Notions fondamentales de L1–L2
Contrôle continu du 28 septembre 2022 (durée 1h).

NOM : PRÉNOM : Note attendue : A B C

Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application.

Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E, $f(E \setminus A) \subset F \setminus f(A)$.

Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie A de E, $f(E \setminus A) \supset F \setminus f(A)$.

On pose $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Représenter sur un dessin une comparaison de cette somme avec une intégrale, puis démontrer que pour $n \geqslant 1$, on a $u_n \leqslant \ln 2 \leqslant \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$. En déduire la limite de (u_n).

On note E l'ensemble des suites à termes strictement positifs.

On note $\asymp$ la relation suivante sur E : $u \asymp v$ si et seulement si il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour tout entier n, on ait $C_1 v_n \leqslant u_n \leqslant C_2 v_n$. Montrer que c'est une relation d'équivalence sur E.

Voici trois relations sur E : $u\mathcal{R}_1 v \Leftrightarrow u_n = O(v_n)$, $u\mathcal{R}_2 v \Leftrightarrow u_n = o(v_n)$ et $u\mathcal{R}_3 v \Leftrightarrow u_n \sim v_n$. Lesquelles (sans preuve) sont réflexives ? Symétriques ? Transitives ? Trouver des contrexemples pour celles qui ne le sont pas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer sans calcul que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Calculer $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{rg}(A - 5I_4)$.
En déduire les valeurs propres de A et les dimensions des sous-espaces propres associés, sans calculer le polynôme caractéristique.

Problème : représentation de Zeckendorf des entiers.

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
L'objectif est de montrer que tout entier $N \in \mathbb{N}$ s'écrit de manière unique comme $N = \sum_{i\in I} F_i$, où I est un ensemble d'entiers supérieurs à 2 ne contenant pas de nombres consécutifs.

Pour $n \geqslant 1$, on pose $\mathcal{Z}_n$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ constituées d'entiers entre 2 et n et ne contenant pas de nombres consécutifs :

$$\mathcal{Z}_n = \{I \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \forall i \in I, 2 \leqslant i \leqslant n \text{ et } i+1 \notin I\}.$$

Ainsi $\mathcal{Z}_1 = \{\emptyset\}$, et $\mathcal{Z}_2 = \{\{2\}, \emptyset\}$. Déterminer $\mathcal{Z}_3$ et $\mathcal{Z}_4$.

Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{Z}_{n+2} = \mathcal{Z}_{n+1} \cup \{I \cup \{n+2\}, I \in \mathcal{Z}_n\}$ et que cette union est disjointe. En déduire que le cardinal de $\mathcal{Z}_n$ vaut F_{n+1}.

Pour $n \geqslant 1$ on pose s_n la fonction de $\mathcal{Z}_n$ dans $\mathbb{N}$ donnée par $s_n(I) = \sum_{i\in I} F_i$ (on a par convention $s_n(\emptyset) = 0$). Montrer par récurrence que l'image de s_n est incluse dans $[\![0, F_{n+1}[\![$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{Im}(s_n) = [\![0, F_{n+1}[\![$.

Montrer que $F_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$ et conclure.

Bonus (au dos) : Donner la représentation de Zeckendorf de 2022. Écrire un programme qui calcule la représentation d'un entier N (et renvoie la liste des nombres de Fibonacci dont la somme vaut N).