Notions fondamentales de L1–L2
Contrôle continu du 28 septembre 2020 (durée 1h).

NOM :	PRÉNOM :	Note attendue : A B C

Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application.

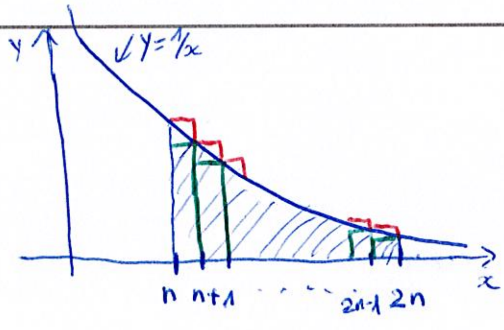
Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E, $f(E \setminus A) \subset F \setminus f(A)$.

- Si f injective. Soit $A \subset E$. Si $y \in f(E\setminus A)$, alors on prend $x \in E\setminus A$ tq $y = f(x)$.
  Montrons que $y \in F \setminus f(A)$. Par l'absurde si $y \in f(A)$, on prend $z \in A$ tq $y = f(z)$.
  Par injectivité $x = z$ mais $z \in A$ et $x \notin A$. Contradiction. On a bien $f(E\setminus A) \subset F \setminus f(A)$.
- (Contraposée) montrons f non injective $\Rightarrow \exists A \subset E$ tq $f(E\setminus A) \not\subset F\setminus f(A)$.
  Si f non injective on prend $x_1 \neq x_2$ (dans E) avec $f(x_1) = f(x_2)$.
  Pour $A = \{x_1\}$, on a $x_2 \notin A$ donc $f(x_2) \in f(E\setminus A)$. Mais $f(x_2) = f(x_1) \in f(A)$
  Donc $f(x_2) \notin F \setminus f(A)$.

Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie A de E, $f(E \setminus A) \supset F \setminus f(A)$.

- Si f surjective. Soit $A \subset E$. Soit $y \in F \setminus f(A)$. Comme $y \in F$ et f surjective, on prend $x \in E$ tq $y = f(x)$. Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$ or $y \notin f(A)$. Donc $x \notin A$. Donc $y = f(x) \in f(E\setminus A)$.
- Si pour toute partie A de E $f(E\setminus A) \supset F \setminus f(A)$, en particulier pour $A = \emptyset$
  on obtient $f(E) \supset F$. et comme $f(E) \subset F$ on a bien $f(E) = F$ donc
  f est surjective.

On pose $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Représenter sur un dessin une comparaison de cette somme avec une intégrale, puis démontrer que pour $n \geqslant 1$, on a $u_n \leqslant \ln 2 \leqslant \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$. En déduire la limite de (u_n).



Comme $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $[n, 2n]$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{2n} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}.$$

$$\text{Donc } u_n \leqslant \underbrace{\left[\ln x\right]_n^{2n}}_{\substack{= \ln(2n) - \ln n \\ = \ln 2}} \leqslant \underbrace{\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}}_{\substack{= \frac{1}{n} + \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2n} \\ = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = u_n + \frac{1}{2n}}}$$

Donc $u_n \leqslant \ln 2 \leqslant u_n + \frac{1}{2n}$

Donc $\ln 2 - \frac{1}{2n} \leqslant u_n \leqslant \ln 2$

Par encadrement $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ln 2$

On note E l'ensemble des suites à termes strictement positifs.

On note $\asymp$ la relation suivante sur E : $u \asymp v$ si et seulement si il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour tout entier n, on ait $C_1 v_n \leqslant u_n \leqslant C_2 v_n$. Montrer que c'est une relation d'équivalence sur E.

- Si $u \in E$ on a $1 \times u_n \leq u_n \leq 1 \times u_n$ donc $u \asymp u$ (réflexivité).
- Si $u \asymp v$ (pour $u, v \in E$) on prend $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ tq $C_1 v_n \leq u_n \leq C_2 v_n$.

  Donc $\frac{1}{C_2} u_n \leq v_n \leq \frac{1}{C_1} u_n$. Donc $v \asymp u$ (symétrie).
- Pour $u, v, w \in E$, si $u \asymp v$ et $v \asymp w$ On prend $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ tq $C_1 v_n \leq u_n \leq C_2 v_n$ et $C_3 w_n \leq v_n \leq C_4 w_n$. Alors on a

  $C_1 C_3 w_n \leq C_1 v_n \leq u_n \leq C_2 v_n \leq C_2 C_4 w_n$. Donc $u \asymp w$ (transitivité).

Voici trois relations sur E : $u\mathcal{R}_1 v \Leftrightarrow u_n = O(v_n)$, $u\mathcal{R}_2 v \Leftrightarrow u_n = o(v_n)$ et $u\mathcal{R}_3 v \Leftrightarrow u_n \sim v_n$. Lesquelles (sans preuve) sont réflexives ? Symétriques ? Transitives ? Trouver des contrexemples pour celles qui ne le sont pas.

