**UNIVERSITÉ DE PARIS-DAUPHINE**

**CYCLE**

ANNÉE : ................ SESSION : ................

MATIÈRE : ..........................

UV = ---------------

Le candidat inscrit ici très lisiblement ses

Nom : FROUVELLE

Prénoms : Amic

N° GROUPE :

Numéro de convocation :



1/2

N° de groupe :

Nombre d'intercalaires :

| | Note | Signature | Note finale |
|---|---|---|---|
| 1er correcteur | | | |
| 2e correcteur | | | |

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE

Ne pas écrire dans cette marge

Sujet : Exercice 1.

1. Si $B \subset F$ $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$ (rappel...)

Donc $f^{-1}(f(A)) = \{x \in E, f(x) \in f(A)\}$. Donc si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$ et donc $x \in f^{-1}(f(A))$. On a donc bien $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2. Supposons $f$ injective. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. On a donc $f(x) \in f(A)$, donc il existe $\tilde{x} \in A$ tel que $f(x) = f(\tilde{x})$. Pour un tel $\tilde{x}$, par injectivité, on obtient $x = \tilde{x} \in A$. On a donc bien $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

3. Si $f$ n'est pas injective, on prend $x_0$ et $x_1$ dans $E$ tels que $x_0 \neq x_1$ et $f(x_0) = f(x_1)$. On pose $A_0 = \{x_0\}$. On a donc $x_1 \notin A_0$, mais $f(x_1) = f(x_0) \in f(A_0)$. Donc $x_1 \in f^{-1}(f(A_0))$. On a bien $A_0 \neq f^{-1}(f(A_0))$.

PARTIE
A
RABATTRE

Exercice 2

1. $f : x \mapsto x + e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$f(0) = 1 < 1 + \frac{1}{n}$

$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + e^{1/n} > \frac{1}{n} + 1$

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_n$ dans $]0, 1/n[$ tel que $f(x_n) = \frac{1}{n} + 1$ D'autre part la fonction $f$ étant strictement croissante (donc injective), la solution à l'équation $f(x) = 1 + 1/n$ est unique.

2. On a $0 < x_n < \frac{1}{n}$ donc $x_n \to 0$ et même $x_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

$1 + \frac{1}{n} = x_n + e^{x_n} = x_n + 1 + x_n + O(x_n^2)$. Donc $2x_n = \frac{1}{n} + O(x_n^2) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc $x_n = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

3. De même on a $1 + \frac{1}{n} = x_n + e^{x_n} = x_n + 1 + x_n + \frac{x_n^2}{2} + O(x_n^3)$.

Donc $2x_n = \frac{1}{n} - \frac{x_n^2}{2} + \underbrace{O(x_n^3)}_{= O(1/n^3)}$, Mais $x_n^2 = \left(\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 = \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Donc $x_n = \dfrac{\frac{1}{n} - \frac{1}{8n^2} + O(1/n^3)}{2} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{16n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Exercice 3

1. $Y^2 - 3Y - 4 = (Y+1)(Y-4)$ ($-1$ racine évidente, produit $= -4$).

Donc $X^4 - 3X^2 - 4 = (X^2+1)(X^2-4) = (X+i)(X-i)(X+2)(X-2)$

autres méthodes :
- décomposer sur $\mathbb{C}$, revenir sur $\mathbb{R}$.
- Chercher $\frac{\alpha}{X-2} + \frac{\beta}{X+2} + \frac{\gamma X + \delta}{X^2+1} \dots$

2. $\frac{20}{(Y+1)(Y-4)} = \frac{a}{Y+1} + \frac{b}{Y-4}$ $\otimes (Y+1)$, appliqué en $-1$ : $\frac{20}{-5} = a = -4$

de même $\otimes (Y-4)$, —— $4$ $\frac{20}{5} = b = 4$

Donc $\frac{20}{(X^2+1)(X^2-4)} = \frac{-4}{X^2+1} + \frac{4}{X^2-4}$ $\rightarrow$ $\left( = \frac{c}{X-2} + \frac{d}{X+2}\right.$, même méthode, on obtient $\left. c = 1,\ d = -1 \right)$

