attention, on peut alors — souvent — arriver à une preuve en n'ayant jamais utilisé l'hypothèse que non(P) est vraie à part pour la conclusion, ce n'est donc plus réellement une preuve par l'absurde — puisqu'on a prouvé P directement sans utiliser d'hypothèse sur P — mais c'est quand même un raisonnement valable). Exemple typique d'utilisation de l'absurde : l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.
— Raisonnement par Analyse-Synthèse. Pour déterminer $\{x \in E, P(x)\}$ sous la forme d'un ensemble F plus explicite (on cherche toutes les solutions d'un problème, par exemple une équation). C'est en fait une double inclusion : Analyse (condition nécessaire) pour $\{\dots\} \subset F$, et Synthèse (condition suffisante) pour $F \subset \{\dots\}$. Dans le cas où F n'a qu'un seul élément (montrer l'existence et l'unicité d'une solution), l'analyse est l'unicité, la synthèse l'existence.
— Raisonnement par récurrence : si on a $H(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, H(n) \Rightarrow H(n+1)$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N}, H(n)$. Principe de récurrence double (prouver $H(0)$ puis $H(1)$ puis $\forall n \geqslant 1, [P(n-1) \text{ et } P(n)] \Rightarrow P(n+1)]$), ou forte (prouver $H(0)$ puis $\forall n \geqslant 0, [\forall k \leqslant n, P(k)] \Rightarrow P(n+1)]$), à partir du principe de récurrence simple.
— Raisonnement par étude de cas : on sépare les hypothèses en plusieurs cas qui traitent toutes les possibilités, et on montre les propriétés voulues dans chaque cas. Exemple : on montre une propriété pour les n impairs (de la forme $2k+1$, on fait les calculs à l'aide de k), puis pour les n pairs (de la forme $n = 2k$), et on l'a donc montrée pour tous les $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Ensembles

— Construction d'ensembles « plus gros » à partir d'autres ensembles et des axiomes de base. Par exemple construction de $E \times F$ à partir de E et F. Ou construction de $\mathcal{P}(E)$ (ensemble des parties de E).
— Construction d'ensembles « plus petits » comme des sous-ensembles d'un plus grand.
  — Par compréhension : $A = \{x \in E,\ P(x)\}$ (se lisant « l'ensemble des x appartenant à E tels que l'on ait $P(x)$ »).
  — Ou par remplacement $A = \{f(x),\ x \in E\}$ (attention ici à la lecture en français, il y a vraiment une différence fondamentale avec ce qui précède, cela peut se lire « l'ensemble des éléments de la forme $f(x)$ lorsque x parcourt E » — ou « pour x dans E », mais ne surtout pas remplacer la virgule par « tels que »…). Pour cela il faut que l'on se soit déjà donné une fonction $f : E \to F$, et l'ensemble A créé est un sous-ensemble de F.
  — Par union, intersection ou complémentaire : $\bigcup_{i\in I} A_i$, $\bigcap_{i\in I} A_i$, $E \setminus A$. Toutes ces notions peuvent se reformuler sous la forme d'une définition par compréhension (on suppose que les ensembles A_i sont tous des sous-ensembles de E).
— À propos de l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ des fonctions de E dans F (noté aussi F^E), peut-on le définir par compréhension ? Oui, si l'on identifie une fonction f à son graphe $G_f = \{(x,y) \in E \times F, y = f(x)\}$ (qui est donc une partie de $E \times F$, donc un élément de $\mathcal{P}(E \times F)$). On peut d'ailleurs exprimer ce graphe par remplacement : $G_f = \{(x, f(x)),\ x \in E\}$. Les fonctions de E dans F sont donc identifiées avec les parties de $E \times F$ qui sont des graphes de fonctions (un et un seul y vérifie (x,y) est dans le graphe). On identifie donc $\mathcal{F}(E,F)$ avec l'ensemble des $G \in \mathcal{P}(E \times F)$ tels que

$$[\forall x \in E, \exists y \in F, (x,y) \in G] \text{ et } [\forall x \in E, \forall y, y' \in F, ((x,y) \in G \text{ et } (x,y') \in G) \Rightarrow y = y'].$$