Réflexives R_1 et R_3. R_2 ne l'est pas : la suite constante $u_n = 1$ $\forall n$ ne vérifie pas $u_n = o(\underbrace{u_n}_{=1})$ (car $u_n \not\to 0$).

Symétriques R_3. R_1 ne l'est pas $u_n = \frac{1}{n} = O(\underbrace{1}_{v_n})$ mais on n'a pas $\underbrace{1}_{v_n} = O(\underbrace{1/n}_{u_n})$ (sinon on aurait $v_n \to 0$).

De même R_2 ne l'est pas. (même exemple) $\frac{1}{n} = o(1)$ mais on n'a pas $1 = o(1/n)$.

Transitives R_1, R_2 et R_3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer sans calcul que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Calculer $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{rg}(A - 5I_4)$.
En déduire les valeurs propres de A et les dimensions des sous-espaces propres associés, sans calculer le polynôme caractéristique.

A est symétrique réelle donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (en base orthonormée).

$\mathrm{Tr}(A) = 10$ (c'est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité).

$$A - 5I_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Tous les vecteurs colonnes sont proportionnels à $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A - 5I_4) = 1$.

Donc $\dim \mathrm{Ker}(A - 5I_4) = 4 - 1 = 3$. Donc 5 est valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension 3.

Donc $A = P \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 5 & & \\ & & 5 & \\ & & & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$ et $\lambda + 3 \times 5 = 10$ donc $\lambda = -5$.

l'autre valeur propre est -5, l'espace propre associé est de dimension 1.

Problème : représentation de Zeckendorf des entiers.

On définit la suite de fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence : $F_0 = 0$ $F_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
L'objectif est de montrer que tout entier $N \in \mathbb{N}$ s'écrit de manière unique comme $N = \sum_{i\in I} F_i$, où I est un ensemble d'entiers supérieurs à 2 ne contenant pas de nombres consécutifs.

Pour $n \geqslant 1$, on pose $\mathcal{Z}_n$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ constituées d'entiers entre 2 et n et ne contenant pas de nombres consécutifs :

$$\mathcal{Z}_n = \{I \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \forall i \in I, 2 \leqslant i \leqslant n \text{ et } i+1 \notin I\}.$$

Ainsi $\mathcal{Z}_1 = \{\emptyset\}$, et $\mathcal{Z}_2 = \{\{2\}, \emptyset\}$. Déterminer $\mathcal{Z}_3$ et $\mathcal{Z}_4$.

$Z_3 = \{\{2\},\{3\},\emptyset\}$ $\quad Z_4 = \{\{2\},\{3\},\{4\},\{2,4\},\emptyset\}$.

Card$(Z_1) = 1 = F_2$
Card$(Z_2) = 2 = F_3$.
Donc par récurrence (double)
On obtient Card(Z_{n+2}) = Card(Z_{n+1}) + Card$(Z_n) = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$

Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{Z}_{n+2} = \mathcal{Z}_{n+1} \cup \{I \cup \{n+2\}, I \in \mathcal{Z}_n\}$ et que cette union est disjointe. En déduire que le cardinal de $\mathcal{Z}_n$ vaut F_{n+1}.

On a $Z_{n+1} \subset Z_{n+2}$. Si $I \in Z_n$ et $\tilde{I} = \{I \cup \{n+2\}\}$ alors si $i \in I$ on a bien $2 \leq i \leq n+2$
et si $i \leq n$, $i+1 \notin I$
sinon $i = n+2$ et $i+1 \notin I$ également.
Donc $\{I \cup \{n+2\}, I \in Z_n\} \subset Z_{n+2}$.
Si $I \in Z_{n+2}$. | si $n+2 \notin I$, alors on a bien $I \in Z_{n+1}$
| si $n+2 \in I$, alors $n+1 \notin I$ Donc I est de la forme $\tilde{I} \cup \{n+2\}$ où $\tilde{I} \subset [\![2,n]\!]$
(et de même $\forall i \in \tilde{I}$, $i+1 \in \tilde{I}$
(sinon on aurait $i+1 \in I$)
L'union est disjointe : les ensembles de Z_{n+1} ne contiennent pas $n+2$.
Donc Card(Z_{n+2}) = Card(Z_{n+1}) + Card$(\{I \cup \{n+2\}, I \in Z_n\})$ = Card(Z_{n+1}) + Card(Z_n).

Pour $n \geqslant 1$ on pose s_n la fonction de $\mathcal{Z}_n$ dans $\mathbb{N}$ donnée par $s_n(I) = \sum_{i\in I} F_i$ (on a par convention $s_n(\emptyset) = 0$). Montrer par récurrence que l'image de s_n est incluse dans $[\![0, F_{n+1}[\![$.

