Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

MIDO - L3 Mathématiques Appliquées 2022-2023

Notions fondamentales de L1–L2

Examen du 3 novembre 2022 (durée 2h).

NOM : FROUVELLE

PRÉNOM : AMIC

(lisiblement)

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Il y a largement la place de répondre dans les cases, n'utilisez la dernière feuille blanche qu'en cas d'extrême nécessité.

Soit $E$ un ensemble et $f$, $g$ et $h$ des fonctions de $E$ dans $E$.

Si $f$ est injective et $f \circ h = f$, montrer que $h = \mathrm{id}_E$.

Soit $x \in E$. On a $f \circ h(x) = f(x)$
Donc $f(h(x)) = f(x)$ et par injectivité de $f$ : $h(x) = x$. Donc $h = \mathrm{id}_E$.

Si $f$ est surjective et $h \circ f = f$, montrer que $h = \mathrm{id}_E$.

Soit $y \in E$. Par surjectivité de $f$, on peut prendre $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Alors $h \circ f(x) = f(x)$
~~$h(f(x))$~~ Donc $h(y) = h(f(x)) = f(x) = y$
Donc $h = \mathrm{id}_E$.

Montrer que si $f \circ g = \mathrm{id}_E$, alors $f$ est surjective et $g$ injective.

Soit $y \in E$. On a $f(g(y)) = y$ donc $y \in \mathrm{Im} f$. Donc $f$ est surjective.
Soit $x, y \in E$ avec $g(x) = g(y)$. alors $f(g(x)) = f(g(y))$, c'est-à-dire $x = y$.
Donc $g$ est injective.

On suppose maintenant que $f \circ g \circ f = g$ et $g \circ f \circ g = f$, et que $f$ est injective **ou** surjective.

— On pose $h = g \circ f \circ f \circ g$. Montrer que $h = \mathrm{id}_E$, et en déduire que $g$ est bijective.

Si $f$ injective alors $f \circ h = (f \circ g \circ f) \circ f \circ g = g \circ f \circ g = f$ et donc $h = \mathrm{id}_E$ (question 1)
Si $f$ surjective alors $h \circ f = g \circ f \circ (f \circ g \circ f) = g \circ f \circ g = f$ et donc $h = \mathrm{id}_E$ (question 2).

Donc $(g \circ f \circ f) \circ g = \mathrm{id}_E$ donc $g$ injective (question 3)
et $g \circ (f \circ f \circ g) = \mathrm{id}_E$ donc $g$ surjective (question 3)
Donc $g$ bijective.

— Montrer que $g \circ g = f \circ f$, en déduire la valeur de $f \circ f \circ f \circ f$, et en conclure que $f$ est bijective.

$g \circ g = (f \circ g \circ f) \circ g = f \circ (g \circ f \circ g) = f \circ f$.
Donc $f \circ (f \circ f) \circ f = f \circ (g \circ g) \circ f = h = \mathrm{id}_E$. De même que précédemment, par la question 3, $f$ est surjective et $f$ est injective, donc $f$ bijective.

PARTIE
À
RABATTRE

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer le polynôme caractéristique $P_A$, et les valeurs de $P_A(-1)$, $P_A(0)$ et $P_A(1)$. La matrice $A$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ?

développement / colonne.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \times (1-\lambda) - 4 \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & \end{vmatrix}$$

$$\boxed{P_A(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda + 1}$$

$P_A(-1) = 1 + 1 - 4 - 2 + 1 = -3 < 0$

$P_A(0) = 1 > 0$

$P_A(1) = 1 - 1 - 4 + 2 + 1 = -1 < 0$

~~Donc~~ Comme $P_A(\lambda) \underset{\lambda \to \pm\infty}{\to} +\infty$, par le théorème des valeurs intermédiaires ($P_A$ continu ...), il existe $\lambda_1 \in ]-\infty, -1[$, $\lambda_2 \in ]-1, 0[$, $\lambda_3 \in ]0, 1[$ et $\lambda_4 \in ]1, +\infty[$, racines de $P_A$ (réelles). (distinctes).

$P_A$ est scindé à racines simples (sur $\mathbb{R}$), donc $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sqrt{1 + \ln(1 + \frac{1}{n})} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$. Déterminer un équivalent de $u_n$ lorsque $n \to \infty$.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \text{ quand } x \to 0.$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ quand } n \to \infty.$$

↳ Composer les DL ou (plus astucieux)

$$\sqrt{1 + \ln(1+\tfrac{1}{n})} - \sqrt{1+\tfrac{1}{n}} = \frac{\left(\sqrt{1+\ln(1+\frac{1}{n})} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{1+\ln(1+\frac{1}{n})} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{1+\ln(1+\frac{1}{n})} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{\left(1 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\ln(1+\frac{1}{n})} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

← numérateur $= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$

← dénominateur $\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$, donc $\sim 2$.