Au final $\frac{20}{X^4 - 3X^2 - 4} = \frac{-4}{X^2+1} + \frac{1}{X-2} - \frac{1}{X+2}$

3. On a donc $\int_0^1 \underbrace{\frac{20}{4 + 3x^2 - x^4}}\, dx = \int_0^1 \left( \frac{4}{x^2+1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right) dx$

(continu, $>0$ sur $[0,1]$ donc intégrale bien définie).

$= \left[ 4 \arctan x - \ln|x-2| + \ln|x+2| \right]_0^1 = 4 \underbrace{\arctan(1)}_{= \frac{\pi}{4}} - \ln 1 + \ln 3 - 4 \times 0 - \ln 2 + \ln 2$

$= \pi + \ln 3$

Exercice 4

1. Si $\deg P \leq 3$, alors $\deg P' \leq 2$, donc $\deg\left(XP'(X)+P'(X+1)\right) \leq \max(3,2) = 3$,

donc $\Phi(P) \in \mathbb{R}^3[X]$. Donc $\Phi(\mathbb{R}^3[X]) \subset \mathbb{R}^3[X]$.

D'autre part si $P, Q \in \mathbb{R}^3[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Phi(P+\lambda Q) = X(P'+\lambda Q')(X) + (P'+\lambda Q')(X+1)$ (linéarité de la dérivée)

$= \Phi(P) + \lambda \Phi(Q)$ en développant.

Donc $\Phi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3[X]$.

2. $\Phi(1) = 0$ $\quad \Phi(X) = X \times 1 + 1 = X+1$, de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ dans la base $(1, X, X^2, X^3)$

$\Phi(X^2) = 2X^2 + 2(X+1) = 2X^2 + 2X + 2$

$\Phi(X^3) = 3X^3 + 3(X+1)^2 = 3X^3 + 3X^2 + 6X + 3$.

La matrice de $\Phi$ dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ est donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. Cette matrice est triangulaire supérieure, elle admet donc comme valeurs propres les éléments diagonaux qui sont tous distincts. Elle est donc diagonalisable, et l'endomorphisme $\Phi$ l'est donc aussi.

Exercice 5

1. $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{|x|^n}{n} = \frac{1}{n}$. Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la série $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente.

2. $\int_0^x s^{n-1}\, ds = \frac{x^n}{n}$

Donc $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \int_0^x s^{n-1} ds = \int_0^x \underbrace{\sum_{n=1}^{N} (-s)^{n-1}}_{= \frac{1 - (-s)^N}{1-(-s)}} ds$.

(1er terme ; N termes ; pour $-s \neq 1$)

Donc $\sum_{n=1}^{N} f_n(x) = \int_0^x \frac{1-(-s)^N}{1+s} ds$

$= \left[\ln(1+s)\right]_0^x + (-1)^{N-1} \int_0^x \frac{s^N}{1+s} ds = \ln(1+x) + (-1)^{N-1} \int_0^x \frac{s^N}{1+s} ds$

3. Pour $s \geq 0$, $\frac{1}{1+s} \leq 1$ donc $\int_0^x \frac{s^N}{1+s} ds \leq \int_0^x s^N ds = \frac{x^{N+1}}{N+1} \leq \frac{1}{N+1}$ si $0 \leq x \leq 1$.

4. En posant $f : x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0,1]$, on a donc

$\left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - f(x) \right| = \left| (-1)^{N-1} \int_0^x \frac{s^N}{1+s} ds \right| \leq \frac{1}{N+1}$. Ceci étant vrai pour tout $x$ dans $[0,1]$. On a donc $\sup_{x \in [0,1]} \left| \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right)(x) - f(x) \right| \leq \frac{1}{N+1} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc $\sum_{n=1}^{N} f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $f$.