On a $s_1(\emptyset) = 0$ donc $\mathrm{Im}(s_1) = \{0\} = [\![0,1[\![$ $(F_2 = 1)$
$s_2(\emptyset) = 0$ $s_2(\{2\}) = F_2 = 1$ $\mathrm{Im}(s_2) = \{0,1\} = [\![0,2[\![$ $(F_3 = 2)$.
Par récurrence, si $\mathrm{Im}(s_n) \subset [\![0,F_{n+1}[\![$ et $\mathrm{Im}(s_{n+1}) \subset [\![0,F_{n+2}[\![$:
Soit $I \in Z_{n+2}$. Si $I \in Z_{n+1}$ $s_{n+2}(I) = s_{n+1}(I) \in [\![0,F_{n+2}[\![\subset [\![0,F_{n+3}[\![$.
Sinon $I = \{n+2\} \cup \tilde{I}$ avec $\tilde{I} \in F_n$. Donc $s_{n+2}(I) = F_{n+2} + \sum_{i\in\tilde{I}} F_i = F_{n+2} + s_n(\tilde{I})$.
Donc $s_{n+2}(I) \in [\![F_{n+2}, F_{n+2} + F_{n+1}[\![= [\![F_{n+2}, F_{n+3}[\![\subset [\![0, F_{n+3}[\![$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{Im}(s_n) = [\![0, F_{n+1}[\![$.

On a déjà $\mathrm{Im}(s_1) = [\![0,F_2[\![$ et $\mathrm{Im}(s_2) = [\![0,F_3[\![$.
Par récurrence si $\mathrm{Im}(s_n) = [\![0,F_{n+1}[\![$ et $\mathrm{Im}(s_{n+1}) = [\![0,F_{n+2}[\![$.
Soit $i \in [\![0,F_{n+3}[\![$. Si $i \in [\![0,F_{n+2}[\![$ alors $i \in \mathrm{Im}(s_{n+1}) \subset \mathrm{Im}(s_{n+2})$.
Sinon, $i \in [\![F_{n+2}, \underset{F_{n+2}+F_{n+1}}{\underset{\parallel}{F_{n+3}}}[\![$ Donc $i = F_{n+2} + j$ avec $j \in [\![0,F_{n+1}[\![$.
Donc on prend $\tilde{I} \in Z_n$ tq $s_n(\tilde{I}) = j$. et $i = s_{n+2}(\{n+2\} \cup \tilde{I}) \in \mathrm{Im}(s_{n+2})$.

Montrer que $F_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$ et conclure.

Par récurrence on a $F_n \geqslant n-1$ $\forall n \geqslant 1$ par exemple.
Donc $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n$ tq $F_{n+1} > N$. Donc $N \in [\![0,F_{n+1}[\![$ Comme s_n est surjective de Z_n dans $[\![0,F_{n+1}[\![$ qui ont les mêmes cardinaux, elle est bijective, donc il existe un unique $I \in Z_n$ tq $s_n(I) = \sum_{i\in I} F_i = N$. (*)

Bonus (au dos) : Donner la représentation de Zeckendorf de 2022. Écrire un programme qui calcule la représentation d'un entier N (et renvoie la liste des nombres de Fibonacci dont la somme vaut N).

(*) Il reste à montrer qu'il n'y a pas d'autre I (donc pas dans $\mathbb{Z}_n$, donc dans $\mathbb{Z}_p$ avec $p>n$) tel que $N = \sum_{i \in I} F_i$.

En prenant $p = \max I$ pour un tel I, on aurait $p>n$ et

$$I = \{p\} \cup \tilde{I} \quad \text{avec } \tilde{I} \text{ dans } \mathbb{Z}_{p-2}$$

$$\text{et donc } N = F_p + S_{p-2}(\tilde{I})$$

Donc $N \geq F_{n+1}$ ce qui est absurde.

Bonus :

F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597

$$\begin{aligned}
2022 &= 1597 + 425 \\
&= F_{17} + 377 + 48 \\
&= F_{17} + F_{14} + 34 + 14 \\
&= F_{17} + F_{14} + F_9 + 13 + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{2022 = F_{17} + F_{14} + F_9 + F_7 + F_2}$$

Un programme (pas optimal, qui recalcule souvent les F_k, mais il est rapide à écrire (récursif)).

- On calcule les nombres de Fibonacci jusqu'à avoir $N \in [\![F_n, F_{n+1}[\![$.
- On calcule récursivement la décomposition de $N-F_n$, ce qui donne une liste à laquelle on rajoute F_n.

En python :

```
def Zeckendorf(N):
    if N==0:
        return []
    Fk, Fkplus1 = 1, 2
    while N >= Fkplus1 :
        Fk, Fkplus1 = Fkplus1, Fk+Fkplus1
    return [Fk]+ Zeckendorf(N-Fk)

Zeckendorf(2022)
→ [1597, 377, 34, 13, 1]
```