Donc $u_n \sim \frac{-1}{4n^2}$ quand $n \to \infty$.

## Problème : intégrales glissantes.

Les questions de ce problème ne sont pas toutes indépendantes, on peut admettre certains résultats pour passer à la suite (et il est recommandé de tout lire, les questions suivantes pouvant donner un moyen de vérifier ses réponses). On note $C^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On se fixe $h > 0$, et à toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$, on associe la fonction $\Phi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(f)(x) = \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Généralités sur $\Phi$.**

Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R})$.

Si $F$ est une primitive de $f$, alors $\Phi(f)(x) = F(x+h) - F(x-h)$, qui est bien continue en $x$. (car $F$ continue)

Donc $\Phi : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ $\Phi(\lambda f + \mu g)(x) = \int_{x-h}^{x+h} (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt$

$= \lambda \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt + \mu \int_{x-h}^{x+h} g(t)\,dt$ (linéarité de l'intégrale)

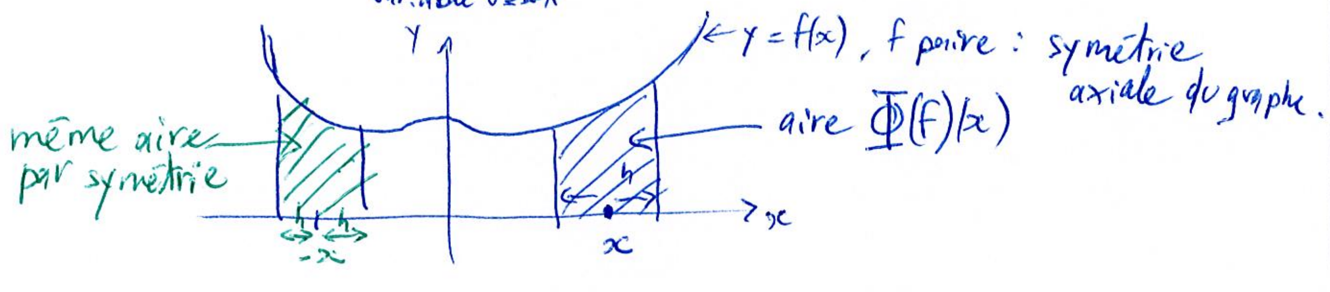
$= \lambda\, \Phi(f)(x) + \mu\, \Phi(g)(x)$

Donc $\Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \Phi(f) + \mu \Phi(g)$.

$\Phi$ est bien linéaire de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Si $f$ est paire, exprimer $\Phi(f)(-x)$ en fonction de $\Phi(f)(x)$. En donner une interprétation graphique.

$\Phi(f)(-x) = \int_{-x-h}^{-x+h} f(t)\,dt \underset{\text{changement de variable } v=-t}{=} \int_{x+h}^{x-h} f(-v)(-dv) = \int_{x-h}^{x+h} f(v)\,dv$ car $f$ paire $= \Phi(f)(x)$.

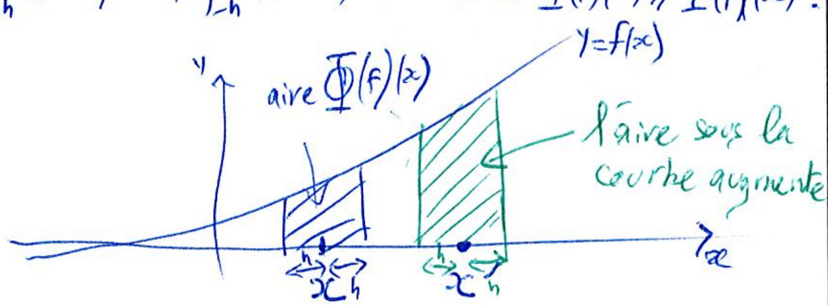



Montrer que si $f \in C^0(\mathbb{R})$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f)(x) = \int_{-h}^{h} f(x+u)\,\mathrm{d}u$. Si $f$ est croissante, peut-on en déduire que $\Phi(f)$ l'est aussi ? En donner une interprétation graphique.

Changement de variable $t = x + v$ ($dt = dv$, $v = t - x$) $\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt = \int_{-h}^{h} f(x+v)\,dv$.

Donc si $x' \geq x$, $f(x'+v) \geq f(x+v)$ (car $x'+v \geq x+v$ et $f$ croissante) et par croissance de l'intégrale, $\int_{-h}^{h} f(x'+v)\,dv \geq \int_{-h}^{h} f(x+v)\,dv$. Donc $\Phi(f)(x') \geq \Phi(f)(x)$.