— Fonctions de E dans F injectives (au plus un antécédent, E est « plus petit » que F), surjectives (au moins un antécédent, E est « plus gros » que F), bijectives (un et un seul antécédent, E et F sont « de la même taille »). Ensemble image directe $f(A)$ (idée de la définition par remplacement, pour la fonction restreinte à A), ensemble image réciproque $f^{-1}(A)$ (définition par compréhension).
— Relations d'équivalence.
Définition 1.1. *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E (c'est à dire, pour tout (x,y) de $E \times E$, la donnée d'un énoncé liant x et y, on notera $x\mathcal{R}y$ pour dire que cet énoncé est vrai). On dit que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*
— réflexivité : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$,
— symétrie : $\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,
— et transitivité : $\forall x, y, z \in E,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Exemple de relation : « être le frère de » (pas réflexive...), « être plus petit que » (pas symétrique...), « être de signe opposés » (pas transitive...). En général les relations d'équivalence sont faites pour classer des objets par caractéristiques, comme « avoir le même reste dans la division par 12 » (c'est bien une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$).

Définition 1.2. *La classe d'équivalence d'un élément x de E pour la relation d'équivalence est l'ensemble des éléments en relation avec x, et est notée $\bar{x}$:*

$$\bar{x} = \{y \in E, x\mathcal{R}y\}.$$

L'ensemble des classes d'équivalence est appelé ensemble quotient de la relation d'équivalence, et est noté $E/\mathcal{R}$:

$$E/\mathcal{R} = \{\bar{x}, x \in E\}.$$

Attention à la définition précédente, il peut y avoir très peu de classes d'équivalences distinctes (certaines étant décrites plusieurs fois, en fait autant de fois qu'elles ont d'éléments). Par exemple pour la relation « avoir le même reste dans la division par 3 » sur $\mathbb{Z}$, il n'y a que 3 classes d'équivalences : $\bar{0} = \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\}$, $\bar{1} = \{\dots, -2, 1, 4, 7, \dots\}$, et $\bar{2} = \{\dots, -1, 2, 5, 8, \dots\}$. Toute classe d'équivalence, de la forme $\bar{n}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$, est l'une de ces trois là, donc quand on écrit $\{\bar{n}, n \in \mathbb{Z}\}$, il s'agit bien d'un ensemble à trois éléments !

L'ensemble quotient $E/\mathcal{R} = \{\bar{x}, x \in E\}$ est donc une partie de $\mathcal{P}(E)$, mais qui doit pourtant être compris comme un ensemble « plus petit » que E.

Exemple 1.3. *Exemple typique d'une relation d'équivalence (« avoir la même image »). Soit f une application de E dans F (deux ensembles). Alors la relation $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ est alors $\bar{x} = f^{-1}(\{f(x)\})$.*

Proposition 1.4. *Les classes d'équivalences forment une partition de E (sous-ensembles disjoints dont la réunion est E) :*

$$\bigcup_{x\in E} \bar{x} = E \quad \text{et} \quad \forall x, y \in E, \bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}.$$

Réciproquement, si des sous-ensembles $(A_i)_{i\in I}$ de E forment une partition de E, alors la relation donnée par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i$ et $y \in A_i$ (c'est la relation « être dans le même ensemble de la partition ») est une relation d'équivalence dont les classes sont précisément les A_i.

Idée de la démo : bien remarquer que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \in \bar{y}$, et utiliser les trois propriétés.

Définition 1.5. *Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble E, on note π l'application de E dans $E/\mathcal{R}$ qui à x associe sa classe $\bar{x}$, cette application est appelée surjection canonique pour la relation $\mathcal{R}$. Pour $f : E \to F$, on dit que f passe au quotient de E par la relation $\mathcal{R}$ si pour tous $x, y \in E$ on a $x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x) = f(y)$.*

Proposition 1.6. *Si $f : E \to F$ passe au quotient de la relation $\mathcal{R}$ alors il existe une unique application $\bar{f}$ de $E/\mathcal{R}$ dans F telle que pour tout $x \in E$, on ait $f(x) = \bar{f}(\bar{x})$. Autrement dit, f se factorise de manière unique sous la forme $f = \bar{f} \circ \pi$, on dit aussi que le diagramme suivant « commute » (si l'on le suit dans un chemin ou dans l'autre on obtient la même chose) :*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \pi \downarrow & \nearrow_{\bar{f}} & \\ E/\mathcal{R} & & \end{array}$$