1. Si $x \in U$ on a donc $r(x) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_+, \forall i \in [\![1,n]\!], \lambda \leq \frac{(Ax)_i}{x_i}\}$.

Si $\lambda$ vérifie $\lambda \leq \frac{(Ax)_i}{x_i}$ pour tout $i$, alors $\lambda \leq \min\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \frac{(Ax)_i}{x_i}$. $\underset{>0\ \forall i}{x_i}$

Donc en passant au sup $r(x) \leq \min\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \frac{(Ax)_i}{x_i}$.

D'autre part, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\min\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \frac{(Ax)_j}{x_j}$. Donc $\min\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \frac{(Ax)_i}{x_i}$ appartient à l'ensemble dont on prend le sup. On a donc $r(x) \geq \min \frac{(Ax)_i}{x_i}$.

On a donc bien $r(x) = \min\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \frac{(Ax)_i}{x_i}$

2. $\boxed{a}$ Si $x_i \geq 0$ pour tout $i$ et $x \neq 0$, il existe $i_0$ tel que $x_{i_0} > 0$

Alors pour $i \in [\![1,n]\!]$ $(Ax)_i = \sum\limits_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \geq a_{i i_0} x_{i_0} > 0$.

Donc $Ax \in U$.

$\boxed{b}$ Pour $\lambda \geq 0$, on a $\left(A\frac{x}{\|x\|}\right)_i \geq \lambda\left(\frac{x}{\|x\|}\right)_i \Leftrightarrow (Ax)_i \geq \lambda x_i$.

Les deux ensembles dont on prend le sup sont donc les mêmes dans les définitions de $r(x)$ et $r\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$. Donc $r(x) = r\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$

$\boxed{c}$ Soit $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $(Ax)_i \geq \lambda_k x_i$. et $\lambda_k \to r(x)$.
(par définition du sup). Pour $i$ fixé, par passage à la limite $k \to \infty$, on obtient bien $(Ax)_i \geq r(x) x_i$.

$\boxed{d}$ On a donc $(A(Ax))_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(Ax)_j \geq \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} r(x) x_j = r(x)(Ax)_i$.
et ce quelque soit $i \in [\![1,n]\!]$. Donc $r(x)$ est dans l'ensemble dans lequel on prend le sup pour la définition de $r(Ax) = \sup\{\lambda \cdots (A(Ax))_i \geq \lambda (Ax)_i\}$.

Donc $r(Ax) \geq r(x)$.

$\boxed{e}$ On a donc $(A(Ax))_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(Ax)_j > \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} r(x) x_j = r(x)(Ax)_i$, et ce $\forall i \in [\![1,n]\!]$ car $\underbrace{a_{i i_0}}_{>0}(Ax)_{i_0} > \underbrace{a_{i i_0}}_{>0} r(x) x_{i_0}$.

D'après a) et 1., comme $Ax \in U$, on a

$r(Ax) = \min\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \frac{A(Ax)_i}{(Ax)_i}$ tous ces termes sont $> r(x)$.
Donc $r(Ax) > r(x)$.

3. Si $\alpha \leq \beta$ alors $\frac{1}{2}(\alpha+\beta-|\beta-\alpha|) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta-(\beta-\alpha)) = \alpha$. De même si $\beta \leq \alpha$, on a $\frac{1}{2}(\alpha+\beta-|\beta-\alpha|) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta-(\alpha-\beta)) = \beta$. Donc dans tous les cas $\frac{1}{2}(\alpha+\beta-|\beta-\alpha|) = \min(\alpha,\beta)$.

Si $f, g$ sont continues $U \to \mathbb{R}$,

$\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ est donc continue $U \to \mathbb{R}$ par composition de fonctions continues.

# UNIVERSITÉ DE PARIS-DAUPHINE

## CYCLE

ANNÉE : ................... SESSION : ...................