Donc $\Phi(f)$ est croissante.



**Injectivité, surjectivité.**

Montrer que si $f \in C^0(\mathbb{R})$, alors $\Phi(f) \in C^1$ et donner sa dérivée.

Si $F$ est une primitive de $f$, alors $F$ est $\mathcal{C}^1$, de dérivée $f$.

Par composition $x \mapsto F(x+h) - F(x-h)$ $(= \Phi(f)(x))$ est $\mathcal{C}^1$, de dérivée en $x$

$F'(x+h) - F'(x-h) = f(x+h) - f(x-h)$.

$\Phi(f)$ est bien $\mathcal{C}^1$ et $\Phi(f)'(x) = f(x+h) - f(x-h)$.

(ou alors dérivation sous $\int$ avec $\Phi(f)(x) = \int_{-h}^{h} f(x+u)\,du$, mais ce n'est pas nécessaire ici).

---

Montrer que le noyau de $\Phi$ est constitué des fonctions continues $2h$-périodiques d'intégrale nulle sur $[-h, h]$.

Si $f \in \operatorname{Ker} \Phi$, alors $\Phi(f) = 0$, donc $\Phi'(f) = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x+h) - f(x-h) = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f((x+h)+h) = f((x+h)-h) = f(x)$ : $f(x+2h) = f(x)$.

$f$ est bien $2h$-périodique et $\Phi(f)(0) = \int_{-h}^{h} f(t)\,dt = 0$.

Réciproquement, si $f$ est $2h$-périodique et $\Phi(f)(0) = \int_{-h}^{h} f(t)\,dt = 0$, alors

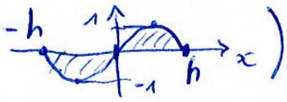
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+h) = f(x+h-2h) = f(x-h)$ donc $\Phi'(f)(x) = 0$.

Donc $\Phi(f)$ est constante, égale à $\Phi(f)(0) = 0$.

---

L'endomorphisme $\Phi$ est-il injectif ? surjectif ?

Il existe des fonctions $2h$-périodiques (continues) d'intégrale nulle sur $[-h, h]$

(par exemple $x \mapsto \sin\left(\frac{\pi x}{h}\right)$ 

). Donc $\operatorname{Ker} \Phi \neq \{0\}$.

Donc $\Phi$ n'est pas injectif.

Il existe des fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ qui ne sont pas dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \supset \operatorname{Im} \Phi$

(par exemple $x \mapsto |x|$). Donc $\operatorname{Im} \Phi \neq \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. $\Phi$ non surjectif.

**Restriction à $\mathbb{R}^n[X]$.** Dans la suite on identifie un polynôme et la fonction réelle associée, de sorte qu'on peut écrire $\Phi(P)$ pour un polynôme $P$ de $\mathbb{R}[X]$.

Calculer $\Phi(1)$, $\Phi(X)$ et $\Phi(X^2)$.

$\Phi(1)(x) = \int_{x-h}^{x+h} 1\,dt = 2h$. Donc $\Phi(1) = 2h$.

$\Phi(X)(x) = \int_{x-h}^{x+h} t\,dt = \frac{(x+h)^2}{2} - \frac{(x-h)^2}{2} = 2hx$. Donc $\Phi(X) = 2hX$.

$\Phi(X^2)(x) = \int_{x-h}^{x+h} t^2\,dt = \frac{(x+h)^3}{3} - \frac{(x-h)^3}{3} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3 - x^3+3x^2h-3xh^2+h^3}{3}$

---

$= 2x^2h + \frac{2h^3}{3}$. Donc $\Phi(X^2) = 2hX^2 + \frac{2h^3}{3}$

Calculer $\Phi(X^n)$, et simplifier son expression avec la formule du binôme de Newton.

$$\Phi(X^n)(x) = \int_{x-h}^{x+h} t^n\,dt = \frac{1}{(n+1)}(x+h)^{n+1} - \frac{1}{n+1}(x-h)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\underbrace{\left(h^{n+1-k} - (-1)^{n+1-k}h^{n+1-k}\right)}_{\substack{=0 \text{ si } n+1-k \text{ pair (en particulier si } k=n+1). \\ =2 \text{ si } n+1-k \text{ impair}}} x^k$$

$$= \frac{2}{n+1}\sum_{\substack{k=0,\\ n+1-k\text{ impair}}}^{n}\binom{n+1}{k}h^{n+1-k}x^k.$$

Donc $\displaystyle \Phi(X^n) = \frac{2}{n+1}\sum_{\substack{k=0\\ k+1-k\text{ impair}}}^{n}\binom{n+1}{k}h^{n+1-k}X^k$

En déduire que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace stable par $\Phi$, ainsi on peut noter $\Phi_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'endomorphisme induit par $\Phi$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On voit que $\Phi(X^n) \in \mathbb{R}_n[X]$ (degré $n$, coeff dominant $\frac{2}{n+1}\binom{n+1}{n}h = 2h$).