Le principal intérêt des ensembles quotient est qu'on peut les munir de structures qu'on avait dans l'ensemble initial, à condition qu'elles « passent au quotient ». Par exemple si on a une addition dans $\mathbb{Z}$ et qu'elle passe au quotient de la relation « avoir le même reste dans la division par 3 », on a envie de définir une nouvelle addition dans $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$, qui permettra de faire les calculs « comme dans $\mathbb{Z}$ ». On aurait par exemple $\bar{0}\bar{+}\bar{1} = \bar{1}$, et $\bar{2}\bar{+}\bar{2} = \bar{1}$.

Exemples des constructions de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{N}$.

— Ensembles finis : on dit qu'un ensemble est fini s'il est en bijection avec $[\![1, n]\!]$, et alors ce n est unique et appelé le cardinal de cet ensemble (attention au cas $n = 0$, on dit que $\emptyset$ est fini aussi).

— Groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$. On appelle $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ (appelées aussi permutations de $[\![1, n]\!]$). Cet ensemble $\mathcal{S}_n$ est également appelé groupe symétrique d'ordre n.

Définition 1.7. *Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on définit sa signature $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$ par la formule suivante (la fonction signe renvoie 1 ou -1) :*

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathit{signe}(\sigma(j) - \sigma(i)).$$

On dit que la permutation σ est paire lorsque $\varepsilon(\sigma) = 1$ (cela correspond à dire que le nombre d'inversions d'ordre entre des couples d'entiers et leur image par σ est pair) et impaire si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Proposition 1.8. *La signature est un morphisme de groupes (pour la composition dans $\mathcal{S}_n$ et la multiplication dans $\{-1, 1\}$), ce qui veut simplement dire que pour $\sigma, \varphi \in \mathcal{S}_n$, on a $\varepsilon(\sigma \circ \varphi) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\varphi)$. En particulier, la composition de deux permutations paires reste une permutation paire : on parle du groupe alterné $\mathcal{A}_n$ pour désigner les permutations paires.*

Idée de la démo : calculer $\varepsilon(\sigma \circ \varphi)\varepsilon(\varphi)$, et faire un changement d'indice dans le produit, à (i, j) tel que $i < j$, on associe $(k, \ell) = (\varphi(i), \varphi(j))$ ou $(\varphi(j), \varphi(i))$ de telle sorte que $k < \ell$. On montre que ce changement d'indice est bien une bijection, et on retombe sur le produit définissant $\varepsilon(\sigma)$.

Définition 1.9. *Formule (magique) du déterminant. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de taille $n \times n$. On définit le déterminant par la formule*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}.$$

On peut alors montrer que cela correspond bien à l'autre définition que l'on avait du déterminant (forme n-linéaire alternée sur les colonnes, qui vaut 1 pour la base canonique).

— Ensembles dénombrables ou pas.

Définition 1.10. *On dit qu'un ensemble E est dénombrable s'il existe une bijection entre E et une partie de $\mathbb{N}$ (ou, ce qui revient au même, une injection de E dans $\mathbb{N}$). On peut alors montrer que E est dénombrable si et seulement si il est fini ou s'il existe une bijection de E dans $\mathbb{N}$.*

Idée de la démo : montrer d'abord que toute partie infinie A de $\mathbb{N}$ peut être en bijection avec $\mathbb{N}$ (on note a_0 son plus petit élément, et par récurrence, a_{n+1} le plus petit élément différent de $a_0, \ldots, a_n$).

En quelque sorte, ce que l'on dit là c'est que E est dénombrable si on peut numéroter tous ses éléments : $E = \{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ ou $E = \{e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ (les e_i étant tous distincts deux à deux).

Exemples fondamentaux : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ (et $\mathbb{N}^k$ pour $k \geqslant 1$), $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Les suites finies d'entiers sont dénombrables. Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. Les polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Q}$) sont dénombrables.

L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable, de même que $\mathbb{R}$ (et ces deux ensembles sont en bijection). Il existe des ensembles encore plus gros que $\mathbb{R}$ (et qui ne sont pas en bijection avec $\mathbb{R}$) : $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$...