MATIÈRE : ...........................

UV = ----------------

Le candidat inscrit ici très lisiblement ses

Nom : FROUVELLE

Prénoms : Amic

N° GROUPE :

Numéro de convocation :

2/2

*Il est interdit aussi bien de signer à la fin de la composition que d'indiquer son nom ou son numéro sur les feuilles intercalaires.*

N° de groupe :

Nombre d'intercalaires :

| | Note | Signature | Note finale | APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE |
|---|---|---|---|---|
| 1er correcteur | | | | |
| 2e correcteur | | | | |

Ne pas écrire dans cette marge

Partie 1

3. Suite : Par une récurrence immédiate, le min de n fonctions continues sur $U$ est donc continu sur $U$ : $\min(f_1 \dots f_k) = \min(\min(f_1 \dots f_{k-1}), f_k)$.

Comme $x \mapsto \frac{(Ax)_i}{x_i}$ est continue sur $U$ ($x_i$ ne s'annule pas), et ce $\forall i \in [\![1,n]\!]$ on en déduit que $r : \begin{array}{l} U \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \min \frac{(Ax)_i}{x_i} \end{array}$ est continue sur $U$.

4. Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$ alors $K_0 = S \cap C$.

La norme étant continue, $S$ est fermé. $C$ est également fermé (si une suite convergente est à coordonnées positives ou nulles, sa limite aussi).

Donc $K_0$ est fermé et évidemment borné. C'est donc un compact (dimension finie).

Comme $K_1$ est l'image de $K_0$ par $x \mapsto Ax$ (continue) $K_1$ est compact également.

D'autre part, d'après 1.a., comme $K_0 \subset C \setminus \{0\}$, alors $K_1 \subset U$.

Donc $r$ est continue sur $K_1$ (d'après 3.), et y atteint donc son maximum en $q \in K_1$. compact.

PARTIE
A
RABATTRE

5. Si $x \in C\setminus\{0\}$, alors

$$r(x) = r\Big(\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{(\in K_0)}\Big) \underset{\text{par 1.d)}}{\leq} r\Big(\underbrace{A\frac{x}{\|x\|}}_{\in K_1}\Big)$$

$$\leq r(q)$$

car $q$ est un point de maximum de $r$ sur $K_1$.

Donc $\sup_{x\in C\setminus\{0\}} r(x) \leq r(q)$.

Comme $q \in C\setminus\{0\}$, on a égalité.

Donc $\rho = r(q)$

6. Si $r(x)=\rho$ on a $\rho = r(x) \leq r(\underbrace{Ax}_{\in U\subset C\setminus\{0\}}) \leq \sup_{x'\in C\setminus\{0\}} r(x') = \rho$.

Donc $r(Ax) = \rho = r(x)$

D'après 2.e), par contraposée, on a donc $\forall i \in [\![1,n]\!]\ (Ax)_i \leq r(x)\, x_i$, mais on a par 2.d) $(Ax)_i \geq r(x)\, x_i$. Donc $(Ax)_i = \underbrace{r(x)}_{=\rho}\, x_i$ pour tout $i$, autrement dit $Ax = \rho x$.

Comme $Ax \in U$, on a donc $\rho > 0$ (sinon $Ax = 0$...) et donc $x = \frac{1}{\rho}Ax \in U$.

## Partie 2

1. On a $\langle p, Aq\rangle = \langle A^T p, q\rangle = \rho^*\langle p, q\rangle$

$\qquad \overset{\shortparallel}{\langle p, \rho q\rangle} = \rho\langle p, q\rangle$.

Comme $p$ et $q$ sont dans $U$ (coordonnées $>0$), alors $\langle p, q\rangle > 0$ donc $\rho = \rho^*$

2. De même si $x \neq 0$ et $x \in C$ avec $Ax = \lambda x$, on obtient

$\lambda\langle p, x\rangle = \langle p, Ax\rangle = \langle A^T p, x\rangle = \rho^*\langle p, x\rangle$.