Donc par linéarité $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ si $P$ est de degré $\leq n$.

Donc $\Phi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$

Déterminer la matrice de $\Phi_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

le coeff dominant (de $\Phi(X^k)$) est $2h$, un coefficient sur 2 est nul.

$$M_{\mathbb{R}_n[X]}\Phi_n = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & X & & & X^k & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2h & 0 & \frac{2h^3}{3} & 0 & \cdots & \\ 0 & 2h & 0 & & & \\ & & 2h & & \frac{2h}{k+1}\binom{k+1}{j}h^{k+1-j} & \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & 2h \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \\ X^j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(k et j de même parité)

Déterminer les valeurs propres de $\Phi_n$. Pour quelles valeurs de $n$ l'endomorphisme $\Phi_n$ est-il diagonalisable ?

La matrice est triangulaire supérieure avec une seule valeur propre : $\boxed{2h}$. Pour $n=0$ et $n=1$, elle est diagonale (donc $\Phi_0$, $\Phi_1$ diagonalisables). Pour $n \geq 2$, si $\Phi_n$ était diagonalisable avec une seule valeur propre, la matrice serait diagonale ce qui n'est pas le cas.

Donc $\Phi_n$ n'est pas diagonalisable pour $n \geq 2$.

**Éléments propres de $\Phi$.**

Soit $\lambda > 2h$. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $e^{ah} - e^{-ah} = \lambda a$.

$e^{ah} - e^{-ah} - \lambda a = 2ah - \lambda a + o(a)$ lorsque $a \to 0$
$= (2h - \lambda)a + o(a)$, donc $< 0$ si $a > 0$ suffisamment petit.

et $e^{ah} - e^{-ah} - \lambda a \to +\infty$ quand $a \to +\infty$ (croissance comparée, $h > 0$).

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a > 0$ tel que
$e^{ah} - e^{-ah} - \lambda a = 0$.

---

En déduire que l'ensemble des valeurs propres de $\Phi$, noté $\mathrm{Sp}(\Phi)$, contient $\{0\} \cup [2h, +\infty[$ (on pourra considérer les fonctions de la forme $x \mapsto e^{ax}$).

Si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2h$, on a déjà des vecteurs propres (partie précédente : $\mathrm{Ker}\,\Phi \neq \{0\}$ et $1 \in \mathrm{Ker}(\Phi - 2h\,\mathrm{id})$)
(donc $0$ et $2h$ sont valeurs propres).

Si $\lambda > 2h$ On pose $f(x) = e^{ax}$ avec $a$ comme ci-dessus (donc $a \neq 0$)

alors $\Phi(f)(x) = \int_{x-h}^{x+h} e^{at}\,dt = \frac{1}{a}\left(e^{a(x+h)} - e^{a(x-h)}\right) = \frac{e^{ah} - e^{-ah}}{a} e^{ax}$
$= \lambda f(x)$.

Donc $\lambda$ est valeur propre de $\Phi$.

---

En utilisant la fonction $a \mapsto \frac{\sin(ah)}{ah}$, montrer que l'on a $\mathrm{Sp}(\Phi) \supset [-\frac{4h}{3\pi}, +\infty[$, et donner un exemple de vecteur propre pour toute valeur propre $\lambda \geqslant -\frac{4h}{3\pi}$.

On pose $f(x) = \sin(ax) = \mathrm{Im}\left(e^{iax}\right)$

Donc $\Phi(f)(x) = \int_{x-h}^{x+h} \mathrm{Im}\left(e^{iat}\right)dt = \mathrm{Im}\Big(\underbrace{\frac{1}{ia}\left(e^{iah} - e^{-iah}\right)}_{= \frac{2\sin(ah)}{a}} e^{iax}\Big)$

$= 2h\frac{\sin ah}{ah} f(x)$.

$a \mapsto \frac{\sin ah}{ah}$ tend vers $1$ quand $a \to 0$ et vaut $\frac{-1}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{-2}{3\pi}$ pour $ah = \frac{3\pi}{2}$

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, $2h\frac{\sin ah}{ah}$ prend toutes les valeurs entre $-\frac{2}{3\pi} \times 2h = \frac{-4h}{3\pi}$ (inclus) et $1 \times 2h = 2h$ (exclu).

Donc $\forall \lambda \in [-\frac{4h}{3\pi}, 2h[$, $x \mapsto \sin ax$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$ (pour $a$ tel que $2h\frac{\sin ah}{ah} = \lambda$).
(les autres exemples de vecteurs propres donnés précédemment).