2 Analyse réelle et un peu plus

2.1 Propriétés de $\mathbb{R}$, suites et séries réelles

— Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ pour l'analyse : toute partie non-vide et majorée admet une borne supérieure (c'est à dire un plus petit majorant). Ainsi pour montrer que $M = \sup A$, où $A \subset \mathbb{R}$, on montrera d'abord que $\forall x \in A, x \leqslant M$ (M est un majorant), puis que $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x \geqslant M - \varepsilon$ ($M - \varepsilon$ n'est jamais un majorant). Cas particulier où $M \in A$: M est alors un maximum. Mais attention ! Ce n'est pas toujours le cas !

— Toute suite réelle croissante et majorée converge dans $\mathbb{R}$. Ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ (appelé droite réelle achevée), notion de convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$: toute suite croissante de $\overline{\mathbb{R}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$. Notion de suite extraite et de valeur d'adhérence.

Définition 2.1. *Limite supérieure et inférieure de suites. Si (u_n) est une suite réelle, alors on définit sa limite supérieure et inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ par*

$$\limsup_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geqslant n} u_k \quad \textit{et} \quad \liminf_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geqslant n} u_k.$$

Proposition 2.2. *La limite supérieure (resp. inférieure) est la plus grande (resp. plus petite) des valeurs d'adhérence de (u_n). Si $\limsup_{n \to \infty} u_n = \liminf_{n \to \infty} u_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors u_n converge vers ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

— Comparaisons asymptotiques des suites ($o(\cdot), O(\cdot)$, équivalence). Développement asymptotique.

— Séries réelles, convergence absolue, théorèmes de comparaison (exemple des séries de Riemann), comparaison série-intégrale, critère des séries alternées.

2.2 Espaces métriques, complétude, topologie

— Distances et espaces métriques.

Définition d'une distance, convergence, suite de Cauchy.

— Complétude. espace métrique complet, théorème de point fixe.
— ouverts, fermés, adhérence, intérieur, compacts, norme. Bolzano-Weierstrass.

2.3 Fonctions réelles et un peu plus

— Continuité, théorème des valeurs intermédiaires, dérivabilité, théorème de Rolle. Étude des variations d'une fonction, convexité, fonctions classiques (polynômes, exp/log, trigo et réciproque).
— uniforme continuité, application lipschitzienne, théorème de Heine.
— Nombres complexes, module, conjugaison, exponentielle complexe.
— Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, dérivées partielles.

2.4 Suites et séries de fonctions

— Convergence simple, convergence uniforme.
— Théorèmes d'interversion
  — de limites
  — limite/intégrale
  — limite/dérivée
— Théorème d'approximation de Weierstrass.
— Série de fonctions, convergence normale.
— Séries entières, développements limités.

3 Algèbre linéaire et un peu plus

3.1 Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices

— Définition (sur un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) avec les propriétés des lois $+$ et $\cdot$. Sous-espace vectoriel, caractérisation.
— Construction d'espaces vectoriels classiques : produit, $\mathcal{F}(X, E)$, $\mathbb{K}[X]$, exemple d'un espace quotienté par un sous-espace (c'est essentiellement les seules fois où on utilise la définition, dans tous les cas pratique on passe par le fait que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace déjà connu).
— Espace vectoriel engendré par un ensemble $A \subset E$, combinaisons linéaires, famille libre, génératrice, base (y compris en dimension infinie), coordonnées.
— Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe, caractérisation dans le cas de deux sous-espaces (et attention si plus de deux !), formule de Grassmann : $\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$. Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel (pas unique !).
— Applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$. Noyau, image. Image directe et réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.
— Injectivité, théorème du rang, isomorphismes. Caractérisation d'une application linéaire par les bases.
— Composition, endomorphismes $\mathcal{L}(E)$.
— Matrices $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Matrice d'une famille de vecteurs, formule de changement de base. Matrice d'une application linéaire dans deux bases. Matrice d'un endomorphisme dans une base.

3.2 Polynômes et fractions rationnelles

— Racines simples, racines multiples, formule de Taylor pour les polynômes.
— Résolution de $z^n = 1$ sur $\mathbb{C}$, manipulation des racines de l'unité.
— Factorisation des polynômes, théorème fondamental (d'Alembert-Gauss) sur $\mathbb{C}[X]$. Cas particulier du degré 2 (formule explicite).
— Fractions rationnelles, division euclidienne des polynômes, théorème de Bézout, partie entière d'une fraction rationnelle, décomposition en éléments simples, primitives de fractions rationnelles réelles.