$\langle p, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{p_i}_{>0}\underbrace{x_i}_{\geq 0} > 0$ puisque les $x_i$ ne sont pas tous nuls.

Donc $\lambda = \rho^* = \rho$. ~~d'après~~ Comme au 6. de la partie 1, $Ax \in U$, $\rho > 0$ donc $x = \frac{1}{\rho}Ax \in U$.

3. $\boxed{a}$ $q$ et $v$ sont dans $E_\rho$ donc $u\,(=\alpha q - v)$ aussi. Donc $Au = \rho u$

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, $u_j = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \frac{v_i}{q_i} \times q_j - v_j \geq \frac{v_j}{q_j} \times q_j - v_j = 0$. Donc $u \in C$.

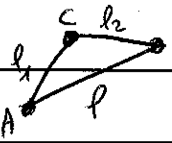
Enfin si $\alpha = \frac{v_{i_0}}{q_{i_0}}$ ($i_0$ réalisant le max) alors $u_{i_0} = \frac{v_{i_0}}{q_{i_0}} \times q_{i_0} - v_{i_0} = 0$.

$\boxed{b}$ Si $v \neq 0$, alors c'est un vecteur propre de $A$ dans $\mathbb{C}$ donc d'après 2. on obtient $v \in U$. Comme $v_{i_0} = 0$ c'est une contradiction. Donc $v = 0$,
(ou directement en écrivant $v = \frac{1}{\rho} Av \in U$).
c'est à dire $V = \alpha q$.

En conclusion, tout vecteur propre associé à $\rho$ est proportionnel à $q$.

Donc $E_\rho = \{\alpha q, q \in \mathbb{R}\}$ est de dimension $1$.

4. C'est le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ (correspondant au module sur $\mathbb{C}$), qui provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.




$l_1 + l_2 = l$ ssi $C \in [AB]$.

On peut le montrer par récurrence

(partant de $|w_1 + w_2| = |w_1| + |w_2| \Leftrightarrow |w_1 + w_2|^2 = (|w_1| + |w_2|)^2$
$\Leftrightarrow 2 w_1 \cdot w_2 = 2|w_1||w_2|$ cas d'égalité de C.S : $w_1$ et $w_2$ positivement liés)

Ou le faire directement :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} w_i\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|\right)^2 \Leftrightarrow 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} w_i \cdot w_j = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |w_i||w_j|$$

Le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz donne que tous les $w_i$ sont positivement liés.

5. $\boxed{a}$ $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |z_j| \geq \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j\right| = |(Az)_i| = |\lambda z_i| = |\lambda| x_i \geq \rho x_i$

Donc $r(x) \geq \rho$ ($\rho$ est dans l'ensemble dont on prend le sup).

et donc $r(x) = \rho$ (on a $r(x) \leq \rho \; \forall x \in C \setminus \{0\}$).

$\boxed{b}$ D'après 6. de la partie 1, on a donc $Ax = \rho x$.

Donc $(Ax)_i = \rho x_i$ et l'inégalité ci-dessus est donc une égalité.

On a bien $(Ax)_i = |(Az)_i| = \rho x_i$

$\boxed{c}$ On a donc $x \in U$ (car $x \in C \setminus \{0\}$ et $Ax = \rho x$). Donc $z_i \neq 0 \; \forall i$.

et pour $i$ fixé $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij} z_j| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j\right|$. D'après 4. appliqué à $w_j = a_{ij} z_j$, il existe $\alpha > 0$ tel que $a_{ij} z_j = \alpha a_{i1} z_1 \; \forall j$.

Donc $a_{ij} |z_j| = \alpha a_{i1} |z_1| \; \forall j$.

