Đauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

MIDO - L3 Mathématiques Appliquées 2022-2023

Notions fondamentales de L1–L2

Examen du 3 novembre 2022 (durée 2h).

NOM : ....

PRÉNOM : ....

(lisiblement)

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Il y a largement la place de répondre dans les cases, n'utilisez la dernière feuille blanche qu'en cas d'extrême nécessité.

Soit E un ensemble et f, g et h des fonctions de E dans E.

Si f est injective et $f \circ h = f$, montrer que $h = \mathrm{id}_E$.

Si f est surjective et $h \circ f = f$, montrer que $h = \mathrm{id}_E$.

Montrer que si $f \circ g = \mathrm{id}_E$, alors f est surjective et g injective.

On suppose maintenant que $f \circ g \circ f = g$ et $g \circ f \circ g = f$, et que f est injective **ou** surjective.

— On pose $h = g \circ f \circ f \circ g$. Montrer que $h = \mathrm{id}_E$, et en déduire que g est bijective.

— Montrer que $g \circ g = f \circ f$, en déduire la valeur de $f \circ f \circ f \circ f$, et en conclure que f est bijective.

PARTIE À RABATTRE

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer le polynôme caractéristique P_A, et les valeurs de $P_A(-1)$, $P_A(0)$ et $P_A(1)$. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sqrt{1 + \ln(1 + \frac{1}{n})} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$. Déterminer un équivalent de u_n lorsque $n \to \infty$.

Problème : intégrales glissantes.

Les questions de ce problème ne sont pas toutes indépendantes, on peut admettre certains résultats pour passer à la suite (et il est recommandé de tout lire, les questions suivantes pouvant donner un moyen de vérifier ses réponses). On note $C^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On se fixe $h > 0$, et à toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$, on associe la fonction $\Phi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(f)(x) = \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Généralités sur Φ.

Montrer que Φ est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R})$.

Si f est paire, exprimer $\Phi(f)(-x)$ en fonction de $\Phi(f)(x)$. En donner une interprétation graphique.

Montrer que si $f \in C^0(\mathbb{R})$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f)(x) = \int_{-h}^{h} f(x+u)\,\mathrm{d}u$. Si f est croissante, peut-on en déduire que $\Phi(f)$ l'est aussi ? En donner une interprétation graphique.

Injectivité, surjectivité.

Montrer que si $f \in C^0(\mathbb{R})$, alors $\Phi(f) \in C^1$ et donner sa dérivée.

Montrer que le noyau de Φ est constitué des fonctions continues $2h$-périodiques d'intégrale nulle sur $[-h, h]$.

L'endomorphisme Φ est-il injectif ? surjectif ?

Restriction à $\mathbb{R}_n[X]$. Dans la suite on identifie un polynôme et la fonction réelle associée, de sorte qu'on peut écrire $\Phi(P)$ pour un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$.

Calculer $\Phi(1)$, $\Phi(X)$ et $\Phi(X^2)$.

Calculer $\Phi(X^n)$, et simplifier son expression avec la formule du binôme de Newton.

En déduire que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace stable par Φ, ainsi on peut noter $\Phi_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'endomorphisme induit par Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Déterminer la matrice de Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Déterminer les valeurs propres de Φ_n. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme Φ_n est-il diagonalisable ?

Éléments propres de Φ.

Soit $\lambda > 2h$. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $e^{ah} - e^{-ah} = \lambda a$.

En déduire que l'ensemble des valeurs propres de Φ, noté $\mathrm{Sp}(\Phi)$, contient $\{0\} \cup [2h, +\infty[$ (on pourra considérer les fonctions de la forme $x \mapsto e^{ax}$).

En utilisant la fonction $a \mapsto \frac{\sin(ah)}{ah}$, montrer que l'on a $\mathrm{Sp}(\Phi) \supset [-\frac{4h}{3\pi}, +\infty[$, et donner un exemple de vecteur propre pour toute valeur propre $\lambda \geqslant -\frac{4h}{3\pi}$.