3.3 Réduction d'endomorphisme

— Forme multilinéaire, déterminant dans une base $\mathcal{B}$. Formule de changement de base, $\det(A \times B) = \det A \times \det B$. Développement par rapport à une ligne ou une colonne, formule de Cramer : $A \times \mathrm{Com}(A)^T = \mathrm{Com}(A)^T \times A = (\det A) I_n$.

— Valeur régulière, valeur spectrale, valeur propre d'un endomorphisme. Vecteur propre, sous-espace propre E_λ associé à une valeur propre λ. Sous-espace stable d'un endomorphisme $f : f(F) \subset F$, $f|_F$ peut être vu comme un élément de $\mathcal{L}(F)$.

Théorème 3.1. *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes deux à deux. Alors la somme des sous-espaces associés $E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_k}$ est directe.*

— Polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$ d'une matrice (ou χ_f pour un endomorphisme). Multiplicité m_i d'une racine λ_i (plus grand entier m tel que $(X-\lambda)^m$ divise χ_A). La dimension de E_{λ_i} est inférieure ou égale à m_i.

— Diagonalisation d'un endomorphisme : recherche d'une base dans laquelle l'endomorphisme est diagonal (pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, recherche de P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ — les colonnes de P sont des vecteurs propres).

Théorème 3.2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension n, et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ses valeurs propres (distinctes deux à deux). Alors*

$$\begin{aligned} f \text{ diagonalisable} &\Leftrightarrow \chi_f \text{ est scindé (égal à } (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (X-\lambda_i)^{m_i}) \quad \underline{\text{et}} \quad \forall i \in [\![1,k]\!], \dim E_{\lambda_i} = m_i \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i} = n \\ &\Leftrightarrow E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k} \end{aligned}$$

Cas où le polynôme caractéristique est scindé à racines simples ($k = n$, $m_i = 1$).

— Trigonalisation : recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme est triangulaire supérieure.

Théorème 3.3. *$f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_f$ est scindé.*

Toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$. Calcul de la trace et du déterminant en fonction des racines du polynôme et de leur multiplicité.

— Polynômes d'endomorphisme, polynômes annulateurs. Existence d'un polynôme annulateur. Toute valeur propre de f annule tout polynôme annulateur de f.

— Lemme des noyaux.

Théorème 3.4. *Décomposition des noyaux. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$, avec les P_i premiers entre eux deux à deux, alors*

$$\ker P(f) = \ker P_1(f) \oplus \ldots \oplus \ker P_k(f).$$

Théorème 3.5. *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de f scindé à racines simples.*

Si F est stable par f, et f diagonalisable, alors $f|_F \in \mathcal{L}(F)$ est diagonalisable.

— Polynôme minimal π_f. Reformulation du théorème : f diagonalisable $\Leftrightarrow$ polynôme minimal scindé à racines simples. λ valeur propre de $f \Leftrightarrow \lambda$ racine de π_f.

Théorème 3.6. *Théorème de Cayley-Hamilton.*
Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur : $\chi_f(f) = 0$.

3.4 Algèbre bilinéaire

— Produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive). Norme associée, inégalité de Cauchy Schwarz (et cas d'égalité).

— Identité du parallélogramme, formule de polarisation, théorème de Pythagore.

— Bases orthonormées, procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

— Formule $\langle Mx, y\rangle = \langle y, M^T x\rangle$, matrices et endomorphismes orthogonaux ($M^T M = I_n$, préservant le produit scalaire, transformant base orthonormée en base orthonormée, dont les colonnes forment une base orthonormée).

— Représentation matricielle d'une forme bilinéaire dans une base. Forme symétrique (pour laquelle $f(x,y) = f(y,x)$ pour tous $x, y \in E$) $\Leftrightarrow$ matrice associée symétrique. Forme quadratique.

— Diagonalisation des matrices symétriques.

Théorème 3.7. *Une matrice symétrique réelle $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable en base orthonormée : il existe $P \in O(n)$ tel que $P^{-1}AP$ est diagonale. De plus les vecteurs colonnes de P sont des vecteurs propres de A, forment une base orthonormée, et les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A correspondantes.*