On obtient donc $\frac{z_j}{|z_j|} = \frac{a_{ij} z_j}{a_{ij} |z_j|} = \frac{\alpha a_{i1} z_1}{\alpha a_{i1} |z_1|} = \frac{z_1}{|z_1|}$ $(\forall j)$

En posant $\beta = \frac{z_1}{|z_1|}$, on obtient donc $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $z_j = \beta |z_j| = \beta x_j$.

Autrement dit $z = \beta x$. Donc $Az = \beta Ax = \beta \rho x = \rho z$

Comme $z \neq 0$, on obtient $\lambda = \rho$ ce qui est une contradiction. (on avait $\lambda \neq \rho$)

($Az = \lambda z$)

## Partie 3

**1.** On a $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times 1 = 1 = x_i$ Donc $Ax = x$.

Comme $x \in C \setminus \{0\}$, d'après le 2. de la partie 2, $x$ étant un vecteur propre dans $C$, sa valeur propre (ici 1) est égale à $\rho$. Donc $\underline{\rho = 1}$

**2.** D'après le 1. de la partie 2, on a $\rho^* = 1$, et d'après le 3. de la partie 2 appliqué à la matrice $A^T$, la dimension de l'espace propre associé à $\rho^*$ est 1. Il existe donc $\tilde{p} \in C$ tel que $A^T\tilde{p} = \tilde{p}$

d'après la 1ere partie.

On pose $p = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_i} \tilde{p}$. On a bien $A^T p = p$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i} = 1$.

(ie $p^T A = p^T$).

Si $p'$ est un autre vecteur propre de $A^T$ associé à 1 avec $p' \in C$ et $\sum_{i=1}^{n} p'_i = 1$, alors $p' = \lambda p$ (car l'espace est de dim 1) avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

puis $1 = \sum_{i=1}^{n} p'_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i = \lambda$ donc $\lambda = 1$ et $p' = p$. D'où l'unicité.

## Bonus (indications).

**1.** Théorème du rang : $rg(A - \rho I_n) = n - \dim E_\rho = n-1$. Donc il existe une sous-matrice $(n-1)\times(n-1)$ inversible, le cofacteur associé est $\neq 0$.

**2.** Utiliser la formule $A(Com(A))^T = \det(A) I_n$, appliquée à $A - \rho I_n$.

si $(A - \rho I_n) B_\rho = 0$ toutes les colonnes de $B_\rho$ sont dans $E_\rho$ (de dim 1, $q \in E_\rho$).

**3.** On utilise cette fois $Com(A)^T A = \det(A) I_n$ que l'on transpose (lignes prop. à $p^T$)

**4.** Comme $B_\rho \neq 0$, une des colonnes est non nulle (mettons $j_0$), donc comme elle est proportionnelle à $q$, tous ses éléments sont non-nuls et du même signe. Puis toutes les lignes ont l'élément d'indice $j_0$ non-nul et ~~det~~ même signe. Étant proportionnelles à $p^T$, elles sont donc à coordonnées non-nulles et du même signe.

**5.** On sait que $\frac{\partial(\det)}{\partial E_{ij}}(A) = \lim_{t \to 0} \frac{\det(A + tE_{ij}) - \det(A)}{t}$ $\quad \det(A+tE_{ij}) = \det(A) + t\, Com(A)_{ij}$ (développement / ligne)

$= Com(A)_{ij}$.

Donc $\chi_A'(\lambda) = \sum_{i,j} \frac{\partial(\det)}{\partial E_{ij}}(A - \lambda I_n) \frac{d}{d\lambda}(A - \lambda I_n)_{ij} = -\sum_{i} Com(A - \lambda I_n)_{ii}$

$\frac{d}{d\lambda}(A - \lambda I_n)_{ij} = -1$ si $i = j$, 0 sinon

Donc $\chi_A'(\rho) = -Tr(B_\rho) \neq 0$ ($(B_\rho)_{ii}$ tous non nuls et de même signe). Donc $\rho$ n'est pas racine double de $\chi_A$.